Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 32 (1933)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA TRANSFORMATION $w = \frac{1}{\sqrt{Az^2 + Bz + C}}$

Autor: Michel, W.

Kapitel: I. — Introduction.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-25333

et, d'une manière analogue, nous trouverions l'autre

$$4\{t_2\}\{t_4\} = \{a\}\{c\}.$$

Alors

$$\{a\}\{b\}\{c\}\{d\} = 16\{t_1\}\{t_2\}\{t_3\}\{t_4\}$$

et, en définitive,

$$S^2 = \{t_1\}\{t_2\}\{t_3\}\{t_4\}.$$

Catanzaro, juillet 1932.

LA TRANSFORMATION $w = \dfrac{1}{\sqrt{Az^2 + Bz + C}}$

PAR

W. MICHEL (Berne).

I. — INTRODUCTION.

Toute fonction de deux variables complexes de la forme

$$w = \frac{1}{\sqrt{Az^2 + Bz + C}} \tag{1}$$

peut être mise sous la forme

$$w = \frac{1}{\sqrt{z^2 - 1}} \tag{2}$$

par les transformations homothétiques des plans des z et des w

$$z = \frac{Dz' - B}{2A}, \qquad w = \frac{2\sqrt{A}}{D} w',$$

où nous supposons $D = \sqrt{B^2 - 4AC} \neq 0$.

Le caractère de la représentation d'une fonction n'est pas modifié par une transformation homothétique. Nous pouvons donc nous borner à étudier la formule (2), qui est plus simple à traiter que la formule (1).

II. — La surface de Riemann pour $w = \frac{1}{\sqrt{z^2 - 1}}$.

w ne prend qu'une seule valeur aux points $z_1 = +1$, $z_2 = -1$, $z_3 = \infty$ et à ces points correspondent respectivement les points $w_1 = w_2 = \infty$, $w_3 = 0$ dans le plan des w. Pour tout autre point du plan des z, w prend deux valeurs, égales en valeur absolue, mais de signes contraires.

Considérons le plan des z comme étant constitué par deux plans infiniment rapprochés l'un de l'autre. En deux points opposés, la fonction w prendra deux valeurs ne différant que par le signe. Aux points z_1, z_2, z_3, les deux valeurs de la fonction sont égales. Ce sont donc des points de ramification de la fonction. Reste à savoir si le plan des w est lui aussi composé de deux surfaces.

Formons la fonction inverse

$$z = \frac{\sqrt{w^2 + 1}}{w} = \frac{\sqrt{(w + i)(w - i)}}{w} . \qquad (3)$$

Nous en déduisons immédiatement que le plan des w est aussi double. Ainsi le double plan des z est transformé par la fonction (2) en plan double des w. La transformation est conforme en chaque point où l'on a

$$\frac{dw}{dz} = \frac{-z}{\sqrt{(z^2 - 1)^3}} \neq 0 \quad \text{et} \quad \neq \infty ; \qquad (4)$$

on a

$$\frac{dw}{dz} = 0 \quad \text{pour} \quad z_3 = \infty , \quad z_4 = 0 ,$$

$$\frac{dw}{dz} = \infty \quad \text{pour} \quad z_1 = +1 , \quad z_2 = -1 .$$

Les deux surfaces de Riemann sont donc transformées de façon conforme l'une dans l'autre à l'exception des cinq couples de points

$$\begin{array}{lllll} z_1 = +1 , & z_2 = -1 , & z_3 = \infty , & z_4 = 0 , & z_5 = 0 , \\ w_1 = \infty . & w_2 = \infty . & w_3 = 0 . & w_4 = +i . & w_5 = -i . \end{array}$$