

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 32 (1933)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LA FORMULE DE TAYLOR
Autor: Ciornescu, Nicolas
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-25326>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 24.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

SUR LA FORMULE DE TAYLOR

PAR

Nicolas CIORĂNESCU (Bucarest).

1. — Soit $f(x)$ un polynôme de degré n . On a alors, d'après la formule de Taylor

$$f(x+y) = \sum_{p=0}^n x^p \frac{f^{(p)}(y)}{p!} . \quad (1)$$

Proposons-nous de trouver les fonctions $f(x)$ qui jouissent d'une propriété analogue à celle exprimée par la formule (1), c'est-à-dire pour lesquelles on ait

$$f(x+y) = \sum_{p=0}^n f_p(x) \cdot \varphi_p(y) \quad (2)$$

dans tout leur domaine d'existence, les $f_p(x)$ et les $\varphi_p(y)$ étant des fonctions qui restent encore à déterminer.

Nous allons prendre cette propriété de décomposition de $f(x+y)$ exprimée par la relation (2), comme propriété caractéristique de la formule (1) de Taylor pour le polynôme de degré n , et chercher s'il existe des fonctions plus générales qui aient la même propriété, ou si les polynômes sont les seules fonctions pour lesquelles on peut avoir une telle relation.

2. — Si, dans la relation (2), nous faisons $y = 0$ et si nous posons $\varphi_p(0) = a_p$, on voit que

a) il n'est pas possible que tous les a_p soient nuls, car alors on aurait $f(x) \equiv 0$;

b) on a

$$f(x) = \sum_0^n a_p f_p(x) ; \quad (3)$$

par conséquent $f(x)$ est une combinaison linéaire des fonctions $f_p(x)$. Pour trouver ces fonctions nous allons supposer qu'elles ont des dérivées de $n+1$ premiers ordres, et, à cause de la relation (3), il résulte qu'il en est de même de $f(x)$.

Alors, on déduit en dérivant la relation (2) m fois par rapport à x .

$$f^{(m)}(x+y) = \sum_0^n f_p^{(m)}(x) \cdot \varphi_p(y) . \quad (m = 1, 2, \dots, n+1) \quad (4)$$

Les relations (2) et (4) constituent un système linéaire de $n+2$ équations avec $n+1$ inconnues: les fonctions $\varphi_p(y)$.

Pour que ce système soit compatible, il faut que

$$\left| \begin{array}{ccccc} f(x+y) & f_0(x) & f_1(x) & \dots & f_n(x) \\ f'(x+y) & f'_0(x) & f'_1(x) & \dots & f'_n(x) \\ f''(x+y) & f''_0(x) & f''_1(x) & \dots & f''_n(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ f^{(n+1)}(x+y) & f^{(n+1)}_0(x) & f^{(n+1)}_1(x) & \dots & f^{(n+1)}_n(x) \end{array} \right| = 0 . \quad (5)$$

ce qui veut dire qu'il existe des coefficients non tous nuls, tels que les éléments de chaque colonne vérifient une même relation linéaire. Par conséquent on doit avoir des relations de la forme suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0 f^{(n+1)}(x+y) + A_1 f^{(n)}(x+y) + \dots \\ \quad + A_n f'(x+y) + A_{n+1} f(x+y) = 0 , \\ A_0 f_p^{(n+1)}(x) + A_1 f_p^{(n)}(x) + \dots \\ \quad + A_n f'_p(x) + A_{n+1} f_p(x) = 0 , \\ \quad (p = 0, 1, 2, \dots, n) \end{array} \right. \quad (6)$$

Il en résulte que les coefficients A_k sont des constantes. En effet, d'après la relation (3) $f(x)$ doit vérifier la même équation (6)

que les fonctions $f_p(x)$; mais d'après la première relation (6) on voit que cette équation est indépendante de l'argument de f .

Par conséquent, les fonctions $f_0(x), f_1(x), \dots, f_n(x)$ doivent être solutions d'une même équation différentielle linéaire d'ordre $n+1$ et à coefficients constants. Cette condition nécessaire que doivent satisfaire les fonctions $f_p(x)$, est aussi suffisante, car alors le système (2), (4) est compatible, quelque soit l'entier m .

Si les $f_p(x)$ forment un système fondamental de l'équation différentielle dont il a été question, alors $f(x)$ donné par (3) est la solution la plus générale de cette équation; et comme les $f_p(x)$ sont de la forme: $x^k e^{rx}$ (avec $0 \leq k \leq n$, le nombre des constantes r distinctes étant $\leq n$), il en résulte que $f(x)$ est une combinaison linéaire de termes de cette forme.

Si au lieu de dériver la relation (2) par rapport à x , on la dérive par rapport à y , on déduit de la même manière que les fonctions $\varphi_p(y)$ sont solutions de la même équation différentielle, car l'équation analogue à (6) qu'ils doivent vérifier est vérifiée aussi par f .

3. — Supposons qu'on ait pris pour les $f_p(x)$ un système fondamental de solutions d'une certaine équation différentielle linéaire d'ordre $n+1$, à coefficients constants. Alors, pour toute solution de cette équation on a une formule d'addition de l'argument donnée par la relation (2).

Mais pour être complet, il faut aussi déterminer les fonctions $\varphi_p(y)$. Cela peut se faire sans aucune difficulté. Posons pour simplifier l'écriture:

$$f_k(0) = f_{0k} ; \quad f_k^{(m)}(0) = f_{mk} .$$

Alors du système

$$f^{(m)}(y) = \sum_{p=0}^n f_{mp} \cdot \varphi_p(y) \quad (m = 0, 1, 2, \dots, n) \quad (7)$$

on peut tirer les $\varphi_p(y)$, dans l'hypothèse que le wronskien $\Delta(f_0, f_1, \dots, f_n)$ des fonctions $f_p(x)$, qui par l'hypothèse même faite sur ces fonctions n'est pas identiquement nul, ne s'annule

pas pour $x = 0$. Soit $\Delta_0 \neq 0$ sa valeur pour $x = 0$. On a alors:

$$\Delta_0 \varphi_0(x) = \begin{vmatrix} f(x) & f_{01} & f_{02} & \dots & f_{0n} \\ f'(x) & f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ f^{(n)}(x) & f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{vmatrix}; \quad (8)$$

$$\Delta_0 \varphi_1(x) = \begin{vmatrix} f_{00} & f(x) & f_{02} & \dots & f_{0n} \\ f_{10} & f'(x) & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n0} & f^{(n)}(x) & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{vmatrix}.$$

etc.

Nous avons dit que les $\varphi_p(x)$ sont solutions de la même équation que les $f_q(x)$. On doit par conséquent avoir

$$\varphi_p(x) = \sum_{k=0}^n a_{pk} f_k(x). \quad (9)$$

Nous saurons mettre les $\varphi_p(x)$ sous cette forme toutes les fois qu'on pourra exprimer les $f_k^{(m)}(x)$, qui sont aussi solution de la même équation différentielle, à l'aide des fonctions $f_k(x)$.

Lorsque $\Delta_0 = 0$, on peut considérer le système formé par les équations (2) et les n premières équations du système (4) pour une valeur $x = x_0$ qui n'annule pas $\Delta(f_0, f_1, \dots, f_n)$.

En considérant les systèmes (2), (7) comme un système de $n + 2$ équations en $\varphi_k(y)$, on a la formule (2) que vérifie $f(x+y)$, en formant l'éliminant de ce système:

$$\begin{vmatrix} f(x+y) & f_0(x) & f_1(x) & \dots & f_n(x) \\ f(y) & f_{00} & f_{01} & \dots & f_{0n} \\ f'(y) & f_{10} & f_{11} & \dots & f_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ f^{(n)}(y) & f_{n0} & f_{n1} & \dots & f_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad (10)$$

qui généralise la formule de Taylor pour la classe de fonctions que nous avons déterminée.

4. — *Applications.* a) Soit l'équation différentielle $\frac{d^{n+1}z}{dx^{n+1}} = 0$, dont un système fondamental est: $f_p(x) = x^p$ ($p = 0, 1, \dots, n$). Dans ce cas $\Delta_0 = 1! 2! 3! \dots n!$ et $f_{ik} = 0$ si $i \neq k$. En appliquant la formule (10) on retrouve la formule (1) de Taylor.

b) Considérons l'équation du second ordre: $z'' + z = 0$ qui admet les solutions fondamentales $\cos x, \sin x$. Alors, on déduit de (10), que pour toute fonction de la forme:

$$f(x) = A \cos x + B \sin x,$$

on a la relation:

$$f(x+y) = f(y) \cos x + f'(y) \sin x \quad (14)$$

qui contient comme cas particulier la formule d'addition du cosinus et du sinus.

Peut-être qu'il n'est pas banal de montrer que les formules d'addition de ces fonctions appartiennent à la même famille que la formule de Taylor pour un polynôme ! Par contre, pour la fonction $f(x) = A \cos x + B \sin 2x$, on ne peut pas avoir une relation de la forme (14), car les fonctions $\cos x$ et $\sin 2x$ ne sont pas solutions de la même équation linéaire à coefficients constants.

Sans insister d'avantage sur cette question, nous croyons qu'il est intéressant de présenter aussi sous cet aspect la formule classique de Taylor.