Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 32 (1933)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: QUELQUES EXPRESSIONS REMARQUABLES DE L'AIRE D'UN QUADRILATÈRE INSCRIPTIBLE DANS LE CERCLE

Autor: Toscano, Letterio

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-25332

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 03.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

QUELQUES EXPRESSIONS REMARQUABLES DE L'AIRE D'UN QUADRILATÈRE INSCRIPTIBLE DANS LE CERCLE [1]

PAR

Letterio TOSCANO (Messine).

---

1. Dans un mémoire intitulé *Metrische Relationen am Sehnenviereck* (Archiv der Mathematik und Physik, zweite Reihe, Siebenter Teil, 1889, pages 64-98) M. Otto ZIMMERMANN a calculé la valeur de quelques éléments remarquables du quadrilatère inscrit et a exprimé les côtés et l'aire du quadrilatère lui-même en fonction de ces éléments.

Nous démontrons ici trois autres expressions de l'aire du quadrilatère inscrit, expressions qui se dégagent naturellement des éléments introduits dans le mémoire en question, et nous donnons une démonstration plus simple d'une formule établie par M. Zimmermann.

2. Soit ABCD un quadrilatère inscriptible dans un cercle, et tel que AB > CD et BC > AD.

Si nous intervertissons les côtés BC et CD, en posant $BC' = CD$ et $C'D = BC$, nous obtenons le nouveau quadrilatère ABC'D, inscriptible dans le même cercle.

Posons

$$AB = a \,, \quad BC = b \,, \quad CD = c \,, \quad DA = d \,,$$
$$AC = f \,, \quad BD = g \,, \quad AC' = h \,,$$

---

[1] Traduit de l'italien par A. PITTET (Genève).

et appelons O, P, Q les trois points diagonaux obtenus par l'intersection des couples de droites (AC, BD), (AB, CD), (AD, BC).

Désignons par S l'aire du quadrilatère.

Posons en outre pour abréger:

$$(ab) = ab + cd\,, \qquad (ac) = ac + bd\,, \qquad (ad) = ad + bc\,,$$

$$\{a\} = -a + b + c + d\,, \qquad \{b\} = a - b + c + d\,,$$

$$\{c\} = a + b - c + d\,, \qquad \{d\} = a + b + c - d\,.$$

Nous avons les relations:

$$f^2 = \frac{(ac)\,(ad)}{(ab)}\,, \qquad g^2 = \frac{(ac)\,(ab)}{(ad)}\,, \qquad h^2 = \frac{(ab)\,(ad)}{(ac)}\,;$$

$$fg = (ac)\,, \qquad fh = (ad)\,, \qquad gh = (ab)\,;$$

$$\mathrm{AO} = \frac{ad}{h}\,, \qquad \mathrm{BO} = \frac{ab}{h}\,, \qquad \mathrm{CO} = \frac{bc}{h}\,, \qquad \mathrm{DO} = \frac{cd}{h}\,;$$

$$\mathrm{AP} = \frac{d\,(ad)}{b^2 - d^2}\,, \quad \mathrm{BP} = \frac{b\,(ab)}{b^2 - d^2}\,, \quad \mathrm{CP} = \frac{b\,(ad)}{b^2 - d^2}\,, \quad \mathrm{DP} = \frac{d\,(ab)}{b^2 - d^2}\,;$$

$$\mathrm{AQ} = \frac{a\,(ad)}{a^2 - c^2}\,, \quad \mathrm{BQ} = \frac{a\,(ab)}{a^2 - c^2}\,, \quad \mathrm{CQ} = \frac{c\,(ad)}{a^2 - c^2}\,, \quad \mathrm{DQ} = \frac{c\,(ab)}{a^2 - c^2}\,;$$

$$16\,\mathrm{S}^2 = \{a\}\{b\}\{c\}\{d\}\,;$$

$$\text{aire ABQ} = \frac{a^2\mathrm{S}}{a^2 - c^2}\,, \quad \text{aire BCP} = \frac{b^2\mathrm{S}}{b^2 - d^2}\,, \quad \text{aire CDQ} = \frac{c^2\mathrm{S}}{a^2 - c^2}\,,$$

$$\text{aire DAP} = \frac{d^2\mathrm{S}}{b^2 - d^2}\,.$$

3. Soient donnés

le cercle (1) exinscrit au triangle QAB,
» » (2) » » » PBC,
» » (3) inscrit dans le » QCD,
» » (4) » » » PAD.

Ils touchent les côtés AB, BC, CD, DA du quadrilatère respectivement aux points H_1, H_2, H_3, H_4.

Posons $\mathrm{AH}_1 = m_1'$, $\mathrm{H}_1\mathrm{B} = m_1$, $\mathrm{BH}_2 = m_2'$, $\mathrm{H}_2\mathrm{C} = m_2$,

$\mathrm{CH}_3 = m_3'$, $\mathrm{H}_3\mathrm{D} = m_3$, $\mathrm{DH}_4 = m_4'$, $\mathrm{H}_4\mathrm{A} = m_4$.

Nous avons les relations (α)

$$
\begin{aligned}
m_1 &= \frac{a\{b\}}{2(a+c)}, & m_1' &= \frac{a\{d\}}{2(a+c)}, \\
m_2 &= \frac{b\{c\}}{2(b+d)}, & m_2 &= \frac{b\{a\}}{2(b+d)}, \\
m_3 &= \frac{c\{d\}}{2(a+c)}, & m_3' &= \frac{c\{b\}}{2(a+c)}, \\
m_4 &= \frac{d\{a\}}{2(b+d)}, & m_4' &= \frac{d\{c\}}{2(b+d)}.
\end{aligned}
\qquad (\alpha)
$$

Ces mêmes cercles (1), (2), (3), (4) touchent les côtés QA, PB, QD, PA, respectivement aux points K_1, K_2, K_3, K_4; et en posant $QK_1 = \nu_1$, $PK_2 = \nu_2$, $QK_3 = \nu_3$, $PK_4 = \nu_4$, nous aurons les relations (β)

$$\nu_1 = \frac{a\{c\}}{2(a-c)}, \quad \nu_2 = \frac{b\{d\}}{2(b-d)}, \quad \nu_3 = \frac{c\{a\}}{2(a-c)}, \quad \nu_4 = \frac{d\{b\}}{2(b-d)}. \qquad (\beta)$$

Soient donnés:

le cercle (5) inscrit dans le triangle QAB,
» » (6) » » » » PCB,
» » (7) exinscrit au » QDC,
» » (8) » » » PAD.

Ils touchent les droites AD, AB, CB, CD respectivement aux points L_1, L_2, L_3, L_4; et en posant

$$QL_1 = \nu_1', \quad PL_2 = \nu_2', \quad QL_3 = \nu_3', \quad PL_4 = \nu_4',$$

nous aurons les relations (β')

$$\nu_1' = \frac{a\{a\}}{2(a-c)}, \quad \nu_2' = \frac{b\{b\}}{2(b-d)}, \quad \nu_3' = \frac{c\{c\}}{2(a-c)}, \quad \nu_4' = \frac{d\{d\}}{2(b-d)}. \qquad (\beta')$$

4. Les cercles exinscrits aux triangles QAB, PBC, QCD, PDA, ont pour rayon

$$r_1 = \frac{2aS}{(a+c)\{a\}}, \quad r_2 = \frac{2bS}{(b+d)\{b\}}, \quad r_3 = \frac{2cS}{(a+c)\{c\}},$$

$$r_4 = \frac{2dS}{(b+d)\{d\}}, \qquad (\gamma)$$

et les rayons des cercles inscrits dans les triangles QAB, PBC, QCD, PAD, sont

$$\rho_1 = \frac{2aS}{(a+c)\{c\}}, \quad \rho_2 = \frac{2bS}{(b+d)\{d\}}, \quad \rho_3 = \frac{2cS}{(a+c)\{a\}},$$

$$\rho_4 = \frac{2dS}{(b+d)\{b\}}. \qquad (\gamma')$$

5. A l'aide des segments m_1, m_2, m_3, m_4 d'abord, et ensuite à l'aide des segments m'_1, m'_2, m'_3, m'_4, M. Zimmermann donne deux expressions assez compliquées de l'aire du quadrilatère.

Par contre, en prenant ensemble les segments m_i et m'_i, (qui du reste s'obtiennent par les mêmes considérations appliquées aux cercles inscrits et exinscrits) nous obtenons aisément une formule simple et élégante.

En effet, on tire facilement des formules (α)

$$\{a\} = 2(m'_2 + m_4), \qquad \{b\} = 2(m_1 + m'_3),$$

$$\{c\} = 2(m_2 + m'_4), \qquad \{d\} = 2(m'_1 + m_3),$$

et par suite

$$\{a\}\{b\}\{c\}\{d\} = 16(m_1 + m'_3)(m'_1 + m_3)(m_2 + m'_4)(m'_2 + m_4),$$

$$S^2 = (m_1 + m'_3)(m'_1 + m_3)(m_2 + m'_4)(m'_2 + m_4).$$

D'une manière analogue, on déduit des formules (β) et (β')

$$\{a\} = 2(\nu'_1 - \nu_3), \qquad \{b\} = 2(\nu'_2 - \nu_4),$$

$$\{c\} = 2(\nu_1 - \nu'_3), \qquad \{d\} = 2(\nu_2 - \nu'_4),$$

$$\{a\}\{b\}\{c\}\{d\} = 16(\nu_1 - \nu'_3)(\nu'_1 - \nu_3)(\nu_2 - \nu'_4)(\nu'_2 - \nu_4),$$

et en définitive:

$$S^2 = (\nu_1 - \nu'_3)(\nu'_1 - \nu_3)(\nu_2 - \nu'_4)(\nu'_2 - \nu_4) \ .$$

On déduit encore des formules (γ) et (γ')

$$r_1 + \rho_3 = \frac{2S}{\{a\}}, \quad r_2 + \rho_4 = \frac{2S}{\{b\}}, \quad r_3 + \rho_1 = \frac{2S}{\{c\}}, \quad r_4 + \rho_2 = \frac{2S}{\{d\}},$$

et par suite

$$\frac{16S^4}{\{a\}\{b\}\{c\}\{d\}} = (r_1 + \rho_3)(\rho_1 + r_3)(r_2 + \rho_4)(\rho_2 + r_4) \ ,$$

$$S^2 = (r_1 + \rho_3)(\rho_1 + r_3)(r_2 + \rho_4)(\rho_2 + r_4) \ .$$

6. En désignant par t_1, t_2, t_3, t_4, les segments qui joignent le point diagonal O aux points milieux des côtés du quadrilatère, nous avons la formule

$$S^2 = \{t_1\}\{t_2\}\{t_3\}\{t_4\} \ .$$

Nous donnons maintenant, de cette formule, une démonstration plus simple que celle de M. Zimmermann. Par le théorème sur les médianes d'un triangle on a:

$$4t_1^2 = 2AO^2 + 2BO^2 - a^2 \ , \qquad 4t_2^2 = 2BO^2 + 2CO^2 - b^2 \ ,$$

$$4t_3^2 = 2CO^2 + 2DO^2 - c^2 \ , \qquad 4t_4^2 = 2DO^2 + 2AO^2 - d^2 \ ,$$

et, en tenant compte des relations fondamentales du nº 2, les égalités précédentes se transforment en:

$$4h^2t_1^2 = a^2(2b^2 + 2d^2 - h^2) \ , \qquad 4h^2t_2^2 = b^2(2a^2 + 2c^2 - h^2) \ ,$$

$$4h^2t_3^2 = c^2(2b^2 + 2d^2 - h^2) \ , \qquad 4h^2t_4^2 = d^2(2a^2 + 2c^2 - h^2) \ .$$

D'où il s'ensuit d'abord que

$$t_1 : t_3 = a : c \ , \qquad t_2 : t_4 = b : d \ ,$$

et ensuite que

$$\frac{t_1 + t_3}{t_1 - t_3} = \frac{a + c}{a - c}, \qquad \frac{t_2 + t_4}{t_2 - t_4} = \frac{b + d}{b - d} \ .$$

Ces dernières relations nous donnent

$$t_1 + t_3 = \lambda(a + c) \,, \quad (1) \qquad t_1 - t_3 = \lambda(a - c) \,, \quad (2)$$

$$t_2 + t_4 = \mu(b + d) \,, \quad (3) \qquad t_2 - t_4 = \mu(b - d) \,, \quad (4)$$

où

$$\lambda^2 = \frac{2b^2 + 2d^2 - h^2}{4h^2} \,, \qquad \mu^2 = \frac{2a^2 + 2c^2 - h^2}{4h^2} \,.$$

Effectuons maintenant les opérations (3) — (2), (1) — (4), (2) + (3), (1) + (4), et nous aurons

$$\begin{aligned}
\left\{t_1\right\} &= -\lambda(a - c) + \mu(b + d) \\
\left\{t_2\right\} &= \lambda(a + c) - \mu(b - d) \\
\left\{t_3\right\} &= \lambda(a - c) + \mu(b + d) \\
\left\{t_4\right\} &= \lambda(a + c) + \mu(b - d) \,.
\end{aligned}$$

Multiplions la première et la troisième de ces égalités:

$$4\left\{t_1\right\}\left\{t_3\right\} = 4\mu^2(b + d)^2 - 4\lambda^2(a - c)^2 =$$

$$= \frac{2a^2 + 2c^2 - h^2}{h^2}(b + d)^2 - \frac{2b^2 + 2d^2 - h^2}{h^2}(a - c)^2 =$$

$$= \frac{2}{h^2}\left[(a^2 + c^2)(b + d)^2 - (b^2 + d^2)(a - c)^2\right] + (a - c)^2 - (b - d)^2 =$$

$$= \frac{4}{h^2}\left[a^2bd + ab^2c + bc^2d + acd^2\right] + (a - c)^2 - (b - d)^2 =$$

$$= \frac{4}{h^2}(ab)(ad) + (a - c)^2 - (b - d)^2 \,;$$

mais $h^2 = \dfrac{(ab)(ad)}{(ac)}$ et par conséquent

$$4\left\{t_1\right\}\left\{t_3\right\} = 4(ac) + (a - c)^2 - (b - d)^2$$

$$= (a + c)^2 - (b - d)^2 = \left\{b\right\}\left\{d\right\} \,.$$

Nous aboutissons ainsi à la relation remarquable

$$4\left\{t_1\right\}\left\{t_3\right\} = \left\{b\right\}\left\{d\right\} \,,$$

et, d'une manière analogue, nous trouverions l'autre

$$4\{t_2\}\{t_4\} = \{a\}\{c\} .$$

Alors

$$\{a\}\{b\}\{c\}\{d\} = 16\{t_1\}\{t_2\}\{t_3\}\{t_4\}$$

et, en définitive,

$$S^2 = \{t_1\}\{t_2\}\{t_3\}\{t_4\} .$$

Catanzaro, juillet 1932.

LA TRANSFORMATION $w = \dfrac{1}{\sqrt{Az^2 + Bz + C}}$

PAR

W. Michel (Berne).

I. — Introduction.

Toute fonction de deux variables complexes de la forme

$$w = \frac{1}{\sqrt{Az^2 + Bz + C}} \tag{1}$$

peut être mise sous la forme

$$w = \frac{1}{\sqrt{z^2 - 1}} \tag{2}$$

par les transformations homothétiques des plans des z et des w

$$z = \frac{Dz' - B}{2A} , \qquad w = \frac{2\sqrt{A}}{D} w' ,$$

où nous supposons $D = \sqrt{B^2 - 4AC} \neq 0$.

Le caractère de la représentation d'une fonction n'est pas modifié par une transformation homothétique. Nous pouvons