

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 32 (1933)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR UNE FORMULE DE H. POINCARÉ RELATIVE A LA THÉORIE  
DES GROUPES DE S. LIE  
**Autor:** Schwerdtfeger, Hans  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-25331>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 25.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# SUR UNE FORMULE DE H. POINCARÉ RELATIVE A LA THÉORIE DES GROUPES DE S. LIE

PAR

Hans SCHWERDTFEGER (Bonn).

---

Dans le premier mémoire de POINCARÉ [1] sur les groupes continus, on trouve une formule d'une grande généralité, qui est fondamentale pour les considérations de son travail et des suivants [2]. La démonstration de cette formule, donnée par Poincaré ne fait pas voir, qu'il s'agit au fond d'une relation du calcul des matrices ou des substitutions linéaires. Cette démonstration est reproduite dans un fascicule de M. A. BUHL ([3], § 5)<sup>1</sup>, qui donne aussi les applications les plus importantes de la formule à la Théorie des groupes. Nous allons démontrer la formule dans toute sa généralité; Poincaré n'a pas traité en détail quelques cas spéciaux, mais essentiels pour les applications.

Nous commençons avec quelques remarques très simples sur le calcul des matrices, qui, sans difficulté, conduisent à la formule cherchée. Nous n'insistons pas sur les applications, que Poincaré a données de cette formule; mais nous montrerons comment elle relie les équations de la théorie de S. LIE et M. E. CARTAN d'une part, et les équations de Poincaré d'autre part. Nous terminons avec quelques remarques sur un travail de M. F. HAUSDORFF [4], qui peut remplacer certaines parties du mémoire de Poincaré.

Je remercie M. A. BUHL qui a bien voulu m'engager à la composition de ce travail.

---

<sup>1</sup> Nous nous rapportons à cette publication mieux accessible que le travail de Poincaré [1]. Voir l'analyse bibliographique dans la présente Revue, 32<sup>m</sup>e année, 1933, p. 284.

1. — *Notations et formules fondamentales.* — Soit  $A = (a_{\alpha\beta})$ , ( $\alpha, \beta = 1, \dots, n$ ), une matrice, c'est-à-dire un carré de  $n^2$  nombres complexes, qui sont les coefficients d'une transformation linéaire à  $n$  variables:

$$x'_\alpha = \sum_{\gamma=1}^n a_{\alpha\gamma} x_\gamma .$$

En désignant par  $x$  la colonne des  $x_\alpha$ , on peut remplacer cette équation par la suivante:

$$x' = Ax .$$

Ici, la matrice  $A$  est le symbole de la transformation linéaire. Par la succession de deux transformations  $A$  et  $B$  (d'abord  $A$ , et alors  $B$ ):

$$x'' = Bx' = BAx$$

on obtient une nouvelle transformation avec la matrice

$$BA = \left( \sum_{\gamma=1}^n b_{\alpha\gamma} a_{\gamma\beta} \right)$$

qui est le produit de  $A$  et  $B$ .

Si le déterminant  $|A| = s_n$  d'une matrice  $A$  n'est pas nul, on peut déterminer une matrice réciproque  $A^{-1}$  telle que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E ,$$

où  $E = (\delta_{\alpha\beta})$ ,  $\delta_{\alpha\beta} = 0$ , si  $\alpha \neq \beta$ ,  $\delta_{\alpha\alpha} = 1$ , est la matrice unité.

L'addition de deux matrices  $A, B$  est définie par

$$A + B = (a_{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta}) .$$

Cette opération est commutative et la multiplication est distributive avec l'addition; de plus, on a  $cA = (c \cdot a_{\alpha\beta})$ , si  $c$  est un nombre complexe.

Les définitions précédentes permettent de former la matrice  $g(A)$ , si  $g(z)$  est un polynome

$$g(z) = \sum_{k=0}^k c_k z^k ;$$

on a

$$g(A) = c_0 E + c_1 A + \dots + c_k A^k ,$$

où  $A$  est une matrice quelconque à  $n^2$  coefficients. Il n'est pas difficile de démontrer, qu'il y a toujours une matrice  $g(A)$ , si

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

est une série entière transcendante. On verra de plus qu'en général l'équation

$$g(X) = A$$

a une solution  $X = l_A(A)$ , où  $l_A(z)$  est un polynome de degré  $< n$ .  
Le polynome.

$$f(\zeta) = |\zeta E - A| = \zeta^n - s_1 \cdot \zeta^{n-1} + \dots + (-1)^n s_n$$

avec

$$s_1 = \sum_{\gamma=1}^n a_{\gamma\gamma} \quad (\text{trace de } A) .$$

est le *polynome caractéristique* de la matrice  $A$ . On appelle « racines de  $A$  » les  $n$  racines  $\zeta_1, \dots, \zeta_n$  de ce polynome.

On a

$$s_1 = \sum_{\gamma=1}^n \zeta_{\gamma} , \quad s_n = \prod_{\gamma=1}^n \zeta_{\gamma} .$$

Soient  $z_1, \dots, z_m$  les différentes des racines  $\zeta_z$ , et  $n_1, \dots, n_m$  leurs multiplicités. On aura

$$f(z) = \prod_{j=1}^m (z - z_j)^{n_j} .$$

Or si dans la transformation  $x' = Ax$  on remplace la colonne  $x$  par  $x = P^{-1}y$  avec  $|P| \neq 0$ , et  $x'$  par  $x' = P^{-1}y'$ , on aura

$$y' = PAP^{-1}y .$$

La matrice  $PAP^{-1}$  s'appelle une transformée de  $A$ . On voit que

$$|\zeta E - PAP^{-1}| = |\zeta E - A|$$

pour toutes les transformations  $P$ . Le polynome caractéristique, ses coefficients  $s_{\gamma}$  et ses racines  $\zeta_{\gamma}$  sont donc des invariants d'une

matrice  $A$ . C'est un théorème bien connu (voir [5], p. 20) que, pour toute matrice  $A$ , on peut déterminer une transformation  $P$  telle que

$$PAP^{-1} = \begin{bmatrix} \zeta_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \tilde{a}_{21} & \zeta_2 & 0 & \dots & 0 \\ \tilde{a}_{31} & \tilde{a}_{32} & \zeta_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{n1} & \tilde{a}_{n2} & \tilde{a}_{n3} & \dots & \zeta_n \end{bmatrix} .$$

On déduit de là que  $g(\zeta_x)$  sont les racines de  $g(A)$ , si  $g(\zeta)$  est une fonction entière de la variable  $\zeta$ .

Rappelons encore l'identité fondamentale de Cayley : Si  $f(\zeta)$  est le polynome caractéristique de  $A$ , on a

$$f(A) = (0) .$$

Cette formule est une conséquence de la remarque suivante, facile à démontrer : Soit  $p(\zeta)$  un polynome ; la condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait  $p(A) = (0)$  est, que la matrice

$$p(\zeta) (\zeta E - A)^{-1}$$

ait comme éléments des polynomes de la variable  $\zeta$ . Le polynome  $f(\zeta)$  remplit cette condition, car on a

$$(\zeta E - A)^{-1} = \left( \frac{f_{\alpha\beta}(\zeta)}{f(\zeta)} \right)$$

où  $f_{\alpha\beta}(\zeta)$  sont des polynomes de degré  $\leq n - 1$ .

En tenant compte de l'identité de Cayley on conclut que pour toute fonction holomorphe  $g(z)$  et pour chaque matrice  $A$  telle que la série  $g(A)$  existe, on peut déterminer un polynome  $g_A(z)$  de degré  $\leq n - 1$ , de telle manière que

$$g(A) = g_A(A) .$$

Le premier problème sera de trouver ce polynome  $g_A(z)$ .

2. — *Les fonctions des matrices.* — Au polynome  $f(z)$  on peut, d'après Frobenius [9], associer un système d'autres polynomes

$f_j(z)$  de la manière suivante: Si on a la décomposition en fractions simples de la fonction rationnelle  $\frac{1}{f(z)}$ , on peut obtenir aisément la représentation suivante

$$\frac{1}{f(z)} = \sum_{j=1}^m \frac{h_j(z)}{(z - z_j)^{n_j}},$$

où les  $h_j(z)$  sont des polynômes du degré  $n_j - 1$ . Les polynômes associés à  $f(z)$  sont définis par

$$f_i(z) = h_i(z) \frac{f(z)}{(z - z_i)^{n_i}}, \quad (i = 1, \dots, m).$$

Les  $z_i$  sont les racines différentes de l'équation  $f(z) = 0$ . Ces polynômes  $f_i(z)$  satisfont aux relations

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^m f_j(z) = 1 \\ f_j(z) \equiv 0 \pmod{(z - z_i)^{n_i}}, \quad (i \neq j), \\ f_j(z) \equiv 1 \pmod{(z - z_j)^{n_j}}, \\ f_i(z) f_j(z) \equiv \delta_{ij} f_j(z) \pmod{f(z)} \end{array} \right. \quad (1)$$

d'où <sup>1</sup>

$$f_j(z_i) = \delta_{ij}, \quad f_j'(z_i) = 0, \dots, \quad f_j^{(n_j-1)}(z_i) = 0 \quad (2)$$

pour  $i, j = 1, \dots, m$ .

Soit maintenant  $g(z)$  une fonction donnée. On cherche un polynôme  $g_A(z)$  ayant les propriétés suivantes: Pour les  $m$  racines  $z_j$  on a les égalités:

$$\begin{aligned} g_A(z_i) &= g(z_i), \\ g_A'(z_i) &= g'(z_i), \\ &\dots \dots \dots, \\ g_A^{(n_i-1)}(z_i) &= g^{(n_i-1)}(z_i). \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Nous posons  $g^{(v)}(z_j) = \left( \frac{d^v g(z)}{dz^v} \right)_{z=z_j}$ .

Pour  $m = n$ ,  $n_i = 1$  le polynome cherché est celui de Lagrange, et si  $m = 1$ ,  $n_1 = n$ , on obtient la formule de Taylor, dépourvue du reste d'ordre  $n$ . En général on aura

$$g_A(z) = \sum_{j=1}^m f_j(z) \sum_{\nu=0}^{n_j-1} \frac{1}{\nu!} g^{(\nu)}(z_j) (z - z_j)^\nu . \quad (3)$$

C'est une conséquence immédiate des formules (2). Généralement,  $g_A(z)$  n'est pas le polynome de moindre degré, qui répond à la question posée. Mais c'est là une question supplémentaire, que l'on peut négliger ici.

Or, soit  $g(z)$  une fonction entière; la fonction

$$g(z) - g_A(z)$$

aura les racines  $z_j$  avec des multiplicités  $\geq n_j$ ; il existe donc une fonction entière  $h(z)$  telle que

$$g(z) - g_A(z) = f(z) h(z) .$$

En vertu de l'identité de Cayley, on aura, pour chaque matrice  $A$ , avec le polynome caractéristique  $f(z)$ :

$$g(A) = g_A(A) . \quad (4)$$

On peut appliquer la formule (3) à la question suivante: Soit  $g(z)$  encore une fonction entière et  $A$  une matrice donnée. Déterminer une matrice  $X$  telle que

$$g(X) = A . \quad (5)$$

Soit  $l(z)$  une branche de la fonction inverse de  $g(z)$ , de façon que, pour tous les points  $z$  d'une région  $\Delta$ , on ait

$$g(l(z)) = z .$$

Nous supposons que les racines  $z_j$  de  $A$  sont des points intérieurs à  $\Delta$ . Si l'on pose

$$l_A(z) = \sum_{j=1}^m f_j(z) \sum_{\nu=0}^{n_j-1} \frac{1}{\nu!} l^{(\nu)}(z_j) (z - z_j)^\nu ,$$

on aura avec

$$X = l_A(A)$$

une solution de l'équation (5). On vérifie aisément, qu'il y a une fonction entière  $h(z)$  telle que

$$g(l_A(z)) - z = f(z) \cdot h(z) .$$

Particulièrement le problème de chercher une racine d'une équation algébrique en matrices sera réduit à un problème de l'algèbre ordinaire des équations numériques.

Voici encore un autre exemple: Soit  $g(z) = e^z$ ; on aura

$$l(z) = \lg z \quad \text{et si} \quad |A| \neq 0 :$$

$$\lg A = \sum_{j=1}^m \lg z_j \cdot f_j(A) + \sum_{j=1}^m f_j(A) \sum_{\nu=1}^{n_j-1} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu \cdot z_j^\nu} (A - z_j E)^\nu .$$

On verra, qu'il est convenable de définir la matrice  $g(A)$  par  $g_A(A)$ , si  $g(z)$  est une fonction analytique quelconque et si la matrice  $A$  suffit à certaines conditions, déterminées par la fonction  $g(z)$ .

3. — *La matrice résolvante.* — On peut donner encore une autre expression pour le polynôme  $g_A(z)$ , sans la restriction que  $g(z)$  soit une fonction entière de la variable  $z$ . Soit  $g(z)$  une fonction, holomorphe dans une région  $\Gamma$  de connexion simple du plan des  $z$ ; les points  $z_j$  sont supposés intérieurs à  $\Gamma$ .

Considérons le polynôme en  $z$ :

$$\varphi_A(z, \zeta) = \sum_{j=1}^m f_j(z) \sum_{\nu=0}^{n_j-1} \frac{(z - z_j)^\nu}{(\zeta - z_j)^{\nu+1}} . \quad (6)$$

Un calcul facile montre que

$$\varphi_A(z, \zeta) (\zeta - z) = 1 - f(z) \sum_{j=1}^m \frac{h_j(z)}{(\zeta - z_j)^{n_j}} . \quad (6')$$

<sup>1</sup> C'est le polynôme  $g_A(z)$ , formé pour la fonction  $g(z) = \frac{1}{\zeta - z}$ ; Poincaré ([3], p. 37) fait un raisonnement semblable.

En remplaçant la variable  $z$  par la matrice  $A$  on tire de (6') l'équation

$$\varphi_A(A, \zeta) (\zeta E - A) = E$$

ou

$$(\zeta E - A)^{-1} = \varphi_A(A, \zeta) . \quad (7)$$

D'autre part, en vertu de (6), on peut calculer l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int \varphi_A(z, \zeta) g(\zeta) d\zeta$$

le long d'un contour fermé, intérieur à  $\Gamma$ , enveloppant toutes les racines  $z_j$  de  $A$ . L'intégrale est égale à

$$\sum_{j=1}^m f_j(z) \frac{1}{2\pi i} \int_{(z_j)} g(\zeta) \sum_{\nu=0}^{n_j-1} \frac{(z - z_j)^\nu}{(\zeta - z_j)^{\nu+1}} d\zeta$$

c'est-à-dire à

$$\sum_{j=1}^m f_j(z) \sum_{\nu=0}^{n_j-1} \frac{1}{\nu!} g^{(\nu)}(z_j) (z - z_j)^\nu = g_A(z) .$$

On a donc pour chaque fonction  $g(z)$  holomorphe dans  $\Gamma$  et pour chaque matrice  $A$ , dont les racines  $z_j$  sont intérieures à  $\Gamma$ :

$$g(A) = g_A(A) = \frac{1}{2\pi i} \int \varphi_A(A, \zeta) g(\zeta) d\zeta . \quad (8)$$

De là la relation (7) donne

$$g(A) = \frac{1}{2\pi i} \int (\zeta E - A)^{-1} g(\zeta) d\zeta . \quad (8')$$

C'est au fond, la formule que Poincaré emploie; on pourrait l'appeler « formule de Cauchy » pour les fonctions des matrices  $A$ .

Si on écrit cette formule dans la forme primitive:

$$g_A(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \varphi_A(z, \zeta) g(\zeta) d\zeta , \quad (9)$$

on voit, qu'elle comprend beaucoup d'intégrales du type suivant:

Soit, par exemple,  $A$  une matrice à deux lignes et deux colonnes; on aura <sup>1</sup>, au lieu de (9):

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{z + \zeta - s_1}{\zeta^2 - s_1\zeta + s_2} g(\zeta) d\zeta$$

ce qui est égal à

$$\frac{g(\zeta_1) - g(\zeta_2)}{\zeta_1 - \zeta_2} z + \frac{\zeta_1 \cdot g(\zeta_2) - \zeta_2 g(\zeta_1)}{\zeta_1 - \zeta_2} .$$

Des formules, équivalentes à (8') sont démontrées aussi par M. L. FANTAPPIÉ avec les méthodes de la Théorie des fonctionnelles analytiques [6], qu'il a développée dans plusieurs grands Mémoires [7].

On pourrait dire encore quelques mots sur la structure des formules, que nous venons de développer; mais il suffit de citer les travaux de G. FROBENIUS [8], [9], de M. J. WELLSTEIN [10], de M. K. HENSEL [13] et la note de M. U. WEGNER [14], sur les matrices covariantes de Frobenius; dans les notations utilisées ici, ces matrices sont données par

$$A_j = f_j(A) , \quad (j = 1, \dots, m) .$$

D'après (1) leurs propriétés essentielles sont

$$\begin{aligned} A_j^2 &= A_j \\ A_i A_j &= A_j A_i = (0) , \quad \text{si } i \neq j \\ \sum_{j=1}^m A_j &= E . \end{aligned}$$

On déduit de (6) et (7), que ce sont les résidus de la résolvante  $(\zeta E - A)^{-1}$  dans les pôles  $z_j$  de cette fonction-matrice de  $\zeta$ . Ils ont beaucoup d'autres propriétés intéressantes, mais accessoires pour les considérations suivantes.

4. — *La formule de Poincaré.* — Soient  $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_r$  les  $r$  symboles de transformations infinitésimales, qui engendrent un groupe  $\mathbf{G}$  de Lie à  $r$  paramètres essentiels. La transformation

<sup>1</sup> Nous supposons  $m = 2$ .

infinitésimale la plus générale du groupe est le « produit scalaire »<sup>1</sup>:

$$\mathcal{C} = \sum_{\gamma=1}^r t_{\gamma} \mathcal{X}_{\gamma} = t\mathcal{X} .$$

Poincaré appelle  $\theta(\mathcal{C})$  une fonction de  $\mathcal{C}$  définie par

$$\theta(\mathcal{C}) = (\mathcal{V}\mathcal{C}) = \mathcal{V}\mathcal{C} - \mathcal{C}\mathcal{V} = \sum_{\alpha, \beta=1}^r b_{\alpha\beta} t_{\alpha} \mathcal{X}_{\beta} .$$

avec  $r^2$  constantes  $b_{\alpha\beta}$ .

L'opération  $\theta$  est linéaire dans  $\mathcal{C}$ . On peut itérer cette opération  $\theta$  un nombre quelconque de fois; cela conduit aux puissances  $\theta^k$  de  $\theta$ . Si  $\mathcal{V}$  est une opération infinitésimale du groupe  $\mathbf{G}$ , on a

$$\mathcal{V} = \nu\mathcal{X}$$

et

$$b_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma=1}^r c_{\gamma\beta}^{\alpha} \nu_{\gamma}$$

où  $c_{\gamma\beta}^{\alpha}$  sont les constantes de structure du groupe  $\mathbf{G}$ .

Soit

$$B_{\nu} = B = (b_{\alpha\beta})$$

la « matrice de Killing » de l'opération  $\mathcal{V}$ ; si elle appartient à  $\mathbf{G}$ , sa matrice est de la forme

$$B_{\nu} = \sum_{\gamma=1}^r \nu_{\gamma} C_{\gamma}$$

<sup>1</sup> Ici, nous faisons usage des notations du calcul des matrices générales; on peut multiplier une matrice  $t = (t_1, \dots, t_r)$  à une ligne avec une matrice

$$\mathcal{X} = \begin{bmatrix} \mathcal{X}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{X}_r \end{bmatrix}$$

à une colonne; le produit sera la « matrice »  $t\mathcal{X}$  à une ligne et une colonne. Le produit  $\mathcal{X}t$  n'est pas employé ici; ce serait une matrice à  $r$  lignes et  $r$  colonnes.

où

$$C_\gamma = \begin{bmatrix} c_{\gamma 1}^1 & c_{\gamma 2}^1 & \cdots & c_{\gamma r}^1 \\ c_{\gamma 1}^2 & c_{\gamma 2}^2 & \cdots & c_{\gamma r}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{\gamma 1}^r & c_{\gamma 2}^r & \cdots & c_{\gamma r}^r \end{bmatrix}.$$

Cela posé, on aura <sup>1</sup>

$$\theta^0(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G} = t\mathfrak{X}, \quad \theta(\mathfrak{G}) = tB\mathfrak{X}, \quad \theta^2(\mathfrak{G}) = tB^2\mathfrak{X}$$

et en général

$$\theta^k(\mathfrak{G}) = tB^k\mathfrak{X}.$$

Si  $g(z)$  est une fonction holomorphe dans une région  $\Gamma$ , contenant les racines de l'équation de Killing:

$$|\zeta E - B_v| \equiv f_B(\zeta) = 0,$$

on peut définir l'opération  $g(\theta)$  par

$$g(\theta)(\mathfrak{G}) = tg(B)\mathfrak{X}.$$

Et en vertu de la formule (8') on a

$$g(\theta)(\mathfrak{G}) = t \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{(c)} (\zeta E - B_v)^{-1} g(\zeta) d\zeta \right) \mathfrak{X}, \quad (10)$$

la courbe  $C$  d'intégration étant un contour fermé, situé dans la région  $\Gamma$  et entourant toutes les racines de la matrice  $B_v$ . (Voir BUHL [3], Chap. II, (26).)

En vérité, cette formule est plus générale que la formule de Poincaré. Ici, il n'y a pas de restrictions sur la multiplicité des racines de Killing; pour le cas des racines multiples, Poincaré n'a donné que des indications incomplètes.

Dans son Mémoire [1], on trouve des applications de la formule (10), dont quelques-unes sont reproduites dans le fascicule de M. BUHL [3]. Nous ne reprenons pas ici ces considérations, mais nous allons les compléter par quelques remarques sur leur liaison avec la théorie de Lie et M. E. Cartan.

<sup>1</sup> Par exemple:

$$tB\mathfrak{X} = \sum_{\alpha, \beta=1}^r t_\alpha b_{\alpha\beta} \mathfrak{X}_\beta.$$

5. — *Sur les relations entre les deux théories de Lie-Cartan et de Poincaré.* — La formule (10) a un intérêt double: elle a conduit Poincaré à quelques résultats assez remarquables, dont le plus essentiel est la résolution du problème de Campbell. Mais d'autre part, on peut dire que les formules des deux théories, de Lie et M. Cartan [11] et de Poincaré sont liées par la formule (10). Nous allons démontrer cette proposition en partant des équations de Lie et Cartan; la formule (10) donnera les équations correspondantes de la théorie de Poincaré.

Soient encore  $(t_1, \dots, t_r) = t$  les paramètres canoniques<sup>1</sup> du groupe  $\mathbf{G}$ , engendré par les opérations infinitésimales  $\mathcal{X}_\alpha$ .

L'élément fini le plus général du groupe pourra être représenté par le symbole

$$e^{t\mathcal{X}} .$$

Le groupe adjoint du groupe donné est l'ensemble des transformations

$$e^{-v\mathcal{X}} e^{t\mathcal{X}} e^{v\mathcal{X}} = e^{t'\mathcal{X}} .$$

Cette équation exprime une relation linéaire entre les  $t_\alpha$  et  $t'_\alpha$ , qui sera représentée par

$$t' = t e^{B_v} ,$$

si  $B_v$  est la matrice de Killing associée à l'opération infinitésimale  $\mathcal{V} = v\mathcal{X}$ . La formule correspondante de Poincaré est

$$t' = t \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{(c)} (\zeta E - B_v)^{-1} e^{\zeta} d\zeta \right) ;$$

elle se déduit de la formule (10) en posant

$$g(z) = e^z .$$

Pour les coefficients des transformations infinitésimales d'un des groupes paramétriques du groupe  $\mathbf{G}$ , on a [11] l'expression suivante

$$\left( \omega_\alpha^3(v) \right) = \frac{e^{B_v} - 1}{B_v} . \tag{11}$$

<sup>1</sup> Ces paramètres sont caractérisés comme il suit: En paramètres  $t_\alpha$  canoniques, les sous-groupes à un paramètre sont additifs et donnés par des équations linéaires homogènes en  $t_\alpha$ . Ils sont définis à une substitution linéaire près. (Voir [11], p. 16.)

Ici, les  $\omega_\alpha^{\beta}(\varrho)$  sont définis comme il suit: Soit  $e^{v\mathcal{X}}$  une opération du groupe et  $e^{v'\mathcal{X}}$  une opération voisine à la première; on aura

$$e^{-v\mathcal{X}} \cdot e^{v'\mathcal{X}} = e^{\mathcal{X}\omega}$$

avec

$$\omega\mathcal{X} = \sum_{\gamma=1}^r \omega_\gamma \mathcal{X}_\gamma .$$

où les  $\omega_\alpha(\varrho)$  sont des formes de Pfaff

$$\omega_\alpha = \omega_\alpha(\varrho) = \sum_{\gamma=1}^r \omega_\alpha^\gamma(\varrho) d\varrho_\gamma ,$$

si  $\varrho'_\alpha = \varrho_\alpha + d\varrho_\alpha$ .

La formule de Poincaré correspondante à (11) peut être écrite dans la forme

$$\omega = \varrho \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{(c)} (\zeta E - B_\varrho)^{-1} \frac{e^\zeta - 1}{\zeta} d\zeta \right) , \quad (11')$$

où  $\omega$  est la ligne  $(\omega_1, \dots, \omega_r)$ . Il faut poser dans (10):

$$g(z) = \frac{e^z - 1}{z} .$$

Enfin quelques remarques sur le problème de Campbell. Dans la théorie de Lie-Cartan, ce problème est résolu, si on a intégré les équations

$$\omega_\alpha(\varpi) = \omega_\alpha(\varrho) . \quad (12)$$

avec les conditions initiales

$$\omega_\alpha(0) = u_\alpha .$$

Les conditions d'intégrabilité sont les équations de Maurer-Cartan (voir [11] ou [12]). En effet, les équations (12) ne dépendent que des constantes  $c_{\alpha\beta}^\gamma$  du groupe, car les coefficients des formes  $\omega_\alpha$  sont déterminés par (11) ou (11') et les fonctions

$$\omega_\alpha = \varphi_\alpha(u, \varrho) ,$$

définies par les équations (12), donnent la règle de composition de chaque groupe de Lie.

On peut donner les premiers termes des fonctions  $\varphi_\alpha(u, \nu)$ , comme l'a montré M. G. HERGLOTZ en 1931<sup>1</sup>, par une intégration directe des équations (12). Ces équations peuvent être mises sous la forme condensée

$$\omega(\varpi)\mathcal{X} = \omega(\nu)\mathcal{X},$$

et la solution de cette équation symbolique sera

$$\mathcal{W} = \mathcal{U} + \mathcal{V} + \frac{1}{2}(\mathcal{U}\mathcal{V}) + \frac{1}{12}([\mathcal{U} - \mathcal{V}](\mathcal{U}\mathcal{V})) + \frac{1}{24}((\mathcal{U}(\mathcal{U}\mathcal{V}))\mathcal{V}) + \dots \quad (13)$$

où

$$\mathcal{U} = u\mathcal{X}, \quad \mathcal{V} = \nu\mathcal{X}, \quad \mathcal{W} = \omega\mathcal{X}.$$

Cela posé, on aura

$$e^{\mathcal{U}}e^{\mathcal{V}} = e^{\mathcal{W}}.$$

C'est au fond la méthode, que F. SCHUR [15] a employée pour démontrer le troisième théorème fondamental de Lie. A l'égard des résultats plus généraux de M. Hausdorff nous nous contentons de ce résumé.

La formule (13) résout donc le problème de Campbell. On obtiendra la solution de Poincaré du même problème en appliquant la formule (10) au second membre de l'équation (13).

Au moyen de ces considérations, on peut mieux comprendre, il nous semble, la méthode assez difficile de Poincaré.

6. — *Les recherches de M. Hausdorff.* — Les idées de Campbell et de Poincaré sont encore généralisées et simplifiées par M. F. Hausdorff [4] dans un travail presque inconnu de 1906. Il résout le problème suivant, plus général que le problème de Campbell: Soit  $\mathbf{S}$  un système de  $r$  symboles  $x_1, \dots, x_r$  ayant les propriétés suivantes:

1° Il y a une addition commutative et associative:  $x_\alpha + x_\beta$ .

2° On peut multiplier les  $x_\alpha$  avec des nombres réels  $\rho$ :  $\rho x_\alpha = x_\alpha \rho$ .

<sup>1</sup> Cours de Göttingue (inédit).

3° Il y a une multiplication associative et distributive avec l'addition, mais, en général, on a

$$x_\beta x_\alpha \neq x_\alpha x_\beta .$$

4° Les symboles  $x_x$  sont indépendants l'un de l'autre.

On pourra former l'anneau  $\mathbf{R}(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{R}$  de tous les symboles abstraits, qui sont définis comme polynomes et séries de polynomes des  $x_x$ . Alors, si  $x$  et  $y$  sont deux symboles du système  $\mathbf{S}$ , on voit que

$$e^x \quad \text{et} \quad e^y$$

sont deux symboles de l'anneau  $\mathbf{R}$ . On cherche la fonction

$$z = z(x, y)$$

telle que

$$e^z = e^x e^y .$$

Alors aussi  $z$  est un élément de l'anneau  $\mathbf{R}$ .

Le théorème fondamental de M. Hausdorff dit que la fonction  $z(x, y)$  est une série infinie, dont les termes sont des fonctions de  $x, y$ , qu'on peut représenter au moyen de l'opération

$$(xy) = xy - yx$$

(voir [4], théorème B).

Cela posé, M. Hausdorff trouve par son calcul la formule

$$z = x + y + \frac{1}{2}(xy) + \frac{1}{12}([x - y](xy)) + \dots \quad (14)$$

qui est identique à la relation (13).

Avec cette formule on a une démonstration du troisième théorème fondamental de S. Lie; la seule difficulté est encore de prouver la convergence de la série (14). Au cas général des symboles arbitraires, il n'y a pas de problèmes de convergence. Mais si les symboles  $x_x$  sont des transformations infinitésimales, qui engendrent un groupe, il y a des relations entre eux, définies par les relations structurales de Lie:

$$(x_\alpha x_\beta) = \sum_{\gamma=1}^r c_{\alpha\beta}^\gamma x_\gamma ,$$

et les séries symboliques comprennent des séries numériques. Les paramètres canoniques sont les variables dans ces séries, du reste connues déjà longtemps par les travaux de F. SCHUR [15].

## INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

- [1] H. POINCARÉ, *Cambridge Phil. Soc. Transactions*, 18 (1900), pp. 220-255.
  - [2] — *Rendiconti Palermo*, 15 (1901), pp. 321-368; 25 (1908), pp. 81-130.
  - [3] A. BUHL, *Mém. d. Sc. Math.*, fasc. 62 (1934), chap. II, §§ 5-7.
  - [4] F. HAUSDORFF, *Leipziger Ber., Math.-Phys. Kl.* 58 (1906), pp. 19-48.
  - [5] A. WINTNER, *Spektraltheorie der unendlichen Matrizen* (1929), Leipzig (S. Hirzel).
  - [6] L. FANTAPPIÉ, *C. R.*, Paris, t. 186 (1928), pp. 619-621. *Jahresber. d. Deutschen Math.-Ver.*, Bd. 43 (1933), pp. 16-20.
  - [7] — *Mém. d. R. Acc. naz. d. Lincei* (6), vol. III, fasc. XI (1930).
  - [8] G. FROBENIUS, *Crelles Journal*, Bd. 86 (1879), § 6, pp. 60-61.
  - [9] G. FROBENIUS, *Sitzungsber. d. preuss. Akad.*, Berlin (1896), pp. 608-610.
  - [10] J. WELLSTEIN, *Archiv d. Math. u. Phys.* (3), Bd. 5 (1903), pp. 229-241.
  - [11] E. CARTAN, *Mém. d. Sc. Math.*, fasc. 42 (1930), Chap. II, §§ I-II.
  - [12] A. BUHL, *Mém. d. Sc. Math.*, fasc. 33 (1928), Chap. II, §§ 5, pp. 10-12.
  - [13] K. HENSEL, *Crelles Journal*, Bd. 127 (1904), § 1, pp. 122-128.
  - [14] U. WEGNER, *Monatshefte f. Math. u. Phys.*, Bd. 40, pp. 201-208.
  - [15] F. SCHUR, *Math. Ann.*, Bd. 41 (1893), pp. 509-538.
-