Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 32 (1933)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Buchbesprechung: Actualités scientifiques. — Fascicules gr. in-8°, avec figures et planches, se vendant séparément à prix divers. Hermann & Cie, Paris.

Autor: Buhl, A.

M. Kagan, auquel j'avais écrit pour le féliciter de la parution ci-dessus, me répond en me faisant part, en effet, d'un vaste projet. Comme je l'avais deviné, au moins partiellement, il s'agit bien de fonder, à Moscou, un vaste centre d'études concernant la Géométrie différentielle, en s'inspirant surtout de Ricci, Levi-Civita et Cartan. Naturellement, les géomètres moscovites comptent sur des appuis occidentaux. Celui de *L'Enseignement mathématique* leur est accordé avec grand enthousiasme.

A. Buhl (Toulouse).

Actualités scientifiques. — Fascicules gr. in-8°, avec figures et planches, se vendant séparément à prix divers. Hermann & Cie, Paris.

79. — Elie Cartan. *Les Espaces de Finsler* (Exposés de Géométrie. Direction E. Cartan. 42 pages. 1934. Prix: 12 francs). — Pour plus de clarté, je ferai d'abord remarquer que j'ai reçu et analysé ce fascicule après le numéro 80 dû à M. Delens et mentionné ci-dessous. Je ne répéterai donc point des choses déjà dites. Les deux exposés sont d'ailleurs assez différents, M. Cartan semblant plus se soucier de la structure analytique des choses que d'applications qu'il laisse cependant transparaître avec abondance.

Les Espaces finslériens sont certainement le plus grand triomphe, jusqu'ici connu, de la notion d'homogénéité. Certes, on apprend aux très jeunes élèves que les formules de la géométrie euclidienne doivent forcément être homogènes par rapport aux longueurs et l'on établit cela par des considérations métriques, en invoquant la nécessaire invariance de la formule par rapport à un changement d'unité de mesure. Mais, de là à constituer une géométrie générale dans laquelle ds serait simplement homogène en dx^i, il y avait un véritable abîme.

Les espaces de Riemann ont reçu un perfectionnement considérable lorsque M. Elie Cartan a su leur adjoindre la torsion. C'était une manière d'analyser la notion du parallélisme à distance si finement disséquée aussi par M. Tullio Levi-Civita. Nous avons maintenant quelque chose d'analogue avec les travaux de L. Berwald qui prolongent très conditionnellement ceux de P. Finsler mais en en montrant la portée exacte.

Les Espaces de Finsler sont à connexion euclidienne; on peut en faire la carte sur l'espace euclidien. Les vecteurs ont encore des différentielles absolues DX qui sont des dX pourvus d'un terme complémentaire. Le Calcul des variations intervient d'une manière fondamentale quant à une notion de transversalité analogue à la notion classique de perpendicularité. Il y a une métrique angulaire, en un point, d'accord, comme en géométrie euclidienne, avec le concept de longueur vectorielle. Au delà de considérations vectorielles, on trouve encore des tenseurs pourvus d'une dérivation covariante. C'est ici qu'on compare aisément les conceptions de M. Cartan avec celles de Berwald.

Les courbes et les surfaces, toujours analysables par éléments linéaires tangents, conservent, de ce fait, une théorie qui n'apparaît pas comme extrêmement éloignée de la théorie euclidienne et l'on peut se demander si la géométrie finslérienne n'est pas, par excellence, la géométrie sureuclidienne. Trouvera-t-on plus général encore ? Il est singulièrement imprudent de vouloir répondre à une question de ce genre mais, pour l'instant il semble bien qu'on ait profité, jusqu'à l'extrême, de la connexion euclidienne. Les théorèmes de Meusnier et d'Euler s'étendent; pour la courbure et la torsion géodésiques, des distinctions nouvelles s'imposent. Les identités de Bianchi, de la Géométrie de Riemann, se généralisent sans trop se défigurer et presque avec les mêmes jeux d'indices. C'est là, par exemple, qu'il y a de quoi dépasser largement la Théorie des groupes de Lie. Attendons, avec confiance, de brillantes applications physiques.

80. — P. Delens. *La Métrique angulaire des Espaces de Finsler et la Géométrie différentielle projective* (Exposés de Géométrie. Direction E. Cartan. 40 pages, 1934. Prix: 12 francs). — Ce fascicule me semble être d'une extrême importance. M. Delens l'a écrit avec l'esprit géométrique strictement adéquat à la définition du sujet, sans chercher à philosopher à côté ou au delà. Il a d'ailleurs partout pour guide les travaux de M. Elie Cartan qui n'a pas non plus l'habitude de se laisser entraîner hors de problèmes posés avec autant de précision que de généralité. Mais ici, où je ne dispose que de quelques lignes et où je ne puis guère reproduire de formules, je puis, en revanche, dire mon sentiment.

Il me semble que la théorie des Espaces de Finsler va comprendre à bref délai — si même la chose ne peut être considérée comme faite maintenant — d'une part, la théorie des Espaces de Riemann et les considérations gravifiques adéquates, d'autre part les considérations fondamentales de la Mécanique ondulatoire. Un espace de Finsler est défini par son

$$ds = \mathrm{F}(x^i, dx^i) = \mathrm{F}(x^i, p^i) \equiv \mathrm{F}(p^i)$$

avec F homogène du premier degré en p^i. L'inclusion du point de vue riemannien est évidente. En outre, l'homogénéité de F entraîne d'autres homogénéisations; il y a avantage à représenter des variétés ou des espaces par des équations $\Phi(x^i) = 1$ avec Φ homogène. De même les équations $\mathrm{F}(p^i) = 1$, construites à partir d'un ds, sont analogues à l'équation de Jacobi *homogénéisée*. De là à remplacer les p^i par divers symboles différentiels, toujours sous l'influence de groupes linéaires dont les manifestations les plus simples sont attachées aux opérations x^i, $\partial/\partial x^i$ et à la combinaison eulérienne $x^i \, \partial/\partial x^i$, il n'y a évidemment qu'un pas. A ce propos, l'auteur cite l'article *Fronts d'ondes et corpuscules* que j'ai publié dans *L'Enseignement mathématique* en 1932. Il fait d'ailleurs beaucoup d'autres citations concernant des travaux de Géométrie projective. Le fascicule est gros de grandes conséquences qu'on ne tardera sans doute pas à développer au point de vue physique.

112. — Sir Arthur Eddington. *Sur le Problème du Déterminisme.* Adapté de l'anglais par Eugène Néculcéa (Physique générale. Direction Paul Langevin. 26 pages. 1934. Prix: 8 francs).

Le fascicule 56 était déjà une adaptation de l'anglais due à M. Néculcéa. Nous devons maintenant, au même et sympathique traducteur, la possibilité de lire en français quelques pages de philosophie se rapportant à la question déterministe. Nous sommes de ceux qui croyons la question tranchée. Le déterminé, l'analytique, le temporel ne sauraient suffire à représenter toutes choses et tous états de conscience. La Science connaît maintenant le progrès de l'indéterminisme, du non-analytique, de l'extratemporel. La loi indéterministe, d'abord tolérée, a fini par vivre, rien qu'avec ses propres moyens, dans le domaine phénoménal malgré quelques lignes célèbres, dues à

Laplace, qui semblaient imposer à l'Univers un caractère analytique prédéterminé.

Les électrons ont une réalité indéniable. Ils peuvent être comptés. Cependant tout objet que je me représente comme ayant une forme, une position, une vitesse, ne peut être un électron. Le Principe d'incertitude est un arrangement astucieux qui nous empêche de trouver plus que nous ne devons connaître. Il est édifiant de suivre Sir Arthur Eddington en de telles discussions auxquelles nous avons été préparés par notre grand Henri Poincaré.

A. Buhl (Toulouse.)

Alex. Véronnet. — **Le Calcul vectoriel. Cours d'Algèbre de Mathématiques spéciales et de Mathématiques générales.** Préface par Henri Villat. — Un volume gr. in-8° de XVIII-252 pages. Prix: 50 francs. Gauthier-Villars & Cie. Paris, 1933.

Excellent exposé qui m'a tout d'abord rappelé les *Applications of the Differential Calculus*, de A. J. Mc Connel, dont l'analyse a été faite ici (30me année, 1931, p. 306). Je ne dis pas que les deux ouvrages s'équivalent point par point et il y a certainement les plus grandes chances pour que M. Véronnet se soit tiré d'affaire sans s'inspirer de l'ouvrage anglais mais, dans les deux cas, l'idéal est le même: faire un enseignement élémentaire qui ait, tout de suite, un caractère vectoriel et tensoriel de manière à ce que ce caractère apparaisse comme une chose toute naturelle lorsque plus tard on abordera la Physique théorique. Il est vrai d'ailleurs que le volume eut pour premier substratum une traduction du *Calcul vectoriel* de Coffin; en ces matières, la France en est toujours à suivre des inspirations étrangères mais M. Véronnet doit être remercié et honoré comme ayant fait de son mieux pour remédier à cet état de choses.

Nous nous trouvons maintenant dans une Algèbre vectorielle qui n'a qu'à peine besoin de notations nouvelles. Une seule lettre suffit pour représenter une quantité réelle positive ou négative, une seule z suffit aussi pour représenter $x + iy$. Une seule doit suffire, sans débauche de flèches ou de tirets supérieurs, pour représenter un *nombre* vectoriel à n paramètres.

Il y a là une science de l'intelligence dont notre espace euclidien ne donne qu'une *traduction* simplifiée et faussée (p. 35). Voilà qui est parler sans ambages. Bravo. Et l'on comprend tout de suite ce qu'est la Gravifique: la Science qui a enfin trouvé le moyen général de tenir compte de l'influence des champs sur les étalons, ou instruments de mesure quelconques, qui s'y trouvent. Et quelle mélancolie de penser qu'avant Einstein on ne savait pas résoudre cette question, que, de plus, la géométrie des ds^2 de Riemann, qui permettait de la résoudre, était considérée comme une théorie d'une abstraction tout à fait irréelle et n'était connue que de très rares géomètres.

Il y a un produit vectoriel avec lequel on peut bâtir immédiatement les déterminants. Avec n nombres vectoriels a_i, on pourra définir un nombre vectoriel du second ordre $\xi_i \,.\, a_i$ avec i indice de sommation. C'est là une ouverture conduisant aux transformations ou groupes linéaires. Cette analyse s'étend aux formes quadratiques, à des ploynomes algébriques et à leurs transformations tayloriennes. Les variables complexes, leur rapport avec la géométrie sphérique sont des illustrations simples de préliminaires beaucoup plus généraux.

L'Analyse vectorielle est surtout intégrale. Sa vraie nature ne peut être