

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 32 (1933)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Buchbesprechung:** Paul Montel. — Leçons sur les Fonctions univalentes et multivalentes recueillies et rédigées par F. Marty. Avec une Note de Henri Cartan (Collection de Monographies sur la Théorie des Fonctions publiée sous la direction de M. Emile Borel). — Un vol. gr. in-8° de IV-160 pages. Prix: 40 francs. Gauthier-Villars et Cie. Paris. 1933.

**Autor:** Buhl, A.

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 27.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

tions linéaires de la fonction hypergéométrique et de telles transformations conduisent naturellement au groupe de monodromie de Riemann.

Quant aux représentations intégrales, elles portent à faire une étude préliminaire de la fonction  $\Gamma$ , de cette fonction qui ne satisfait à aucune équation différentielle de constitution algébrique et qui cependant peut être constamment mêlée aux considérations hypergéométriques. Le point de vue de Riemann est surtout fonctionnel; c'est un jardin de singularités supérieurement cultivé.

C'est encore Riemann qui semble être l'instigateur de la seconde partie du volume, partie consacrée à la représentation conforme par les quotients  $\eta$ . Cet  $\eta$  désigne le quotient de deux solutions de l'équation différentielle hypergéométrique; on sait quelles visions prodigieuses il allait engendrer. C'étaient les fonctions automorphes, dites précisément, par Poincaré, fuchsienues ou kleinéennes, ainsi que nombre d'extensions. C'étaient les domaines d'automorphie si joliment construits avec des arcs circulaires et qu'il était possible de mettre en correspondance topologique avec les surfaces qui portent encore le nom de Riemann d'où un lien d'importance capitale avec les fonctions algébriques. Une analyse plus détaillée d'idées aussi grandioses ne va pas sans quelques longueurs déjà développées dans la Bibliographie de *L'Enseignement mathématique* (t. 19, 1917, p. 5 et t. 29, 1930, p. 347) à propos du tome second des *Œuvres* de Poincaré et du tome ajouté par le regretté Fatou aux *Fonctions algébriques* de Paul Appell et de M. Edouard Goursat. Seulement il faut bien observer que dans les leçons de Félix Klein nous trouvons non les développements de Poincaré mais ce qui leur a donné naissance. Quel admirable modèle. Sans doute, pour les jeunes, quelque inquiétude peut se mêler à l'admiration. Travailler Klein maintenant, n'est-ce pas s'exposer à retrouver des résultats connus? On peut faire plusieurs réponses à cette question. D'abord il y a, dans le livre même de Klein, une bibliographie qui nous apprend, par exemple, que les fonctions hypergéométriques *de plusieurs variables* ont été construites et étudiées par Paul Appell. De même pour une foule d'autres questions. En suite il y a encore beaucoup à glaner, beaucoup à repenser. Henri Poincaré n'a terminé ses célèbres mémoires sur les fonctions automorphes que d'une manière provisoire, le sujet, d'après lui, étant seulement *effleuré*. Enfin, à l'époque présente où la Physique théorique fait une si formidable consommation de groupes, particulièrement de groupes linéaires, on ne saurait trop méditer les exemples si vivants et tangibles qu'on trouve en ces pages toutes imprégnées du plus pur génie.

A. BUHL (Toulouse).

Paul MONTEL. — **Leçons sur les Fonctions univalentes et multivalentes** recueillies et rédigées par F. Marty. Avec une Note de Henri CARTAN (Collection de Monographies sur la Théorie des Fonctions publiée sous la direction de M. Emile BOREL). — Un vol. gr. in-8° de IV-160 pages. Prix: 40 francs. Gauthier-Villars et C<sup>ie</sup>. Paris. 1933.

Les notions de multivalence et, en particulier, d'univalence sont si naturelles qu'on se demande pourquoi elles ont tant tardé à être étudiées explicitement. De plus ce n'est pas là prétexte à échafauder des monceaux d'inégalités, comme dans la théorie de la croissance; il s'agit presque toujours de propriétés exactes ayant, le plus souvent, un aspect géométrique permet-

tant notamment d'étendre les propriétés de la représentation conforme. L'ancien esprit analytique et le nouveau semblent donc pouvoir être réunis de la façon la plus heureuse.

La fonction univalente dans un domaine  $D$  est analogue à la fonction réelle monotone dans un intervalle. La fonction multivalente d'ordre  $p$  dans  $D$  y prend  $p$  fois au plus l'une de ses valeurs. On sent, tout de suite, que l'univalence va être chose analogue à l'uniformité bien que les deux mots, au premier abord, aient des sens très différents. Mais, pour la fonction multivalente, il y aura des régions, des cellules d'univalence pour lesquelles on peut imaginer des modes d'association analogues à ceux d'où proviennent les surfaces de Riemann (F. Marty).

La considération de l'ordre de multivalence des polynômes entraîne de curieux rapprochements dont le prototype est le théorème de Rolle; ainsi deux polynômes peuvent réciproquement mettre en évidence des régions d'univalence les concernant.

Les familles normales ou quasi-normales jouent un rôle essentiel quant aux déterminations de valence en certains domaines, tels le cercle-unité. La représentation conforme permet ensuite de s'affranchir de considérations circulaires et d'apercevoir les premières généralités sur les familles de fonctions univalentes ou multivalentes.

L'univalence, imposée dans des domaines géométriques simples, crée, pour les fonctions analytiques, également les plus simples, par exemple pour les fonctions uniformes, toute une analyse extrêmement maniable où n'interviennent que des opérations de calcul infinitésimal très élémentaires et parfois des associations de variables conjuguées rappelant assez le maniement des formes de Ch. Hermite. C'est surtout ici que l'on s'étonne de voir que le sujet n'est pas étudié depuis longtemps.

Pour les fonctions entières, il existe des angles d'univalence. Ceci est en relation à peu près immédiate avec les considérations angulaires de croissance dues notamment à MM. Phragmén et Lindelöf et avec les fameuses fonctions de Mittag-Leffler, bornées hors d'un angle à ouverture éventuellement évanouissante, qui furent d'abord construites en vue du prolongement analytique par séries de polynômes tayloriens. Là encore nos jeunes et brillants analystes, MM. Marty, Dieudonné, ... sont en contact avec des recherches déjà quelque peu estompées dans le passé.

A l'univalence correspondent d'autre part des propriétés extrémales qui jettent un jour nouveau sur la véritable origine de ces propriétés; on sait que nombre de problèmes aux limites semblaient déterminés, pour d'illustres auteurs, par des considérations d'extremum qui n'étaient pas absolument rigoureuses.

Les domaines couverts ou non par les valeurs des fonctions régulières semblent être des généralisations des valeurs accessibles ou non auxquelles ont été consacrés tant de développements paraphrasant ou étendant le célèbre théorème de M. Emile Picard. Il est à peine besoin de dire qu'ici le sujet devient très difficile et comporte encore beaucoup d'inconnu.

M. Henri Cartan, à la suite de ces considérations, a placé une Note de 27 pages *Sur la possibilité d'étendre aux fonctions de plusieurs variables complexes la Théorie des fonctions univalentes*. Le jeune et savant géomètre part d'un espace  $(E)$  à  $n$  variables complexes, donc à  $2n$  dimensions réelles. Il y définit des domaines  $(D)$  et  $(D')$ , en correspondance *pseudo-conforme*, les angles n'étant conservés que sous des conditions qui s'évanouissent

en représentation conforme ordinaire. De là des difficultés nouvelles et des suites uniformément convergentes de systèmes univalents, formation en laquelle on retrouve notamment un aspect très général de l'intégrale de Kronecker représentant le nombre des racines d'un système d'équations simultanées. Il est ici manifeste que la théorie des systèmes univalents de  $n$  fonctions de  $n$  variables complexes est encore à l'état très embryonnaire mais les embryons que nous présente M. Henri Cartan sont éminemment suggestifs et ont le grand avantage d'être exempts de calculs compliqués. C'est avec la plus grande confiance qu'on peut les étudier pour les développer.

A. BUHL (Toulouse).

LÉON LICHTENSTEIN. — **Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten.** — Un volume gr. in-8° de VIII-176 pages et 4 figures. Prix: RM. 15,60. Julius Springer, Berlin. 1933.

Fatalité ! Je reçois, à peu près en même temps, ce bel ouvrage et une carte de M<sup>me</sup> Stéphanie Lichtenstein qui m'annonce la mort de son mari décédé subitement, à Zakopane, le 21 août 1933. D'ailleurs l'auteur dédiait l'œuvre à sa femme. *Meiner lieben Frau !*

Il y a de quoi être atterré. Léon Lichtenstein était un mathématicien de premier ordre aimant à unir la science des symboles à la philosophie selon Henri Poincaré et Emile Meyerson. En analysant, à sa manière, les figures d'équilibre des masses fluides en rotation il prouvait encore une prodigieuse puissance d'assimilation sur laquelle se greffait une puissante originalité. D'ailleurs, il avait renouvelé la question, à sa base, en mettant en évidence le plan de symétrie normal à l'axe d'où équilibre sphérique dans le cas de la rotation nulle. Nous avons déjà insisté sur ce point l'an dernier (p. 307) en analysant ici-même les *Figures planétaires* de M. R. Wavre. La simplicité de l'analyse qui donne le plan de symétrie retentit d'ailleurs sur nombre de questions connexes d'où l'apparition d'une sorte de géométrie des masses avoisinant les questions isopérimétriques de structure purement géométrique.

Les développements analytiques de Poincaré, Appell, Liapounoff, ... apparaissent avec les figures voisines d'une figure d'équilibre et c'est là que commencent les difficultés véritables, même en s'en tenant au cas de l'homogénéité. L'équation fondamentale est intégral-différentielle et, en général, n'est même pas linéaire. Il s'agit de l'analyser, par approximations successives, au moyen d'équations intégrales; c'est maintenant une manière relativement simple d'arriver aux équations de ramification et non sans considérations de symétrie en lesquelles la géométrie reprend ses droits. Ces équations forment des systèmes réductibles. Avec les figures d'équilibre subsistent aussi des invariances intégrales, notamment des volumes invariants et c'est ce qui permet de rattacher, aux généralités précédentes, le problème des figures océaniques, la masse aqueuse admettant alors, dans son voisinage, un noyau solide invariant. Conditions aux limites et invariants intégraux s'allient souvent ainsi de manière remarquable.

Quant aux figures non homogènes dans le voisinage d'une figure donnée non nécessairement homogène, la question dépend d'une équation intégral-différentielle qui non seulement ne s'écrit pas en termes finis mais nécessite déjà, quant à sa seule formation, de prudentes considérations de convergence uniforme. C'est de la belle méthode variationnelle, tendue encore sur de