

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 32 (1933)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LA TRANSFORMATION  $w = \frac{1}{\sqrt{Az^2 + Bz + C}}$   
**Autor:** Michel, W.  
**Kapitel:** IV. — Les points fixes de la transformation (2).  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-25333>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 18.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

représenté graphiquement par les courbes C ( $R = 16/15$ ) et C ( $R = 4/3$ ) de la figure 8.

Dans le plan des  $\omega$ , les rayons vecteurs sont perpendiculaires aux cercles concentriques. En vertu de la conformité de la transformation (2), le faisceau d'hyperboles équilatères (19), forme avec le faisceau de courbes confocales de Cassini de l'équation (22), un système de trajectoires orthogonales.

#### IV. — LES POINTS FIXES DE LA TRANSFORMATION (2).

La transformation (2) peut encore être envisagée d'un autre point de vue. Nous la considérons maintenant comme une transformation de figures dans le même plan. Un point de la position initiale  $z$ , occupera dans le même plan, après la transformation, une position  $z'$  identique, par rapport au système de coordonnées de ce plan, à celle qu'occuperait son image, par rapport au système de coordonnées dans le plan des  $\omega$ . Nous nous proposons de déterminer quels sont les points dont la position ne varie pas. Il est nécessaire que l'on ait :

$$z^2 = \frac{1}{z^2 - 1}.$$

L'équation (a)  $z^4 - z^2 - 1 = 0$  doit être satisfaite pour tout point fixe. Les quatre racines de (a) sont

$$\begin{aligned} \zeta_1 = + z_1 &= \sqrt{\frac{\sqrt{5} + 1}{2}}, & \zeta_3 = + z_2 &= + i \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}}, \\ \zeta_2 = - z_1 &= - \sqrt{\frac{\sqrt{5} + 1}{2}}, & \zeta_4 = - z_2 &= - i \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}}. \end{aligned} \quad (b)$$

Les deux points  $z = \zeta_1$ ,  $z = \zeta_2$  sont les points fixes de la transformation (2), car ils sont réels, et d'après ce qui précède, nous savons que le segment de l'axe réel positif, compris entre  $+1$  et  $+\infty$ , a pour image l'axe réel positif tout entier, et que le segment de l'axe réel négatif, compris entre  $-1$  et  $-\infty$ , a pour image l'axe réel négatif tout entier également.

Les deux points  $z = \zeta_3$ ,  $z = \zeta_4$ , situés sur l'axe imaginaire,

ne sont pas des points fixes; (2) transforme le demi plan supérieur en demi plan inférieur et inversement. Les points de l'axe imaginaire ne peuvent pas conserver leur position. Il est facile de voir que pour  $z = \zeta_3$  on a  $w = \zeta_4$  et pour  $z = \zeta_4$  on a  $w = \zeta_3$ .

Elevons la fonction (2) au carré

$$w^2 = \frac{1}{z^2 - 1} \quad (2a)$$

Nous pouvons lui donner une autre forme en introduisant les valeurs  $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$ . Posons d'abord

$$\frac{(w - \zeta_1)(w - \zeta_2)}{(w - \zeta_3)(w - \zeta_4)} = f(z) \frac{(z - \zeta_1)(z - \zeta_2)}{(z - \zeta_3)(z - \zeta_4)}.$$

Si l'on substitue à  $w^2$  sa valeur tirée de l'équation (2a), on a

$$f(z) = \frac{z^2}{\frac{z^2}{2}}.$$

Si nous donnons à l'égalité (2) la signification d'une transformation de figure dans le plan des  $z$ , il faut poser  $w = Z$  et nous avons

$$\frac{(Z - z_1)(Z + z_1)}{(Z - z_2)(Z + z_2)} = \frac{z^2}{\frac{z^2}{2}} \cdot \frac{(z - z_1)(z + z_1)}{(z - z_2)(z + z_2)}. \quad (2b)$$

Afin que le déplacement des points du plan des  $z$ , de leur position initiale à leur position finale, s'effectue de manière continue, nous introduisons une fonction continue du temps  $F(t)$ , telle que l'on ait

$$\frac{(Z - z_1)(Z + z_1)}{(Z - z_2)(Z + z_2)} = F(t) \frac{(z - z_1)(z + z_1)}{(z - z_2)(z + z_2)}. \quad (c)$$

Il s'agit de déterminer cette fonction. Nous la soumettons aux conditions suivantes.

$F(0) = 1$ , cette valeur correspond à la position initiale.

$F(1) = \frac{z^2}{\frac{z^2}{2}}$ ; cette valeur correspond à la position finale.

Considérons un point fixe quelconque  $z_0$  du plan des  $z$ . Les

points mobiles passent par celui-ci avec une vitesse facile à déterminer.

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{(z_0^2 - z_1^2)(z_0^2 - z_2^2)}{2z_0(z_1^2 - z_2^2)} \cdot \frac{F'(t)}{F(t)}.$$

Faisons encore l'hypothèse que la vitesse  $\frac{dZ}{dt}$ , dont sont animés les points mobiles en  $z_0$ , ne varie pas avec le temps. Il est nécessaire et suffisant de poser

$$\frac{F'(t)}{F(t)} = \log k \quad \text{ou} \quad F(t) = ck^t.$$

Nous avons

$$F(o) = c = 1; \quad F(1) = k = \frac{z_1^2}{z_2^2};$$

donc

$$F(t) = \left(\frac{z_1^2}{z_2^2}\right)^t = \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^t e^{(\pi + 2k\pi)it} \quad k = 0, \pm 1 \dots$$

L'expression analytique du mouvement continu des points du plan des  $z$ , de leur position initiale à leur position finale, est alors l'équation

$$\frac{Z^2 - z_1^2}{Z^2 - z_2^2} = \left(\frac{z_1^2}{z_2^2}\right)^t \cdot \frac{z_1^2 - z_1^2}{z_2^2 - z_2^2}, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (23)$$

En tout point fixe  $z_0$  du plan des  $z$ , l'expression

$$\frac{z_0^2 - z_1^2}{z_0^2 - z_2^2} = \rho_0 e^{\varepsilon_0 i}$$

prend une valeur déterminée. En posant  $Z = X + Yi$  l'équation (23) devient

$$\frac{X^2 - Y^2 - z_1^2 + 2XYi}{X^2 - Y^2 - z_2^2 + 2XYi} = \rho_0 \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^t e^{\varepsilon_0 i + (2k+1)\pi it}.$$

L'équation de la trajectoire du point  $z$  est alors, en séparant le réel de l'imaginaire:

$$\frac{(X^2 + Y^2)^2 - (X^2 - Y^2) - 1}{(X^2 + Y^2)^2 - 2z_2^2(X^2 - Y^2) + z_2^4} = \rho_0 \left( \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^t \cos(\varphi_0 + (2k + 1)\pi t),$$

$$\frac{2\sqrt{5}XY}{(X^2 + Y^2)^2 - 2z_2^2(X^2 - Y^2) + z_2^4} = \rho_0 \left( \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^t \sin(\varphi_0 + (2 + 1)\pi t).$$

(24)

Nous avons là une courbe transcendante dont nous n'aborderons pas la discussion.

Reste à savoir s'il existe un système de courbes, qui est lui-

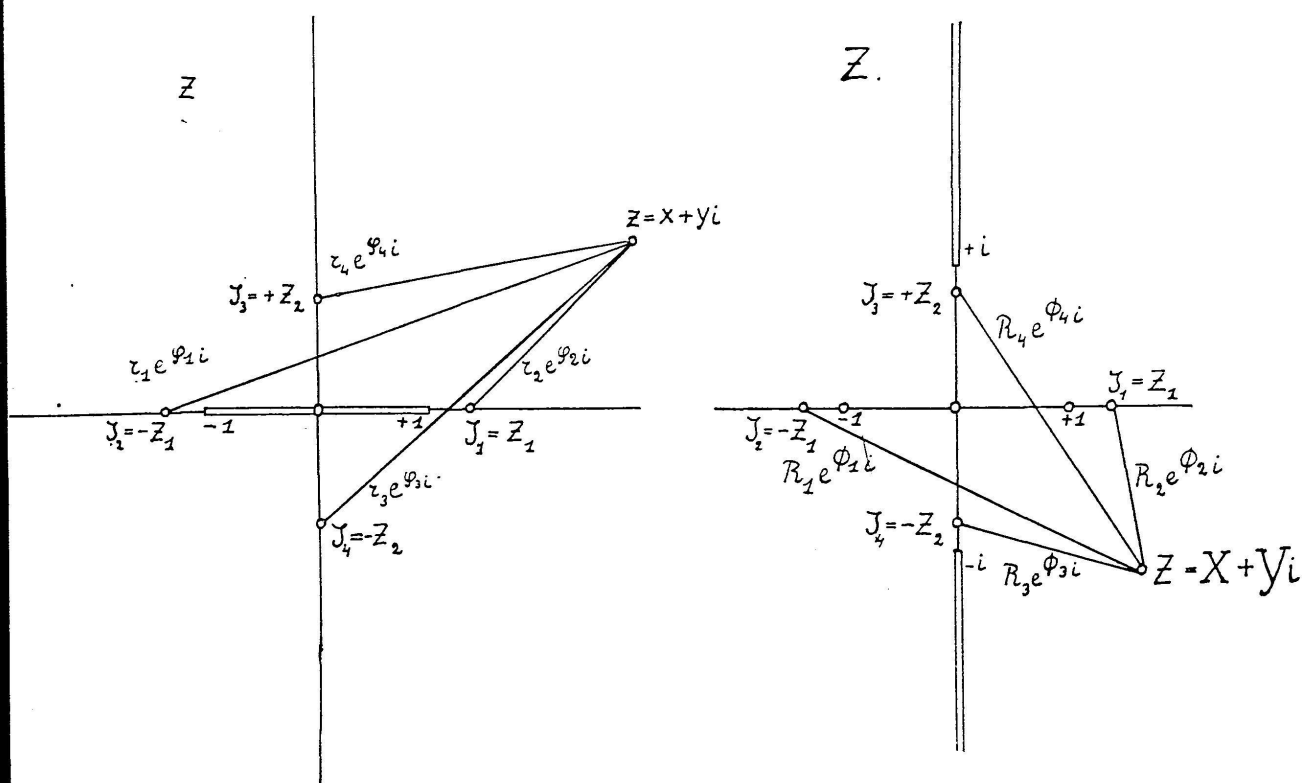


Fig. 9.

même son image dans la transformation (2). Un tel système existe en effet. Nous posons d'après la fig. 9

$$z + z_1 = r_1 e^{\varphi_1 i} \quad z - z_1 = r_2 e^{\varphi_2 i} \quad z + z_2 = r_3 e^{\varphi_3 i} \quad z - z_2 = r_4 e^{\varphi_4 i}$$

$$Z + z_1 = R_1 e^{\Phi_1 i} \quad Z - z_1 = R_2 e^{\Phi_2 i} \quad Z + z_2 = R_3 e^{\Phi_3 i} \quad Z - z_2 = R_4 e^{\Phi_4 i}$$

L'équation (2b) devient

$$\frac{R_1 \cdot R_2}{R_3 \cdot R_4} e^{i(\Phi_1 + \Phi_2 - \Phi_3 - \Phi_4)} = - \frac{z_1^2}{z_2^2} \cdot \frac{r_1 \cdot r_2}{r_3 \cdot r_4} e^{i(\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4 + (2k+1)\pi)} \quad (25)$$

Les valeurs absolues doivent être égales, on a

$$\frac{R_1 \cdot R_2}{R_3 \cdot R_4} = - \frac{z_1^2}{z_2^2} \cdot \frac{r_1 \cdot r_2}{r_3 \cdot r_4} . \quad (d)$$

Si un point  $z$  se déplace de telle sorte que l'on ait

$$\frac{r_1 \cdot r_2}{r_3 \cdot r_4} = K , \quad (e)$$

son image  $Z$  se déplacera sur une courbe, de telle sorte que l'on aura

$$\frac{R_1 \cdot R_2}{R_3 \cdot R_4} = - \frac{z_1^2}{z_2^2} K = K' . \quad (f)$$

D'après la fig. 9 nous avons

$$\begin{aligned} r_1^2 &= (x + z_1)^2 + y^2 & R_1^2 &= (X + z_1)^2 + Y^2 \\ r_2^2 &= (x - z_1)^2 + y^2 & R_2^2 &= (X - z_1)^2 + Y^2 \\ r_3^2 &= (y + |z_2|)^2 + x^2 & R_3^2 &= (Y + |z_2|)^2 + X^2 \\ r_4^2 &= (y - |z_2|)^2 + x^2 & R_4^2 &= (Y - |z_2|)^2 + X^2. \end{aligned} \quad (g)$$

En introduisant les relations (g) dans l'équation (e), on a

$$(x^2 + y^2)^2 - 2 \frac{z_1^2 - K^2 z_2^2}{1 - K^2} (x^2 - y^2) = \frac{K^2 z_2^4 - z_1^4}{1 - K^2} . \quad (26)$$

Nous avons là de nouveau l'équation d'une courbe de Cassini avec

$$c^2 = \frac{z_1^2 - K^2 z_2^2}{1 - K^2} , \quad q^2 = \frac{\sqrt{5} \cdot K}{|1 - K^2|} .$$

$c^2$  peut aussi être négatif, dans ce cas, les foyers sont sur l'axe des  $y$ . D'après l'équation (e),  $K$  doit être positif. Si  $K$  prend

doutes les valeurs de  $O$  à l'infini, on a un faisceau de courbes de Cassini qui couvre complètement le plan des  $z$ ; l'équation (26) indique qu'en chaque point  $z = x + yi$  passe une courbe du

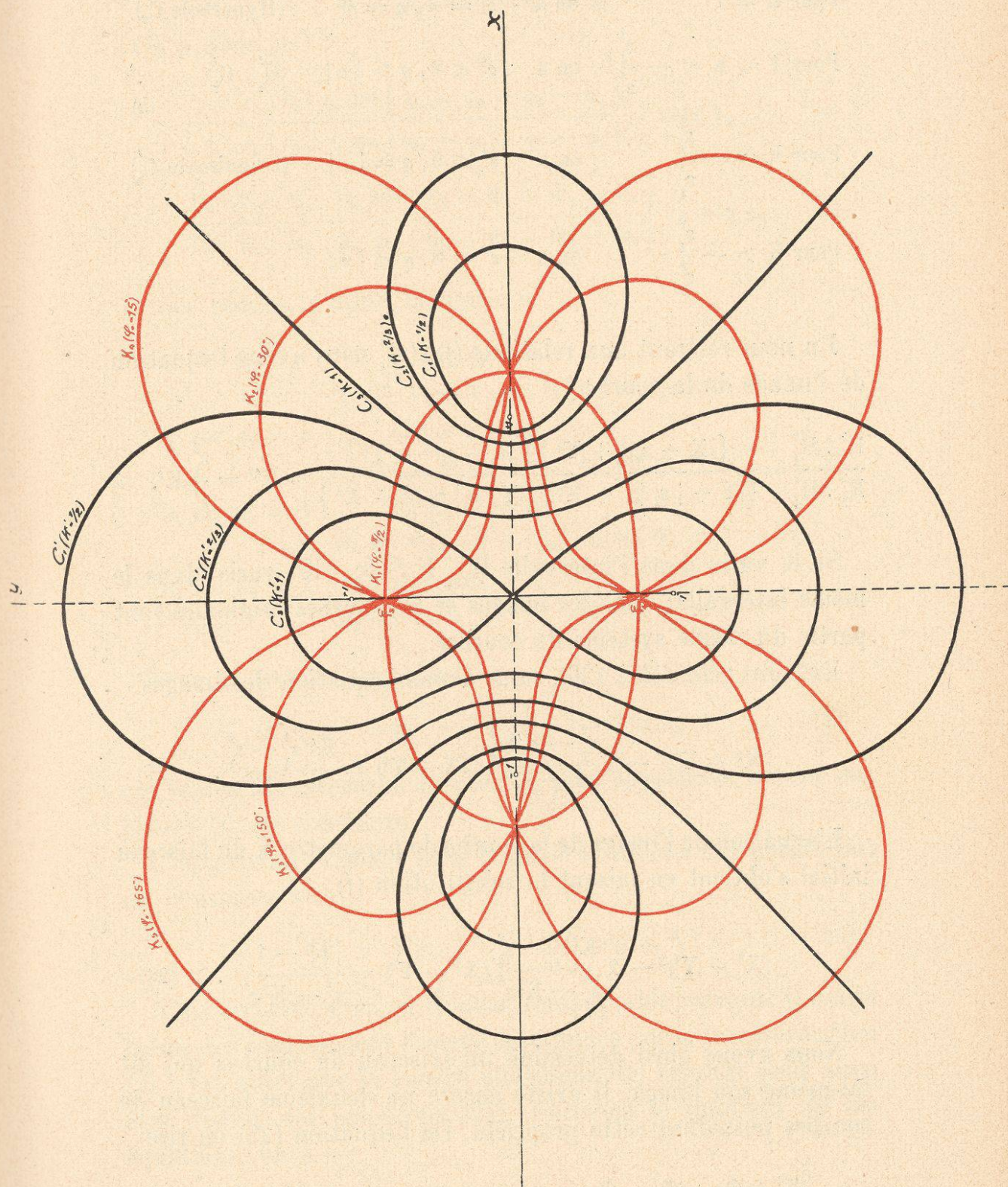


Fig. 10.

faisceau. Dans le tableau suivant, nous indiquons l'allure des courbes correspondant aux différents intervalles que parcourt  $K$ .

Pour $0 \leq K < 1$	on a $c^2 > 0, q < c$	(Fig. 10 : $C_1, C_2$ )
Pour $K = 1$	on a $c^2 = \infty, q = \infty$	(Hyperbole $C_3$ )
Pour $1 < K < -\frac{z_1^2}{z_2^2}$	on a $c^2 < 0, q >  c $	( $C'_1, C'_2$ )
Pour $K = -\frac{z_1^2}{z_2^2}$	on a $c^2 < 0, q =  c $	(Lemniscate $C'_3$ )
Pour $K > -\frac{z_1^2}{z_2^2}$	on a $c^2 < 0, q <  c $	

(h)

En nous référant aux relations (f), (g), nous avons l'équation de l'image de la courbe

$$\frac{R_1^2 \cdot R_2^2}{R_3^2 \cdot R_4^2} = \frac{\{(X + z_1)^2 + Y^2\} \{(X - z_1)^2 + Y^2\}}{\{(Y + |z_2|)^2 + X^2\} \{(Y - |z_2|)^2 + X^2\}} = K'^2 = \frac{z_1^4}{z_2^4} K^2. \quad (i)$$

Si  $K$  varie dans l'intervalle  $0 \leq K < \infty$ ,  $K'$  varie dans le même intervalle; donc les images et les courbes originales font partie du même système de courbes.

En nous référant à (26), nous avons l'équation des images

$$(X^2 + Y^2)^2 - 2 \frac{z_1^2 - K'^2 z_2^2}{1 - K'^2} (X^2 - Y^2) = \frac{K'^2 z_2^4 - z_1^4}{1 - K'^2}. \quad (27)$$

L'équation de l'image de la courbe de paramètre  $K$  du faisceau initial s'obtient en faisant la substitution (f)

$$(X^2 + Y^2)^2 - 2 \frac{K^2 z_1^2 - z_2^2}{z_2^4 - K^2 z_1^4} (X^2 - Y^2) = \frac{K^2 - 1}{z_2^4 - K^2 z_1^4}. \quad (28)$$

Nous avons ainsi déterminé un faisceau de courbes qui est lui-même son image. Il existe encore un deuxième faisceau de courbes possédant cette propriété. De l'équation (25) on tire

$$\Phi_1 + \Phi_2 - \Phi_3 - \Phi_4 = \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4 + (2k + 1)\pi. \quad (k)$$

Si un point  $z$  se déplace de telle sorte que l'on ait

$$\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4 + (2k + 1)\pi = \varphi_0, \quad (l)$$

son image  $Z$  se déplace de telle sorte que l'on ait

$$\Phi_1 + \Phi_2 - \Phi_3 - \Phi_4 = \varphi_0. \quad (m)$$

On a donc

$$\frac{r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_4 \cos \{ \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4 \}}{r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_4 \sin \{ \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4 \}} = \cotg \varphi_0, \quad (n)$$

$$\frac{R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 \cdot R_4 \cos \{ \Phi_1 + \Phi_2 - \Phi_3 - \Phi_4 \}}{R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 \cdot R_4 \sin \{ \Phi_1 + \Phi_2 - \Phi_3 - \Phi_4 \}} = \cotg \varphi_0. \quad (o)$$

Nous posons, d'après la figure 9

$$\begin{aligned} r_1 \sin \varphi_1 &= y & r_2 \sin \varphi_2 &= y \\ r_3 \sin \varphi_3 &= y + |z_2| & r_4 \sin \varphi_4 &= y - |z_2| \\ r_1 \cos \varphi_1 &= x + z_1 & r_2 \cos \varphi_2 &= x - z_1 \\ r_3 \cos \varphi_3 &= x & r_4 \cos \varphi_4 &= x \\ R_1 \sin \Phi_1 &= Y & R_2 \sin \Phi_2 &= Y \\ R_3 \sin \Phi_3 &= Y + |z_2| & R_4 \sin \Phi_4 &= Y - |z_2| \\ R_1 \cos \Phi_1 &= X + z_1 & R_2 \cos \Phi_2 &= X - z_1 \\ R_3 \cos \Phi_3 &= X & R_4 \cos \Phi_4 &= X. \end{aligned} \quad (p)$$

Nous en tirons l'équation

$$(x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2) - 2\sqrt{5} \cotg \varphi_0 xy = 1 \quad (29)$$

qui représente la courbe du point  $z$ , pour laquelle la somme des phases (l) est constante.

L'équation de l'image pour laquelle la somme des phases (m) est constante sera

$$(X^2 + Y^2)^2 - (X^2 - Y^2) - 2\sqrt{5} \cotg \varphi_0 XY = 1. \quad (30)$$

Nous arrivons ainsi au résultat remarquable suivant: il existe même des courbes dont l'image déterminée par la transformation (2) n'est autre que la courbe elle-même. Ce résultat peut aussi être déduit des équations (24). Formons le quotient de ces équations, on a

$$(X^2 + Y^2)^2 - (X^2 - Y^2) - 2\sqrt{5} XY \cotg \{ \varphi_0 + (2k + 1)\pi \} = 1.$$

Dans sa position initiale  $t = 0$ , le point  $Z = z = x + yi$  est sur la courbe

$$(x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2) - 2\sqrt{5} \cotg \varphi_0 xy = 1$$

qui est identique à la courbe déterminée par l'équation (29). Dans la position finale  $t = 1$ , le point  $Z = X + Yi$  est sur la courbe

$$(X^2 + Y^2)^2 - (X^2 - Y^2) - 2\sqrt{5} \cotg \varphi_0 XY = 1.$$

Cette courbe est identique à celle donnée par l'équation (30). Le point  $Z$  est alors dans sa position initiale et dans sa position finale sur la même courbe.

Si  $\varphi_0$  varie dans l'intervalle

$$k \frac{\pi}{2} \leq \varphi_0 \leq (k + 1) \frac{\pi}{2},$$

puis dans l'intervalle

$$(k + 1) \frac{\pi}{2} \leq \varphi_0 \leq (k + 2) \frac{\pi}{2},$$

les deux faisceaux de courbes sont symétriques, respectivement par rapport à l'axe des  $X$  et à l'axe des  $Y$ . Les équations (29) et (30) indiquent en outre que toutes les courbes passent par les quatre points  $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$ , car elles sont indépendamment de  $\varphi_0$  toujours satisfaites par

$$x = \pm z_1, y = 0 \quad \text{et} \quad x = 0, y = \pm |z_2|.$$

Si  $\cotg \varphi_0$  est positif, nous pouvons donner au système de coordonnées une rotation égale à l'angle aigu positif  $\alpha$ , déterminée par les équations

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + 5 \cotg^2 \varphi_0}}};$$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + 5 \cotg^2 \varphi_0}}}.$$

Dans le nouveau système de coordonnées  $(x', y')$ , les équations (29) et (30) deviennent

$$(x'^2 + y'^2)^2 - \sqrt{1 + 5 \cotg^2 \varphi_0} (x'^2 - y'^2) = 1. \quad (31)$$

Nous avons là de nouveau l'équation d'une courbe de Cassini.

En faisant varier  $\varphi_0$ , nous avons un faisceau de courbes qui couvrent tout le plan. A chaque point  $z = x + yi$  correspond, d'après l'équation (29), une valeur de  $\cotg \varphi_0$ , ce qui revient à dire qu'en chaque point du plan passe une courbe du faisceau. Nous avons représenté, sur la figure 10, les courbes correspondantes aux valeurs suivantes des paramètres:  $\varphi_0 = 15^\circ, 30^\circ, 90^\circ, 150^\circ, 165^\circ$ . Toutes ces courbes sont elles-mêmes leur image. Chaque point pris sur une de ces courbes va occuper un autre point de la même courbe, à l'exception des points  $\zeta_1, \zeta_2$ , qui restent immobiles.

Les deux systèmes de courbes de Cassini, des équations (26) et (29), forment de nouveau un système de trajectoires orthogonales. La preuve s'établit de la manière suivante. Nous déterminons l'image du plan des  $z$ , dans un plan intermédiaire, au moyen de la transformation

$$W = Re^{\Phi i} = \frac{r_1 \cdot r_2}{r_3 \cdot r_4} e^{\{ \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4 + (2k+1)\pi \} i}.$$

Or, au faisceau de courbes de Cassini de l'équation (26), pour lesquelles

$$\frac{r_1 \cdot r_2}{r_3 \cdot r_4} = R = \text{const.}$$

correspond dans le plan des  $W$ , un faisceau de cercles concentriques, dont le centre est à l'origine; et au faisceau de courbes de Cassini de l'équation (29), pour lesquelles

$$\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4 + (2k+1)\pi = \Phi = \text{const.}$$

correspond un faisceau de rayons vecteurs.

Les cercles et les rayons vecteurs du plan des  $W$  sont orthogonaux; en vertu de la conformité de la transformation, les deux faisceaux de courbes de Cassini forment également un système de trajectoires orthogonales (fig. 10).