

# BIBLIOGRAPHIE

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **32 (1933)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

- M. Gaston JULIA, Membre de l'Institut, Professeur à la Sorbonne: *La représentation conforme des aires multiplément connexes* (1 conférence; 3 mai).
- M. A. EINSTEIN, Lauréat du Prix Nobel de Physique, Professeur au Collège de France et à l'Institut de Recherches de Princeton: *Wahrscheinlichkeitstheorie oder Feldtheorie* (1 conférence; jour et heure à fixer).

*Colloque sur la logique mathématique* (du 18 au 23 juin 1934), sous la présidence d'honneur de M. D. HILBERT (Göttingue):

- MM. BARZIN et A. ERRERA, Professeurs à l'Université de Bruxelles: *Sur la crise contemporaine de la logique mathématique*.
- M. A. FRAENKEL, Professeur à l'Université de Jérusalem: *Sur la notion d'existence dans les mathématiques. — Sur le principe du choix*.
- M. P. BERNAYS, Collaborateur de M. le Professeur D. Hilbert: *Sur le platonisme dans les mathématiques. — Problèmes de la logique du premier ordre et axiomatique. La problématique dans la théorie des nombres*.
- M. P. HERTZ, Professeur à Göttingue: *Sur la nature des catégories et des vérités logiques*.
- M. CHEVALLEY, Ancien Elève de l'École Normale Supérieure de Paris, Agrégé de l'Université: *Sur les travaux de J. Herbrand en logique mathématique*.

*Séance de discussion*: Tous les jours du 18 au 23 juin de 16 à 17 heures, s'il y a lieu.

---

## BIBLIOGRAPHIE

---

LE P. MARIN MERSENNE, Religieux Minime. — **Correspondance** publiée par M<sup>me</sup> Paul Tannery, éditée et annotée par Cornelis de Waard avec la Collaboration de René Pintard. Tome I, 1617-1627. — Un volume gr. in-8° (24 × 19) de LXII-666 pages avec figures et planches. Prix: 200 francs. Edition à marges réduites des *Archives de Philosophie* (23 × 15), prix: 120 francs. Gabriel Beauchesne et ses Fils, Paris, 1932.

Magnifique contribution à l'Histoire des Sciences. Madame Paul Tannery conserve, avec la plus grande autorité, les traditions d'un époux illustre. Elle a trouvé, en un savant professeur hollandais, M. Cornelis de Waard, ainsi qu'en M. René Pintard, des collaborateurs de choix, nullement épouvantés de s'attaquer à une œuvre colossale, ce premier volume n'ayant trait qu'à dix ans de correspondance et, en annonçant, par suite, plusieurs autres.

Le P. Marin Mersenne (1588-1648) — dont je ne me lasse point d'admirer un portrait en héliogravure qui constitue la première planche du livre — est intimement mêlé à l'époque cartésienne. Ce premier fragment épistolaire contient plus de lettres à lui adressées que de lettres écrites par lui, mais les idées qui lui sont ainsi soumises prouvent déjà la valeur du juge que

l'on désirait trouver en lui; son approbation est inlassablement recherchée sur les sujets les plus divers et beaucoup de ces sujets transparaissent ainsi à des dates fort antérieures à celles où l'on aurait été tenté de les situer sans ces savantes exhumations.

De grands travaux de Mersenne transparaissent également, notamment son *Traité de l'Harmonie universelle* qu'il écrit en croyant, en philosophe et aussi en musicien, le mot *harmonie* ayant pour lui des sens multiples. Son esprit est essentiellement guidé par des considérations esthétiques. Son *Impiété des Déistes* n'est pas un paradoxe. Il n'est pas interdit d'analyser les notions d'infinitude attachées à Dieu mais encore faut-il le faire sans ces *impiétés* qui consistent à manier ces notions de manière imparfaite. Le Minime se révèle géomètre, physicien, musicien, très convaincu de la possibilité de scruter l'Univers entier par le secours de l'optique. C'est de lui que vient le célèbre problème variationnel du chant le plus beau qui peut correspondre à un sujet donné; on ne disposera jamais que de notes et de signes musicaux en nombre fini et, dès lors, il doit y avoir *une* combinaison ayant plus de qualités que toutes les autres. Le nombre total des combinaisons ne l'effraie pas, non pas qu'il méconnaisse ce nombre mais parce qu'il semble croire à un esprit de pénétration scientifique qui sera le nécessaire esprit de discernement. C'est quelque chose de fort analogue à la confiance moderne en la Science moderne.

Claude Bredeau, un des plus acharnés correspondants de Mersenne, dans une lettre du 2 novembre 1627, discute avec lui du *comma*, excès du demi-ton majeur sur le demi-ton mineur. Un autre, René Moreau, emploie le terme *idiosyncrasie* évidemment tiré du grec mais que l'on aurait pu croire attaché aux théories psychologiques du dix-neuvième siècle. Il y a beaucoup plus fort encore. Mersenne (p. 332) admet volontiers que la chute des graves provient d'une qualité attractive appartenant à la Terre, qualité qui est peut-être d'origine magnétique. Sans doute, n'y a-t-il là qu'une comparaison simpliste avec l'aimant, mais comment ne pas penser cependant, en lisant de telles choses, à la Gravifique électromagnétique d'Einstein. Au surplus Mersenne, notamment dans sa *Vérité des Sciences*, discute de la nature de la lumière. Il a des opinions plutôt galiléennes combattues par un certain Robert Cornier cependant très affectionné et obéissant. Le tout est en relation avec les travaux de Bacon. Plus loin il s'agit de mécanique et plus particulièrement d'hydrostatique avec Stevin en qui Mersenne semble avoir grande confiance.

Les alchimistes veulent capter la sympathie du Minime, lequel se tient fermement sur la défensive. Mais il sait accueillir les disciples de Descartes, notamment Claude Mydorge qui rédige de belles pages de géométrie à propos de la réfraction et de la Théorie des coniques. La célébrité du P. Mersenne n'allait pas sans lui susciter des envieux parmi lesquels un certain Gaffarel, sur lequel Claude Bredeau dit son sentiment. Il s'est attaché aux mots, non aux choses; sa haine est sans cause et c'est impuissance d'entendement que de s'amuser à médire (p. 483). Voilà une explication qui est de tous les temps et généralement l'existence de tels envieux confirme la haute valeur du personnage envié.

Ces citations, faites à bâtons rompus, suffisent cependant à montrer combien cette présentation du P. Mersenne est vivante. Il y a là comme un tableau intellectualiste très fouillé qui se rapporte au temps du Grand Cardinal. D'ailleurs Richelieu est, à la fois, puissant et sceptique; il s'appuie sur les érudits quand cela sert ses desseins mais il dut grandement estimer

Mersenne. Au vingtième siècle, celui-ci apparaît plus que jamais comme estimable. Le faire revivre, en tant et tant de pages luxueusement imprimées, est d'un mérite au-dessus de tous éloges. Cette publication devrait être œuvre d'Etat; on s'étonne de ne point trouver, dans les pages de titre, l'indication d'un patronage venant de l'Institut ou du Ministère. Cela peut venir pour les volumes suivants. En attendant, il faut beaucoup espérer de tous ceux qui sont curieux de l'Histoire de la Science.

A. BUHL (Toulouse).

Paul JANET. — **Notes et Souvenirs.** Un volume gr. in-8° de 342 pages avec planches et portraits hors texte. Prix: 80 francs. Gauthier-Villars & C<sup>ie</sup>, Paris, 1933.

Ce beau volume paraît s'inspirer des *Figures de Savants* de M. Alfred Lacroix, déjà analysées dans *L'Enseignement mathématique* (t. 30, 1931, p. 299). Ces *Figures* elles-mêmes étaient rapprochées des *Eloges et Discours* de M. Emile Picard. Dans l'ensemble, il s'agit d'ouvrages sur la vie académique ou universitaire vue de l'Institut. Le point de vue n'est pas mauvais. Le livre de M. Janet étant très varié, nous l'examinerons plus commodément en en reproduisant d'abord le sommaire:

I. *Enseignement et organisation scientifique.* Du rôle des Universités dans l'Enseignement technique supérieur. Sur la réforme de la licence ès sciences. L'Enseignement secondaire et l'esprit scientifique. L'Enseignement secondaire et la carrière de l'ingénieur. Le jeune ingénieur. L'Enseignement de l'Electricité. L'Ecole supérieure d'Electricité. Etablissement du système des Unités électriques. Définition et rôle des Laboratoires nationaux. — II. *Quelques souvenirs.* Le vieux Lycée Louis-le-Grand. Souvenirs d'enfance et de jeunesse. Les débuts de l'Enseignement de l'Electricité industrielle à l'Université de Grenoble. — III. *Paroles d'après guerre.* Préface au Livre d'Or des Anciens Elèves de l'Ecole supérieure d'Electricité morts pour la France. Discours prononcé à l'inauguration de la plaque commémorative des Ingénieurs de l'Ecole supérieure d'Electricité morts pour la France. Quelques conseils. — IV. *Quelques biographies.* Alessandro Volta. André-Marie Ampère. Benoît Fourneyron. Zénobe Gramme. Eleuthère Mascart. Adolphe Carnot. Thomas Edison. Lucien Poincaré. — V. *Appendice.* Introduction. Allocution prononcée à la leçon d'ouverture de la première Session de la Section de Radiotélégraphie de l'Ecole supérieure d'Electricité. Rapport de M. Charles d'Almeida sur une mission qui lui avait été confiée par le Gouvernement de la Défense nationale. Objet: établir des communications entre la province et Paris.

On voit qu'en I il s'agit surtout de pédagogie. L'une des principales questions est celle des Instituts techniques d'abord *adjoints* aux Facultés mais qui, dans certains cas, ont pris la place prépondérante, celle qui gêne les universitaires épris de science pure. Cependant, on ne forme pas des techniciens rien qu'avec de la science pure. Il y a là d'inévitables oppositions qui ne sont que trop connues et sur lesquelles de nombreux thèmes pouvaient être brodés. De même la Licence à trois certificats *déterminés* est opposée à la Licence à trois certificats *quelconques*.

Plus loin (p. 45), excellente déclaration sur l'impossibilité de faire, de tout le monde, des savants. Notre machine à juger n'est pas parfaite, sans quoi, depuis longtemps, l'erreur aurait disparu de ce monde ! Bravo. C'est du pur Meyerson avant la lettre. Le seul scepticisme dangereux est celui de l'esprit paresseux ! M. Janet a comme cela de nombreuses phrases brèves qui font que son œuvre tourne au recueil de pensées. Il y a des gens riches d'idées (p. 51) et ne sachant distinguer, en aucune, ce qu'il y a d'essentiel et ce qu'il y a d'accessoire.

Cette première partie se termine par un grand historique relatif à l'enseignement de tout ce qui se rapporte à l'Electricité. On ne pouvait en attendre moins de M. Paul Janet.

En II, les Souvenirs sont empreints d'une douce philosophie. La vie est semblable à la toile d'un peintre; chaque jour ajoute des touches parfois hétéroclites. Mais, en s'élevant, l'ensemble doit paraître homogène. Les relations avec Mascart, Potier, Maurice Leblanc témoignent de sentiments d'amitié que n'entamèrent jamais les pires difficultés.

En III, les Paroles d'après guerre sont plus que frappantes. Un passage de Renan (p. 151) sur l'impossibilité de la barbarie scientifique a été démenti par les faits. Cependant la gloire de Renan est intacte. Le rôle des grands philosophes n'est point de faire des prédictions sinistres et anti-philosophiques au premier chef.

En IV, les huit biographies sont toutes accompagnées de magnifiques portraits et parfois de spécimens d'écriture. Celles d'André-Marie Ampère et d'Eleuthère Mascart sont les plus développées. Ampère, dans son adolescence, comme frappé de stupidité par la mort tragique de son père, sur l'échafaud révolutionnaire, est cependant poète à vingt et un ans. Il écrit des chansons, des rondeaux..., où je relève (p. 177) cette strophe d'une prosodie inquiétante:

La vieille babillarde Hortense  
Croit avoir la fleur des maris.  
Elle disait: Dans tout Paris,  
Nul homme n'a plus d'éloquence.  
Je désire de parler toujours  
Pour que ce cher époux réponde;  
Il ne dit qu'un mot en huit jours.  
Ah ! comme on trompe dans ce monde !

Le cinquième vers a évidemment un pied de trop. Il faut supprimer *de* ou remplacer *Je désire* par *Désirant*. Précisément parce que la correction est très facile, il serait intéressant de savoir d'où vient la faute. Ampère n'évite d'ailleurs pas les incidents en lesquels trébuchent ordinairement les amoureux. Mais ensuite, et bientôt, quel génie !

Mascart eût le commencement de sa carrière bouleversé par la guerre de 1870. Cela n'empêcha point les merveilleux développements qui lui sont dûs dans le domaine de l'optique. En électricité il fut surtout un impeccable mesureur.

Adolphe Carnot (1839-1920) est très près de nous. Thomas Edison (1847-1931) l'est davantage encore; c'est l'audacieux pour qui l'absurde n'existe guère. La biographie de Lucien Poincaré réveille de douloureux souvenirs concernant les familles Poincaré et Boutroux. La mort est passée par là plus cruelle et stupide encore qu'à l'ordinaire.

En V, le volume se termine par un Rapport, de M. Charles d'Almeida, au Gouvernement de la Défense nationale, sur l'établissement de communications entre la province et Paris. Nous n'en étions pas encore à la T.S.F., mais on peut s'étonner de ce qu'il y avait déjà d'ingéniosité très scientifique dans le Rapport en question.

Au total, livre très intéressant, très vécu, souvent très sentimental. C'est un vibrant témoignage en faveur de la Science française.

A. BUHL (Toulouse).

René BIED-CHARRETON. — **De la Turbine à l'Atome.** Préface de M. Charles Fabry. — Un volume in-8° de VI-200 pages. Prix: 25 francs. Gauthier-Villars & C<sup>ie</sup>, Paris, 1933.

Je tiens à dire tout de suite que ce volume est excellent et me paraît même posséder une grande valeur philosophique. Ceci parce que le titre m'avait fâcheusement impressionné. N'était-ce pas là l'œuvre d'un ingénieur voulant appliquer, au macrocosme comme au microcosme, les réflexions expérimentales issues de l'usine et sans s'apercevoir qu'en changeant de domaine, d'aussi prodigieuse façon, il fallait aussi changer de principes. Il n'en est rien et M. Charles Fabry, en préfaçant le volume, assailli sans doute par des scrupules analogues aux miens, nous a aussi rapidement expliqué qu'il n'en était rien. M. Fabry fait même allusion aux gens, parfois éminents (?), qui annoncent qu'ils vont démontrer « l'erreur grossière de Newton » ou « l'absurdité des idées d'Einstein » ou « l'ineptie de Maxwell » ou encore décrire de façon définitive la constitution de l'éther. Il n'y a plus là que des aberrations peut-être excusables au cours du siècle précédent, lorsqu'on croyait à la simplicité des lois universelles d'après un premier aperçu de cette simplicité dans les domaines moyens alors considérés.

M. René Bied-Charreton est un esprit délicat. Il nous conduit, près des turbines et des transformateurs d'énergie, dans les sites alpestres dont il ne méconnaît point la grandeur.

Les turbines à vapeur le mènent à la théorie cinétique, puis au mouvement brownien, à ce désordre microcosmique d'où l'on peut remonter à l'ordre et à l'harmonie du penseur qui n'observe qu'avec ses sens. Mais il conclut, avec raison, qu'en deçà de cette observation superficielle il y a place aussi pour un enthousiasme préliminaire. Il vient à Einstein, à Schmoluchowski, à Jean Perrin, aux couches monomoléculaires, aux pantins électroniques de Millikan, à Daniel Berthelot arbitrant le grand conflit du continu et du discontinu. Il ne faut pas être exclusif; le continu s'émiette aisément mais tout émiettement peut reconstituer du continu. Processus continuus et processus discontinus sont plutôt alliés qu'ennemis. Sage position philosophique à laquelle nous nous sentons vivement tentés d'adhérer, dit l'auteur du présent livre. Je lui apporte, très volontiers, ma propre adhésion. Une psychologie pénétrante — et qui d'ailleurs n'aurait pas besoin de l'être beaucoup tant il s'agit d'une chose grossière — reconnaît qu'il y a dans les sciences, comme dans les arts, comme en tout, des esprits qui se portent d'instinct sur ce qui dépare, ce qui oppose, ce qui divise. Ceux là furent contre la classification de Mendeleieff si d'accord, aujourd'hui, avec les symétries groupales de la Mécanique ondulatoire.

Il y a les merveilles des tubes de Geissler continuées avec la fantasmagorie des grands vides et l'apparition des rayons cathodiques. Puis c'est le mystère

des émissions photo-électriques. Maxwell, avec raison, est déifié. Ce fut le grand initiateur qui nous guida à travers les foules moléculaires et nous ouvrit la voie où nous restons maintenant saisis d'admiration devant ces autres merveilles de la Création, que sont les atomes. Car l'atome apparaît, de plus en plus, comme un objet créé d'accord avec une volonté intelligente. La conclusion du livre est théiste, ce qui ne gêne rien. Les mathématiques y sont louées mais n'y jouent aucun rôle sauf, dans le dernier chapitre, avec l'unique équation  $y = \sin x$ . Le Temps et l'Eternité sont, sans doute, d'essence périodique.

A. BUHL (Toulouse).

Pierre SERGESCU, Jean ROSTAND, Augustin BOUTARIC. — **Tableau du XX<sup>e</sup> Siècle.** — Un volume in-8° illustré de 552 pages. Prix: 25 francs. Denoël & Steele, Paris, 1933.

« Faisant suite à l'ouvrage consacré aux *Arts* par Pierre du Colombier et Roland-Manuel, voici que paraît le deuxième volume du tableau du XX<sup>e</sup> siècle, où d'éminents spécialistes décrivent à grands traits l'admirable activité scientifique de la France durant ces trente-trois dernières années.

Ce volume, qui traite des *Sciences*, offre au lecteur un attrait aussi puissant que le premier. Il est conçu de la même manière, présentant des vues d'ensemble nettes, sans négliger l'information la plus exacte et la plus détaillée.

La première partie, due à M. Pierre Sergescu, professeur à l'Université de Cluj (Roumanie), est un vibrant hommage à la gloire de nos mathématiciens. Qu'ils se nomment Poincaré, Painlevé, Darboux, Picard, Cartan, Julia ou Montel, ces savants ont édifié une œuvre étonnante de logique et d'audace. Les caractéristiques de leurs travaux échappaient jusqu'à ce jour, même au public cultivé, que rebute, malgré tout, une étude trop aride. Grâce au limpide travail de M. Sergescu, le lecteur profane connaîtra, dans ses grandes lignes tout au moins, le mouvement mathématique français, le plus riche et le plus vivant du monde. »

Ces premières lignes, entre guillemets, accompagnaient l'envoi de la Première Partie du volume, de celle qui est due à M. Sergescu. Nous les reproduisons bien volontiers, tant elles paraissent exactes après examen du texte auquel elle se rapportent. Si nous nous en tenons ici à la partie relative aux sciences mathématiques, c'est d'abord l'occasion de remarquer qu'il s'est formé, en Roumanie, toute une Ecole mathématique d'inspiration française — l'inspirateur en chef semblant être M. Emile Picard — Ecole qui, présentement, par la plume de M. Pierre Sergescu, nous témoigne beaucoup d'admiration et de reconnaissance.

On peut certainement reconnaître, sans tomber dans un chauvinisme outrancier, que le génie propre de la France lui permet, à l'heure actuelle, de représenter toutes les modalités de l'Analyse, de la Géométrie et de la Physique théorique.

Ainsi les groupes, au sens de Lie, pourraient nous sembler assez étrangers si Lie, lui-même, ne reconnaissait avoir suivi Galois et si M. Elie Cartan ne prolongeait maintenant la Théorie des groupes bien au delà de ce que promettait le créateur. De même la France a peu produit, au début, pour la Gravifique mais il y a eu ensuite la Mécanique ondulatoire, de structure essentiellement hermitienne.

M. Sergescu débute par un chapitre consacré aux temps précédant le

vingtième siècle. Il nous montre Newton d'abord traité, en France, au nom de Descartes, comme Einstein le fut il y a quinze ans. Cela n'empêcha ni Laplace ni Le Verrier.

Tout le chapitre second est consacré à Henri Poincaré. Le troisième va de M. Emile Picard à la trinité Borel, Hadamard, Painlevé et à toute la pléiade d'élèves dont tant ont uniquement gravité autour du théorème essentiel dû précisément à M. Picard. Ici, ce sont les équations sans racines qui ont ouvert le domaine de l'extraordinaire. Baire et Lebesgue créent véritablement la Théorie des Fonctions de variables réelles. La Géométrie proprement dite (Ch. IV) est rattachée aux travaux de Darboux, la Physique mathématique (Ch. V) à Duhem, le Calcul des Probabilités au grand Traité de M. Borel, la Philosophie et l'Histoire (Ch. VI) sont vues à travers les écrits de Poincaré et de Duhem.

Mais le plus curieux est que, sans perdre de vue ces grandes lignes, M. Sergescu ait trouvé le moyen de citer plusieurs centaines de noms, de rendre hommage à des disciples restés en seconde zone mais cependant non sans mérite comme ayant beaucoup travaillé avec la dose d'intelligence qui leur était départie. Le tableau résultant est ainsi d'une minutie frappante.

Que l'on me permette une petite malice. L'ouvrage étant orné de beaux portraits, j'y trouve, page 21, M. Emile Picard ressemblant étrangement à Gaston Darboux et, page 89, un Gaston Darboux qui, un jour, a dû s'amuser à se camoufler jusqu'à obtenir une ressemblance non moins étrange avec M. Emile Picard. Et encore, non ! L'explication ne doit pas être si compliquée ! Ce n'est jamais qu'un groupe de permutations qui a joué mal à propos. D'ailleurs, cela n'est peut-être arrivé que dans quelques exemplaires.

A. BUHL (Toulouse).

**Monografie Matematyczne.** Comité de Rédaction: S. BANACH, B. KNASTER, K. KURATOWSKI, S. MAZURKIEWICZ, W. SIERPINSKI, H. STEINHAUS. — Volumes gr. in-8° (26 × 18). Pour l'achat: Seminar. Matem. Univ., Oczki Nr. 3, Warszawa (Varsovie, Pologne) ou bien versement à P. K. O., Nr. 45.177. Prof. Dr K. Kuratowski. Lwów.

Une magnifique collection de Monographies mathématiques vient de naître en Pologne. Les langues prévues pour la rédaction des volumes sont le français, l'allemand, l'anglais ou l'italien. Les trois premiers, analysés très brièvement ci-après, sont rédigés en français. Voilà qui n'est pas fait pour nous déplaire et qui rend éloquemment hommage aux protagonistes des théories en litige, le très regretté René Baire allié à MM. Emile Borel et Henri Lebesgue. Ceux-ci ont été continués, en France, par MM. Arnaud Denjoy et Maurice Fréchet, ailleurs, par une brillante pléiade de mathématiciens dont les principaux forment le Comité de Rédaction cité ci-dessus et sont mentionnés ci-après à la fin du troisième article. La Pologne joue un rôle considérable et dessiné depuis longtemps.

Après avoir parcouru ces pages, qu'il me soit permis de dire, non sans émotion, que j'ai été frappé d'y reconnaître une influence toujours grandissante s'attachant au nom de René Baire. L'article publié, dans *L'Enseignement mathématique* (31<sup>me</sup> année, 1932), après sa fin si triste et si prématurée, lui rendait un amical hommage. Mais il apparaît, avec une clarté qui va s'accroissant, qu'au delà des considérations d'amitié, il y a aussi des considérations d'immense valeur scientifique qui contrastent de plus en plus



douloureusement avec la vie si pénible qu'eurent l'homme et le savant. Nous devons à nos amis polonais d'avoir élevé un nouveau monument sur une tombe française.

1. Stefan BANACH. *Théorie des Opérations linéaires* (VIII-254 pages, 1932. Prix: 3 dollars). — Ce livre contient les fondements de l'algèbre des opérations, fondements correspondant à l'étude des formes linéaires de l'algèbre ordinaire. Au point de vue historique, ces théories sont nées avec des analyses de plus en plus pénétrantes de la continuité bientôt remplacée par des concepts discontinus qui permettaient cependant de conserver des notions telles celles de l'intégrable et du mesurable. Les équations intégrales apparaissaient alors comme un monde situé au delà des équations différentielles, dans des espaces souvent réputés abstraits parce que les notions métriques n'y étaient pas admises sans discernement.

En fait, tout ceci bouillonne prodigieusement, depuis le début du siècle, sous des couleurs d'abstraction qui semblaient d'une peinture difficile et qui sont cependant celles que la Physique théorique a également imposées. L'aspect rébarbatif de la rigueur extrême a disparu dès que cette rigueur est devenue suffisamment générale et a pu prendre la physionomie qui lui convenait véritablement. Et même M. Stefan Banach invoque, dès la première page de sa Préface, la « valeur esthétique » du nouveau point de vue. C'est le thème si souvent défendu dans *L'Enseignement mathématique*.

On admet les théories de la mesure et de l'intégrale de Lebesgue. La condition de Baire sur l'ensemble parfait joue également un rôle fondamental. L'espace vectoriel naît des considérations linéaires les plus simples; les opérations qui peuvent s'y définir donnent immédiatement des fonctionnelles. Les divers espaces ont des types qui correspondent tout simplement à diverses définitions; il faut construire logiquement et se fier aussi peu que possible à l'intuition sensible. Quand l'espace fonctionnel *complet* peut être *normé*, il donne le type spatial (B) adéquat à la linéarisation et à ses conséquences limites. Il ne faut pas être un grand clerc pour réapercevoir les questions physiques qui ont conduit dans ces parages. Les suites biorthogonales accentuent la même impression. Plus loin nous voyons (p. 121) que les notions d'espaces vectoriels de fonctionnelles linéaires *régulièrement* fermés et de ceux *transfiniment* fermés sont équivalents. N'est-il pas sensationnel que le *transfini* s'adjoigne ainsi au *régulier*. De là à la convergence *faible*, aux espaces *faiblement* complets, il n'y a que les précautions indispensables pour de corrects passages à la limite. Ils resterait à insister sur les équations fonctionnelles elles-mêmes (Riesz, Fredholm, Volterra) sur l'isométrie, l'équivalence, l'isomorphie, l'analyse dimensionnelle, sur les auteurs cités depuis Cauchy et Riemann. Nous n'en finirions pas. Renvoyons au texte précieux et précis de M. Stefan Banach.

2. Stanislaw SAKS. *Théorie de l'Intégrale* (VIII-290 pages, 1933. Prix: 4 dollars). — Ce second volume est peut-être, au moins dans ses débuts, plus élémentaire que le précédent. Il expose les théories de la mesure, de l'intégrale de Lebesgue et même la théorie des ensembles dont quelques préliminaires seulement sont considérés comme classiquement connus. Cette exposition n'est pas faite sans vues rétrospectives. L'auteur cite Henri Poincaré, parlant de fonctions inventées tout exprès pour mettre des raisonnements en défaut, et Charles Hermite se détournant, avec effroi

et horreur, des fonctions continues sans dérivées. L'esprit moderne peut cependant triompher puisqu'il comprend, comme cas particulier, celui d'autrefois. L'abstraction analytique a même pu faire une très large place à l'intuition géométrique qui se trouve, elle aussi, grandement généralisée. Ainsi, un ensemble peut être *figure*; il est alors somme d'intervalles n'empiétant pas l'un sur l'autre. Ces intervalles ont des *aires* qui ont une somme. La fonction de figure élémentaire  $F(R)$  et la fonction d'intervalle  $F(I)$  suivent immédiatement. D'où une décomposition de Jordan qui a précédé celle de Lebesgue.

Le simple concept de mesure devait conduire à une intégration profondément remaniée et poussée, par exemple, vers la *totalisation* de Denjoy. L'intégrale de Lebesgue a une définition descriptive valable immédiatement pour l'intégrale multiple, avec des précisions constituant le théorème de Fubini précisé, à son tour, par un théorème de Tonelli. La même intégrale a une définition géométrique avec conservation étendue de la notion d'aire; elle généralise aussi l'intégrale de Riemann-Stieltjes. L'aire d'une surface courbe est une limite d'aires polyédrales mais non nécessairement inscrites dans la surface. Ensuite se place l'intégrale de Burkill avec subdivisions dont les *nombres caractéristiques* tendent vers zéro. Z. de Geöcze, toujours dans le calcul des aires gauches, passe par des constructions intégrales préliminaires qui n'assurent la limite entrevue qu'avec un théorème de Radò complété encore par Tonelli. L'intégrale de Perron repose sur considérations majorantes et minorantes *dans une figure*. Les idées de Denjoy, Lusin, Khintchine, avec les dérivées approximatives et relatives, suivent naturellement un théorème de Baire. Les théorèmes de Denjoy sont intimement unis aux *nombres dérivés*; ils conduisent à des opérations intégrales complètes que Hake, Alexandroff, Looman semblent avoir étendues encore. Et tout ceci reste cependant en liaison avec les intégrales de Cauchy et de Harnack. Passons sur les différentielles totales généralisées pour les fonctions de deux variables. Une Note de M. Stefan Banach, *Sur la mesure de Haar*, termine cette magistrale exposition qui doit tant à l'Ecole française fondamentalement représentée par le si regretté René Baire ainsi que par MM. Borel et Lebesgue. N'omettons pas de signaler une riche bibliographie.

**3.** Casimir KURATOWSKI. *Topologie*, I (x-286 pages, 1933. Prix: 4,50 dollars). — Ce volume vient bien en place après les deux précédents; il est d'une étude notablement plus difficile. Il traite des propriétés des ensembles de points invariants par rapport aux transformations bicontinues. Par exemple connaître de certaines transformations, qui changent certaines propriétés limites en propriétés analogues, est ici problème topologique. Ceci paraît distinct de la *Topology* de Solomon Lefschetz (voir *Ens. math.*, 30<sup>me</sup> année, 1931, p. 153) à caractère algébrique et combinatoire; M. Lefschetz n'est même pas cité. Il y a là une différence sur laquelle il nous paraît utile d'attirer l'attention.

En revanche la topologie, selon M. Kuratowski, va du côté des algèbres logiques. Et cela se conçoit. Il ne manque point de propriétés d'ensemble, établies selon une certaine évidence ou une certaine logique, qui, soumises à de certaines transformations, donneront des propriétés transformées où l'on ne reconnaîtra pas aisément l'évidence ou la logique primitives. On se demandera alors si évidence ou logique n'ont pas, à leur tour, quelque chose de faillible ou d'incertain. Bref il faudra créer ici une analyse générale

pouvant, au besoin, disséquer la logique elle-même. Certes on peut se demander si cette analyse de dissection ne conduira pas à quelque chose de plus subtil encore et ainsi de suite indéfiniment, mais le présent livre, forcément limité, n'aboutit pas à cette dilution dans l'indéfini. Il s'inspire essentiellement des espaces plongés en d'autres qui sont peut-être de mieux en mieux définis à mesure qu'ils sont de moins en moins vulgaires. Les espaces abstraits, de M. Fréchet, sont grandement à l'honneur. C'est notamment à M. Fréchet que l'on doit la notion d'espace *complet*, notion construite à partir d'une condition de Cauchy et qui, par suite, n'a pas été créée par une nouvelle école qui serait seule à comprendre le langage qu'elle emploie. D'ailleurs l'espace complet généralise aussi l'espace métrique.

Il va devenir fastidieux de répéter encore qu'en France tous ces travaux semblent avoir été commencés par la trinité Baire-Borel-Lebesgue. C'est surtout René Baire qui semble avoir ici un rôle de toute premier plan, la *propriété de Baire* étant analogue, en Topologie, à la mesurabilité en Analyse et pouvant s'attacher à d'innombrables généralisations.

N'essayons pas d'analyser davantage; c'est impossible. Le livre condense d'immenses travaux. Parmi les auteurs le plus fréquemment cités, outre ceux déjà nommés, mentionnons Alexandroff, Banach, Cantor, Denjoy, Hausdorff, Lavrentieff, Lindelöf, Lusin, Mazurkiewicz, Menger, Nykodym, Saks, Sierpinski (auquel l'ouvrage est dédié), Urysohn, Young. Tous ont brillamment travaillé à perfectionner l'esprit de pénétration logique.

A. BUHL (Toulouse).

Vladimir BERNSTEIN. — **Leçons sur les Progrès récents de la Théorie des Séries de Dirichlet**, professées au Collège de France. Préface de M. Jacques Hadamard (Collection de Monographies sur la Théorie des Fonctions publiée sous la direction de M. Emile Borel). — Un volume gr. in-8° de XVI-320 pages. Prix: 60 francs. Gauthier-Villars & C<sup>ie</sup>. Paris, 1933.

Les séries de Dirichlet sont grandement à l'honneur et sont destinées à y être bientôt davantage encore. Sans s'éloigner des ouvrages français qui nous touchent immédiatement, il faut évidemment mentionner le fascicule de M. Valiron publié dans le *Mémorial des Sciences mathématiques* et, après la présente œuvre, une autre, actuellement en préparation, qui sera rédigée par M. Hadamard lui-même. Le « petit livre » actuel, pour parler comme l'auteur, me fait déjà l'effet d'un grand ouvrage développant un Cours fait, au Collège de France, au printemps de 1931, sous les auspices de la Fondation Peccot. Cet ouvrage est écrit dans un style relativement élémentaire, très accessible aux néophytes simplement imbus de la Théorie des Fonctions selon Cauchy car l'intégration curviligne est, ici aussi, un instrument essentiel.

Rappelons qu'une série de Dirichlet est de la forme

$$f(s) = \sum a_n e^{-\lambda_n s} .$$

On peut se donner, de manière complètement indépendante, la suite des  $a$  et la suite des  $\lambda$ , avec l'entier  $n$  variant de 1 à l'infini positif. Il est immédiatement visible que les séries entières et, par exemple, les séries trigonométriques sont comprises dans le type indiqué. Si les séries de Dirichlet sont issues, historiquement, de recherches arithmétiques, elles participent,

très généralement, au concept de série double comme à celui de fonction sommable existant par elle-même et par l'intervention de quelque autre considération fonctionnelle. Ces aperçus, provenant tout simplement de ce que les  $a$  et les  $\lambda$  forment deux séries distinctes, pourraient être variés de bien des manières; ils font pressentir le monde prodigieux dans lequel on peut entrer avec la formule ci-dessus. Les questions de convergence, qui permettent de véritablement définir une  $f(s)$ , sont simples; les domaines de validité (bandes, demi-plans, secteurs, ...) sont bornés par des droites. Mais il est aussi extrêmement remarquable qu'à une  $f(s)$  donnée, on puisse faire correspondre une détermination de coefficients  $a$  et  $\lambda$  par des méthodes qui, bien que plus complexes, rappellent le jeu des intégrales de Cauchy quant à la détermination des coefficients dans la série de Taylor. D'ailleurs, un premier critère de convergence, dû à M. Ostrowski, généralise naturellement le critère de MM. Hadamard et Fabry relatif aux séries entières.

Après ces préliminaires, on peut aborder une étude générale des  $\lambda$ . Il y a là des questions de *mesure* et de *densité* qui correspondent à la comparaison de  $\lambda_n$  avec  $n$ . De même Bohr introduit une limite logarithmique dépendant de la différence entre  $\lambda_{n+1}$  et  $\lambda_n$ .

Une série de Dirichlet peut-être *ultraconvergente*, c'est-à-dire représenter encore quelque chose hors du domaine de convergence proprement dit. On voit la différence avec les séries de Taylor qui, hors du cercle de convergence, ne représentent franchement rien, sauf conventions et constructions nouvelles. La nouvelle série

$$F(s) = \sum \varphi(\lambda_n) a_n e^{-\lambda_n s},$$

où  $\varphi$  est une fonction entière du type exponentiel, ne peut avoir de singularités sans relations remarquables et fondamentales avec celles de  $f(s)$ . MM. Ostrowski, Cramer, Polya ont grandement précisé et développé ce point où l'analyse est particulièrement élégante et explicite.

On peut aussi revenir à  $f(s)$ , en former les dérivées successives et tenter une représentation taylorienne de  $f(s)$ . C'est forcément étriquer les choses par quelque côté, mais c'est une méthode d'attaque qui, quoique incomplète, est extrêmement curieuse quant à une première recherche des singularités de  $f(s)$ . Plus loin  $f(s)$  est en relation avec la fonction entière

$$G(z) = \prod \left( 1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2} \right)$$

et toujours par l'intermédiaire du théorème de Cauchy; c'est de ce côté que l'on pourrait reprendre les aperçus arithmétiques qui donnèrent autrefois naissance à tous ces magnifiques développements. Avons-nous analysé ceux-ci? Nullement. Tout ce que nous venons d'en dire se rapporte à peine à la première moitié du volume. Mais la seconde moitié n'est ni moins suggestive ni moins claire; il faut y relever surtout la *composition* des singularités. L'ensemble est constellé de noms de mathématiciens qui me semblent tous fort jeunes ou qui, tout au moins, ont travaillé, dans leur jeunesse, à un sujet qui, s'il exigeait beaucoup de finesse d'esprit, n'exigeait pas de très grandes connaissances préparatoires. Songeons surtout qu'il en exigera maintenant encore moins grâce à M. Vladimir Bernstein.

A. BUHL (Toulouse).

J. FAVARD. — **Leçons sur les Fonctions presque périodiques**, professées au Collège de France. Préface de M. Gaston Julia (Cahiers scientifiques publiés sous la direction de M. Gaston Julia; fasc. XIII). — Un volume gr. in-8° de VIII-184 pages. Pris: 50 francs. Gauthier-Villars & C<sup>ie</sup>, Paris, 1933.

Encore un excellent Cours fait sous les auspices de la Fondation Peccot et dont le sujet présente de très grandes analogies avec le précédent. Les fonctions presque périodiques sont comparables aux fonctions «troublées» de la Mécanique céleste et même de la récente Mécanique ondulatoire: leur théorie correspond à des troubles particulièrement aisés à codifier. Ainsi, à une fonction presque périodique, correspond toujours une valeur moyenne, une série d'exposants de Fourier et une autre série de coefficients de Fourier telles que, d'après Hurwitz, on puisse écrire la correspondance

$$f(x) \sim \sum A_n e^{i\lambda_n x} .$$

Le second membre rappelle immédiatement la série de Dirichlet avec cette différence qu'ici les choses sont manifestement préparées pour la comparaison avec les séries trigonométriques et les représentations périodiques tandis qu'avec M. Bernstein on visait plutôt à la comparaison avec les séries de Taylor. Mais les deux points de vue s'identifieront fatalement, et sous la plume de M. Favard lui-même, quand celui-ci, dans la seconde moitié de son ouvrage, en viendra aux fonctions *analytiques* presque périodiques.

A la formule ci-dessus correspond un théorème d'unicité absolument essentiel. A  $f(x)$  ne correspond qu'un seul second membre. Seulement celui-ci n'approche pas toujours de  $f(x)$  par quelque convergence élémentaire et directe; là encore, il faut imiter les procédés de sommation employés pour des séries divergentes correspondant à des tentatives de représentations périodiques. Signalons le rôle fort important des polynômes exponentiels. La construction de ces polynômes ne va pas sans développements sur des nombres de la forme  $s_i \gamma_i$  (avec  $i$  indice de sommation). Les exposants  $\lambda_n$ , de  $f$ , peuvent être de la forme  $m_i \beta_i$ , les  $m$  étant entiers, ce qui rend  $f$  quasi-périodique au sens de Bohl et de M. Esclangon. Il est impossible de mieux préciser sans développements mais enfin on peut retenir qu'il ne faut pas confondre la presque-périodicité avec la quasi-périodicité. Il se trouve que *presque* a pris un sens plus général que *quasi*.

Un autre point, des plus importants mais que nous ne pouvons que mentionner, est celui de la *normalisation* des fonctions presque-périodiques: c'est de là que provient surtout leur maniement pratique. Elles peuvent dès lors figurer comme coefficients dans des équations différentielles et même dans des systèmes d'équations différentielles tels les systèmes linéaires, systèmes auxquels on appliquera la méthode d'intégration par approximations successives de M. Emile Picard. La Théorie de la Lune exigeait déjà des considérations de ce genre avec l'équation  $z' + \Theta z = 0$  (Voir H. POINCARÉ. *Leçons de Mécanique céleste*, Tome II, Seconde partie, 1909, p. 43). Il fallut d'abord se tirer d'affaire par des procédés assez improvisés. Aujourd'hui la Théorie des fonctions presque périodiques apporte de véritables méthodes; il est naturel qu'elle ait provoqué les efforts d'un astronome comme M. Esclangon et, du côté de la Physique théorique, ceux d'un savant comme M. Weyl.

Les circonstances qui font paraître, à peu près ensemble, les ouvrages de MM. W. Bernstein et J. Favard, ne sont sans doute pas fortuites. Les deux livres sont à étudier ensemble pour qui voudra faire des comparaisons profondes et fructueuses.

A. BUHL (Toulouse).

J. SER. — **Les calculs formels des Séries de factorielles.** — Un volume gr. in-8° de VIII-100 pages. Prix: 20 francs. Gauthier-Villars & C<sup>ie</sup>. Paris, 1933.

Il s'agit ici du calcul analytique aboutissant à ce que l'on appelait autrefois la belle formule. On peut croire que ce calcul a perdu du terrain et cependant il est destiné à en regagner avec les actuels progrès du symbolisme. En parcourant l'ouvrage de M. Ser j'ai successivement pensé aux *facultés analytiques* de Laplace, aux formules, toujours incomplètement étudiées peut-être, de Burmann et de Wronski, aux recherches beaucoup plus récentes de M. Nörlund sur la « somme » d'une fonction (*Mémorial des Sc. math.*, fasc. 24) et enfin à tout l'arsenal hermitien qui revient au grand jour grâce aux quanta.

L'auteur part de la Série de Newton, pose

$$n! X_n = x(1-x) \dots (n-1-x)$$

et, à propos de fonctions élémentaires diverses mais de plus en plus complexes, nous fait admirer la puissance constructive de ces  $X_n$ . Ceux-ci se prêtent notamment à de certains développements directs et à d'autres dits *réciroques*. Parmi des nombres *autoréciroques* on retrouve ceux de Bernoulli rattachés à des développements en série entière et qui pourraient être rattachés aussi aux séries de puissances symboliques de la Théorie des groupes.

Un chapitre consacré aux formules sommatoires contient beaucoup de choses qui pourraient être tirées de la Théorie des résidus. Ici, on songe aux recherches de M. Lindelöf.

Si les sommes ordinaires correspondent à une opération  $\Omega f$ , il y a des sommes alternées qui correspondent à  $\Omega \cos \pi x f(x)$ . On retrouve ici la fonction  $\Gamma$  et sa dérivée, des généralisations de la formule de Wallis et l'on aboutit ensuite à la notion de *faculté* que l'on sentait venir depuis longtemps. Il faut également signaler les séries de constantes dans lesquelles la constante d'Euler entre de manière très particulière.

Les fonctions eulériennes et le logarithme intégral donnent un chapitre particulièrement esthétique. Le rapprochement des séries de facultés et des séries de Newton conduit à de faciles aperçus sur l'extrapolation. Chemin faisant, nombre de séries divergentes ont été ingénieusement transformées de manière à rétablir la convergence.

Certes, je n'ai pas vérifié tous les calculs de M. Ser mais tous incitent à l'attention; on peut penser que nombre d'abstractions de la Théorie des fonctions pourraient trouver, dans ces pages, d'élégantes illustrations.

A. BUHL (Toulouse).

B. KAGAN. — **Abhandlungen aus dem Seminar für Vektor- und Tensoranalysis samt Anwendungen auf Geometrie, Mechanik und Physik.** Lieferung I. — Un volume grand in-8° cartonné de 304 pages. Prix: 7 roubles 50. Staatlicher Technisch-Theoretischer Verlag. Moskau, Leningrad, 1933.

Encore un ouvrage qui fait grand honneur à la Science telle qu'elle est pratiquée et enseignée en U.R.S.S. Il provient d'un « Institut de Recherches scientifiques, pour les Mathématiques et la Mécanique, de l'Université d'Etat de Moscou ». Dans cet Institut, il y aurait un Séminaire pour l'Analyse vectorielle et tensorielle; de loin, il est difficile de se représenter tout cela très exactement mais, si j'en juge par le volume que j'ai sous les yeux, il s'agit vraisemblablement d'une création universitaire comparable à celle de l'Institut Henri Poincaré de Paris. Du moins, les présentes *Abhandlungen* rivalisent avec les *Annales* de ce dernier Institut. Elles forment un très beau volume, très bien imprimé, contenant des Mémoires allemands et français qui ne sont accompagnés que de quelques pages en langue russe. Visiblement la rédaction a été faite pour l'Europe centrale et occidentale. Voici d'abord la table de ces Mémoires:

1. B. Kagan. *Über eine Erweiterung des Begriffes vom projektiven Raume und dem zugehörigen Absolut.*
2. H. SCHAPIRO. *Über die Metrik der subprojektiven Räume.*
3. P. RACHEVSKY. *Caractères tensoriels de l'espace sousprojectif.*
4. G. GUREWITSCH. *Über einige Integralaufgaben der Tensoranalysis.*
5. J. DUBNOW. *Über Tensoren mit nichtskalaren Komponenten.*
6. J. DUBNOW. *Die Differentialgeometrie der Strahlenkongruenzen in tensorieller Darstellung.*

Il y a là de grands travaux, tous apparentés, qui font du volume un véritable traité de Géométrie tensorielle avec prédominance des notions projectives. En 1, nous commençons même par des définitions très précises des espaces projectifs, avec J. Schouten, E. Cartan, H. Weyl, alors qu'il ne manque point d'exposés qui invoquent la projectivité pour n'y recourir, au fond, que très peu. Les notions *géodésiques*, avec équations différentielles associées sont absolument fondamentales pour M. Kagan. Les cas euclidiens éclairent les généralités. En 2, M. Schapiro s'inspire de ces idées pour reconstruire des métriques, notamment celle de Riemann. En 3, l'influence de M. Kagan n'est pas moins grande; il s'agit de reconnaître les caractères métriques sous-projectifs en partant de coordonnées arbitraires. Le Mémoire 4 est, en grande partie, d'inspiration française (Goursat-Cartan). C'est un maniement continu de formes de Pfaff et d'équations aux dérivées partielles généralisées. En 5, le point de vue change. On part de considérations euclidiennes et on les étend avec un large emploi d'intégrales multiples; c'est la méthode *stokienne* qui a toujours eu mes préférences personnelles. D'ailleurs (p. 216) j'ai la satisfaction de retrouver la formule de Paul Appell avec une citation qui me concerne. Quant à la géométrie des congruences, elle est moins avancée que celle des variétés ou espaces proprement dits mais il est naturel qu'elle trouve, en 6, des développements adéquats finalement particularisés jusqu'aux recherches de Ribaucour, de Malus et de Dupin.

Tout cela est de la très belle et très actuelle Géométrie pour laquelle l'Institut moscovite vient certainement de faire beaucoup.

Je puis ajouter quelques lignes en dernière heure.

M. Kagan, auquel j'avais écrit pour le féliciter de la parution ci-dessus, me répond en me faisant part, en effet, d'un vaste projet. Comme je l'avais deviné, au moins partiellement, il s'agit bien de fonder, à Moscou, un vaste centre d'études concernant la Géométrie différentielle, en s'inspirant surtout de Ricci, Levi-Civita et Cartan. Naturellement, les géomètres moscovites comptent sur des appuis occidentaux. Celui de *L'Enseignement mathématique* leur est accordé avec grand enthousiasme.

A. BUHL (Toulouse).

**Actualités scientifiques.** — Fascicules gr. in-8°, avec figures et planches, se vendant séparément à prix divers. Hermann & C<sup>ie</sup>, Paris.

**79.** — Elie CARTAN. *Les Espaces de Finsler* (Exposés de Géométrie. Direction E. Cartan. 42 pages. 1934. Prix: 12 francs). — Pour plus de clarté, je ferai d'abord remarquer que j'ai reçu et analysé ce fascicule après le numéro 80 dû à M. Delens et mentionné ci-dessous. Je ne répéterai donc point des choses déjà dites. Les deux exposés sont d'ailleurs assez différents, M. Cartan semblant plus se soucier de la structure analytique des choses que d'applications qu'il laisse cependant transparaître avec abondance.

Les Espaces finslériens sont certainement le plus grand triomphe, jusqu'ici connu, de la notion d'homogénéité. Certes, on apprend aux très jeunes élèves que les formules de la géométrie euclidienne doivent forcément être homogènes par rapport aux longueurs et l'on établit cela par des considérations métriques, en invoquant la nécessaire invariance de la formule par rapport à un changement d'unité de mesure. Mais, de là à constituer une géométrie générale dans laquelle  $ds$  serait simplement homogène en  $dx^i$ , il y avait un véritable abîme.

Les espaces de Riemann ont reçu un perfectionnement considérable lorsque M. Elie Cartan a su leur adjoindre la torsion. C'était une manière d'analyser la notion du parallélisme à distance si finement disséquée aussi par M. Tullio Levi-Civita. Nous avons maintenant quelque chose d'analogue avec les travaux de L. Berwald qui prolongent très conditionnellement ceux de P. Finsler mais en montrant la portée exacte.

Les Espaces de Finsler sont à connexion euclidienne; on peut en faire la carte sur l'espace euclidien. Les vecteurs ont encore des différentielles absolues  $DX$  qui sont des  $dX$  pourvus d'un terme complémentaire. Le Calcul des variations intervient d'une manière fondamentale quant à une notion de transversalité analogue à la notion classique de perpendicularité. Il y a une métrique angulaire, en un point, d'accord, comme en géométrie euclidienne, avec le concept de longueur vectorielle. Au delà de considérations vectorielles, on trouve encore des tenseurs pourvus d'une dérivation covariante. C'est ici qu'on compare aisément les conceptions de M. Cartan avec celles de Berwald.

Les courbes et les surfaces, toujours analysables par éléments linéaires tangents, conservent, de ce fait, une théorie qui n'apparaît pas comme extrêmement éloignée de la théorie euclidienne et l'on peut se demander si la géométrie finslérienne n'est pas, par excellence, la géométrie sureuclidienne. Trouvera-t-on plus général encore? Il est singulièrement imprudent de vouloir répondre à une question de ce genre mais, pour l'instant il semble bien qu'on ait profité, jusqu'à l'extrême, de la connexion euclidienne. Les théorèmes de Meusnier et d'Euler s'étendent; pour la courbure et la torsion



géodésiques, des distinctions nouvelles s'imposent. Les identités de Bianchi, de la Géométrie de Riemann, se généralisent sans trop se défigurer et presque avec les mêmes jeux d'indices. C'est là, par exemple, qu'il y a de quoi dépasser largement la Théorie des groupes de Lie. Attendons, avec confiance, de brillantes applications physiques.

**80.** — P. DELENS. *La Métrique angulaire des Espaces de Finsler et la Géométrie différentielle projective* (Exposés de Géométrie. Direction E. Cartan. 40 pages, 1934. Prix: 12 francs). — Ce fascicule me semble être d'une extrême importance. M. Delens l'a écrit avec l'esprit géométrique strictement adéquat à la définition du sujet, sans chercher à philosopher à côté ou au delà. Il a d'ailleurs partout pour guide les travaux de M. Elie Cartan qui n'a pas non plus l'habitude de se laisser entraîner hors de problèmes posés avec autant de précision que de généralité. Mais ici, où je ne dispose que de quelques lignes et où je ne puis guère reproduire de formules, je puis, en revanche, dire mon sentiment.

Il me semble que la théorie des Espaces de Finsler va comprendre à bref délai — si même la chose ne peut être considérée comme faite maintenant — d'une part, la théorie des Espaces de Riemann et les considérations gravifiques adéquates, d'autre part les considérations fondamentales de la Mécanique ondulatoire. Un espace de Finsler est défini par son

$$ds = F(x^i, dx^i) = F(x^i, p^i) \equiv F(p^i)$$

avec  $F$  homogène du premier degré en  $p^i$ . L'inclusion du point de vue riemannien est évidente. En outre, l'homogénéité de  $F$  entraîne d'autres homogénéisations; il y a avantage à représenter des variétés ou des espaces par des équations  $\Phi(x^i) = 1$  avec  $\Phi$  homogène. De même les équations  $F(p^i) = 1$ , construites à partir d'un  $ds$ , sont analogues à l'équation de Jacobi *homogénéisée*. De là à remplacer les  $p^i$  par divers symboles différentiels, toujours sous l'influence de groupes linéaires dont les manifestations les plus simples sont attachées aux opérations  $x^i$ ,  $\partial/\partial x^i$  et à la combinaison eulérienne  $x^i \partial/\partial x^i$ , il n'y a évidemment qu'un pas. A ce propos, l'auteur cite l'article *Fronts d'ondes et corpuscules* que j'ai publié dans *L'Enseignement mathématique* en 1932. Il fait d'ailleurs beaucoup d'autres citations concernant des travaux de Géométrie projective. Le fascicule est gros de grandes conséquences qu'on ne tardera sans doute pas à développer au point de vue physique.

**112.** — Sir Arthur EDDINGTON. *Sur le Problème du Déterminisme*. Adapté de l'anglais par Eugène Néculcéa (Physique générale. Direction Paul Langevin. 26 pages. 1934. Prix: 8 francs).

Le fascicule 56 était déjà une adaptation de l'anglais due à M. Néculcéa. Nous devons maintenant, au même et sympathique traducteur, la possibilité de lire en français quelques pages de philosophie se rapportant à la question déterministe. Nous sommes de ceux qui croyons la question tranchée. Le déterminé, l'analytique, le temporel ne sauraient suffire à représenter toutes choses et tous états de conscience. La Science connaît maintenant le progrès de l'indéterminisme, du non-analytique, de l'extratemporel. La loi indéterministe, d'abord tolérée, a fini par vivre, rien qu'avec ses propres moyens, dans le domaine phénoménal malgré quelques lignes célèbres, dues à

Laplace, qui semblaient imposer à l'Univers un caractère analytique pré-déterminé.

Les électrons ont une réalité indéniable. Ils peuvent être comptés. Cependant tout objet que je me représente comme ayant une forme, une position, une vitesse, ne peut être un électron. Le Principe d'incertitude est un arrangement astucieux qui nous empêche de trouver plus que nous ne devons connaître. Il est édifiant de suivre Sir Arthur Eddington en de telles discussions auxquelles nous avons été préparés par notre grand Henri Poincaré.

A. BUHL (Toulouse.)

Alex. VÉRONNET. — **Le Calcul vectoriel. Cours d'Algèbre de Mathématiques spéciales et de Mathématiques générales.** Préface par Henri Villat. — Un volume gr. in-8° de XVIII-252 pages. Prix: 50 francs. Gauthier-Villars & C<sup>ie</sup>. Paris, 1933.

Excellent exposé qui m'a tout d'abord rappelé les *Applications of the Differential Calculus*, de A. J. Mc Connel, dont l'analyse a été faite ici (30<sup>me</sup> année, 1931, p. 306). Je ne dis pas que les deux ouvrages s'équivalent point par point et il y a certainement les plus grandes chances pour que M. Véronnet se soit tiré d'affaire sans s'inspirer de l'ouvrage anglais mais, dans les deux cas, l'idéal est le même: faire un enseignement élémentaire qui ait, tout de suite, un caractère vectoriel et tensoriel de manière à ce que ce caractère apparaisse comme une chose toute naturelle lorsque plus tard on abordera la Physique théorique. Il est vrai d'ailleurs que le volume eut pour premier substratum une traduction du *Calcul vectoriel* de Coffin; en ces matières, la France en est toujours à suivre des inspirations étrangères mais M. Véronnet doit être remercié et honoré comme ayant fait de son mieux pour remédier à cet état de choses.

Nous nous trouvons maintenant dans une Algèbre vectorielle qui n'a qu'à peine besoin de notations nouvelles. Une seule lettre suffit pour représenter une quantité réelle positive ou négative, une seule  $z$  suffit aussi pour représenter  $x + iy$ . Une seule doit suffire, sans débauche de flèches ou de tirets supérieurs, pour représenter un nombre vectoriel à  $n$  paramètres.

Il y a là une science de l'intelligence dont notre espace euclidien ne donne qu'une traduction simplifiée et faussée (p. 35). Voilà qui est parler sans ambages. Bravo. Et l'on comprend tout de suite ce qu'est la Gravifique: la Science qui a enfin trouvé le moyen général de tenir compte de l'influence des champs sur les étalons, ou instruments de mesure quelconques, qui s'y trouvent. Et quelle mélancolie de penser qu'avant Einstein on ne savait pas résoudre cette question, que, de plus, la géométrie des  $ds^2$  de Riemann, qui permettait de la résoudre, était considérée comme une théorie d'une abstraction tout à fait irréelle et n'était connue que de très rares géomètres.

Il y a un produit vectoriel avec lequel on peut bâtir immédiatement les déterminants. Avec  $n$  nombres vectoriels  $a_i$ , on pourra définir un nombre vectoriel du second ordre  $\xi_i \cdot a_i$  avec  $i$  indice de sommation. C'est là une ouverture conduisant aux transformations ou groupes linéaires. Cette analyse s'étend aux formes quadratiques, à des polynômes algébriques et à leurs transformations tayloriennes. Les variables complexes, leur rapport avec la géométrie sphérique sont des illustrations simples de préliminaires beaucoup plus généraux.

L'Analyse vectorielle est surtout intégrale. Sa vraie nature ne peut être

peinte qu'avec les déterminants provenant des transformations d'intégrales multiples. Belle occasion de magnifier à nouveau les déterminants. Pour les intégrales multiples on ne peut aller bien loin dans un enseignement élémentaire mais enfin on peut donner aux champs d'intégration une structure physique en réservant la rigueur absolue pour plus tard. Nous pouvons ainsi faire connaissance avec les formules de Riemann, de Green, de Stokes. On ne saurait prêter trop d'attention à cette dernière; c'est le prototype des formules intégrales de la Géométrie générale et de la Gravi-fique, ce que M. Elie Cartan a excellemment dit. Aussi je regrette toujours de voir cette formule coupée en deux pour raison typographique et développée ainsi sous une forme où elle n'a pas toute sa beauté et toute sa valeur intuitive. Comme je l'ai déjà dit, à propos de l'ouvrage de Mc Connell, pourquoi ne pas l'écrire

$$\int_c (X dx + Y dy + Z dz) = \int_s \int_s \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} d\sigma .$$

Je ne connais pas de plus beau mariage entre le déterminant et l'intégrale. De plus, le déterminant symbolique ainsi employé, lorsqu'on l'étend au quatrième ordre, donne, sans coup férir, les équations de Maxwell.

M. Véronnet termine, toujours excellemment, par les symboles de Riemann et de Christoffel. Il nous montre, très rapidement, comment on passe d'Euclide à Elie Cartan avec l'intermédiaire de Riemann. Et les notations sont toujours d'une étonnante simplicité.

A. BUHL (Toulouse).

Pierre COPEL. — **Eléments d'Optique géométrique**, à l'usage des Candidats aux Grandes Ecoles. — Un volume in-8° de X-206 pages et 128 figures. Prix : 25 francs. Gauthier-Villars et C<sup>ie</sup>. Paris, 1933.

Ceci est un livre de pédagogie, plutôt élémentaire. Il traite d'une science de première approximation puisque si l'on essaie de réaliser des faisceaux lumineux de plus en plus filiformes qui, à la limite, seraient des lignes, on se heurte à des phénomènes de diffraction qui précisément nous jettent hors de l'Optique géométrique. Mais enfin, si l'on prend cette dernière pour ce qu'elle peut être, il est certain qu'on y trouve des choses simples et intéressantes telles la loi de Descartes, la notion de chemin optique avec le théorème de Fermat et surtout le théorème de Malus d'après lequel des faisceaux lumineux normaux à une surface ne perdent point cette propriété après réflexions ou réfractions. Ce théorème a peut-être fait travailler les géomètres plus que les physiciens. M. Copel ne manque d'ailleurs pas de signaler les difficultés qui ahurissent des candidats auxquels on parle trop savamment de surfaces d'ondes et de lignes de courbure; il a essayé d'être plus simple et, avec beaucoup de figures à l'appui, d'être élégant tout de même.

Les systèmes optiques que l'on peut obtenir par combinaisons de miroirs, de dioptries, de prismes, ... sont théoriquement en nombre infini et pratiquement en nombre très considérable; nous ne pouvons insister sur les détails.

Il faut apprendre à tout construire à l'aide des principes initiaux et sans se charger exagérément la mémoire, ce à quoi le livre convie.

Pour les systèmes centrés (ou de révolution) il est très explicitement question d'une approximation, dite de Gauss; surtout quant à la conservation des caractères rectilignes, ce n'est pas évident du tout. Et cependant une seconde science de miroirs, de dioptrés, de lentilles suit avec une logique remarquable.

Les résultats mathématiques sont parfois un peu écourtés comme (p. 3) pour la fonction  $y = x^3$  discutée, pour  $x = 0$ , sans dérivée seconde. La science actuelle est un peu lestement jugée, les mécaniques *anciennes* comprenant la mécanique relativiste. Celle-ci serait fondée aussi sur la notion de point matériel et ne s'appliquerait pas à l'intérieur de l'atome. C'est vraiment trop sommaire. Il y a une mécanique microcosmique relativiste. Mais tout cela nous entraînerait vite fort loin d'un programme élémentaire auquel l'ouvrage préparera les candidats dans de fort bonnes conditions.

A. BUHL (Toulouse).

Frank MORLEY and F. V. MORLEY. — **Inversive Geometry.** — Un volume in-8° de XII-274 pages et 67 figures. Prix: 16 s. net. G. Bell and Sons Ltd. Londres, 1933.

Ce bel exposé, quoique publié à Londres, nous vient de l'Université de Californie. C'est de la géométrie en général non-euclidienne mais toujours mise en rapport étroit avec la géométrie euclidienne. On quitte celle-ci naturellement, sans heurts, quand ses groupes fondamentaux se présentent sous des aspects qui incitent à d'évidentes généralisations. Naturellement la ligne fondamentale de la géométrie inversive est le cercle, le mouvement fondamental par excellence est la rotation; c'est l'occasion de retrouver de fort anciennes merveilles telles que les polygones réguliers et la cyclide de Dupin, de profiter aussi de toutes les anciennes intuitions, de manière à ne pas dépayser le néophyte, mais finalement de situer le tout dans le monde cyclique qui convient à de tels objets.

Il y a là vingt et un chapitres impossibles à analyser en détail mais les titres de certains: X. Flow, XI. Differential Geometry, XVII. Rational Curves, XX. Cremona Transformations, éveillent tout de suite la curiosité comme étant très courts alors que le sujet invoqué pourrait donner, à lui seul, un gros volume. On constate alors que ce sont l'inversion et les propriétés circulaires qui ressortent très brièvement, et d'une manière particulièrement élégante, pour servir d'amorce originelle — et souvent originale — à ces immenses disciplines.

Nous sommes également, d'une manière très actuelle, dans le domaine de variables conjuguées représentées, par exemple, l'une par  $x$  et l'autre par la même lettre surmontée d'un tiret.

A l'homologie  $y = ax + b$  correspond l'antilogie avec  $y$  et  $b$  surlignés. De même pour l'homographie  $\alpha xy + \beta x + \gamma y + \delta = 0$ , à laquelle correspond l'antigraphie avec  $y$  surligné. Les invariances anharmoniques subsistent ainsi sous un double caractère. Les invariants quadratiques permettent, avec Kirkman, de prolonger les configurations pascaliennes.

L'équation générale du troisième degré est mise en relation, sur une figure très simple, avec la trisection angulaire. La géométrie sphérique, grâce à un ingénieux usage de déterminants, livre des propriétés polygonales

dont certaines peuvent ensuite être reprises dans le plan, ce dernier, à cause de ses éléments à l'infini, manquant de l'absolue perfection offerte par la sphère.

C'est le continu usage des imaginaires et de représentations réelles y associées qui conduisent aux flux et aux tourbillons, ces derniers étant bien de la nature d'une rotation. Et ceci ne va pas sans représentation conforme usant de fonctions elliptiques. M. Henri Villat pourrait en témoigner bien qu'il ne soit pas cité.

A propos des polygones réguliers apparaissent des pages et surtout des figures extrêmement curieuses. En cherchant à nouer des bandes de papier, tout comme on ferait avec de simples ficelles, on peut donner aux nœuds des configurations polygonales régulières. Plus loin nous trouvons une cinématique de systèmes articulés déjà conçue, en un cas particulier, par L. de Vinci. Le cercle des neuf points, les circonférences pédales permettent de reprendre la géométrie du triangle d'une manière généralisée qui pourrait rejoindre la géométrie isotrope de M. Haarbleicher dont il sera question dans l'article bibliographique ci-après.

Les courbes  $y = R(x)$ , où  $R$  est une fraction rationnelle, peuvent, après recours éventuel à l'inversion, être décrites cinématiquement de manière très simple. Ceci est une ouverture sur certaines propriétés des coniques d'où l'on passe aux courbes épi ou hypocycloïdales, notamment aux cardioïdes et à l'hypocycloïde à trois rebroussements ou deltoïde. Parmi les transformations de Cremona, il faut surtout citer celles de Geiser et de Bertini. Au delà des roulettes précédentes, on atteint la «  $n$ -line » qui ne peut être considérée comme abstraite, tant elle est génératrice de merveilleuses configurations où n'interviennent que droites et cercles.

J'ai peu insisté sur les géométries elliptiques, hyperboliques, paraboliques qui sont à la base des travaux de Klein et de Poincaré. Ce sont là choses qui maintenant se trouvent partout et, s'il ne s'était agi que de cela, un nouveau livre n'aurait peut-être point été nécessaire. Mais celui-ci sera plus qu'utile puisqu'aux considérations fuchsienues et kleinéennes, il joint une géométrie élémentaire et préliminaire, d'une suprême élégance, d'où l'on partira facilement vers les considérations fonctionnelles élevées.

A. BUHL (Toulouse).

André HAARBLEICHER. — **De l'emploi des droites isotropes comme axes de coordonnées.** Nouvelle Géométrie du Triangle. — Un volume gr. in-8° de VI-80 pages. Prix : 13 francs. Gauthier-Villars & C<sup>ie</sup>. Paris, 1931.

M. André Haarbleicher, collaborateur de *L'Enseignement mathématique*, dans un récent article *Sur les polaires généralisées et courbes moyennes* (31<sup>me</sup> année, 1932, p. 230) a précisément eu l'occasion de citer le présent ouvrage sur les droites isotropes considérées comme axes. Cet ouvrage mérite, à coup sûr, d'être analysé pour lui-même. Il peut s'adresser à de bons élèves de spéciales et n'être qu'un fragment de leur cours; mais le fragment est d'importance et d'une grande élégance. Les D. I. (droites isotropes) sont définissables par rapport à des axes quelconques, mais la réciproque n'est pas vraie: le plan réel n'est pas défini par rapport aux D. I. Une droite quelconque  $a$ , par rapport à deux axes rectangulaires, un coefficient angulaire  $m$  qui, après transformation des coordonnées, devient  $m'$ . Pour les D. I. le coefficient  $i$  reste  $i$ . Pour achever de définir le plan, il

faut un repérage supplémentaire, soit un triangle de position. On parvient ainsi à une géométrie véritablement isotrope ayant des moyens intrinsèques qui, en général, échappent dans des emplois fortuits des D. I.

La géométrie du triangle est abondamment favorisée par la méthode de M. Haarbleicher. Les droites de Simson, leurs enveloppes, leurs relations avec le cercle des neuf points, leur généralisation par obliquité offrent des problèmes qui se traitent avec une simplicité presque déconcertante. Les trisectrices du triangle donnent de nombreuses configurations ponctuelles dont certaines déjà étudiées par M. R. Bricard. Le cercle polaire d'un triangle par rapport à un point conduit, toujours avec des calculs fort réduits, à des lieux cubiques.

On aboutit enfin au Problème de Darboux: *On considère les coniques circonscrites à un triangle telles que les normales aux trois sommets du triangle soient concourantes en P. Lieu du pied de la quatrième normale issue de P.* Cet énoncé date de 1866. Des méthodes analytiques plutôt improvisées donnèrent un lieu sur le seul degré duquel on commença par ne pas s'entendre. Douzième ? Quinzième ? Septième ? Ceci provenait de ce que ce lieu était décomposable et que, d'une méthode à l'autre, on n'obtenait pas les mêmes parties de la décomposition. Il semble bien que M. Haarbleicher obtienne tout et que le problème soit particulièrement apte à se laisser traiter complètement par sa méthode. Il met même le lieu du septième ordre en relation avec une quintique. Procédés remarquables. Jolis résultats.

A. BUHL (Toulouse).

Josef v. WOYCIECHOWSKY. — **Paul Sipos.** Un volume in-8° de 124 pages.

Prix: 5 pengös. F. Kilián, IV. Váci-u. 30. Budapest, 1932.

Ce travail, très consciencieux et très approfondi, concerne la vie et les œuvres d'un mathématicien, Paul Sipos (1759-1816) qui semble être inconnu en France et même en beaucoup d'autres pays. D'ailleurs le titre ci-dessus indiqué est suivi de ce sous-titre: *Ein ungarischer Mathematiker des ausgehenden 18. Jahrhunderts. Ueber seine Ellipsenrektifikation mittels Kochleide und seine alleinstehenden Logarithmisch-trigonometrischen Tafeln mit unveröffentlichten Briefen von Bode und Kästner.*

Paul Sipos paraît être le premier mathématicien hongrois qui ait laissé un ouvrage saillant et semblant digne de l'époque où il fut écrit; il semble aussi avoir hérité, au moins partiellement, de l'esprit de Daniel et de Jean Bernoulli et ce par l'intermédiaire du Professeur J. Kováts. Il étudie les arcs de cercle isométriques et les rectifications approchées du cercle et de l'ellipse, recherches que l'Académie de Berlin récompensa par une médaille d'or. La meilleure circonférence approchée de l'ellipse semble avoir la forme

$$4 \frac{(a+b)^3}{(a-b)^2} \cos \frac{\pi \sqrt{ba}}{a+b}$$

ceci par comparaison avec 39 approximations analogues dont 22 sont développées en séries. En 1807, Sipos publia des tables trigonométriques, à dix décimales, d'une construction vraiment irréprochable. Il fut le premier, en Hongrie, à employer les divisions décimales du cadran. Le collège célèbre de Sárospatak lui est redevable d'un excellent plan d'études. Comme

philosophe, il fut un habile commentateur de Kant et de Fichte. Il fut également grand orateur ecclésiastique et très bon poète.

Un tel nom méritait certainement d'être tiré de l'oubli et c'est ce qu'a fait M. Josef v. Woyciechowsky en un remarquable exposé en langue hongroise suivi d'un résumé en allemand. Le tout peut être utilisé aisément grâce aux formules.

La bibliographie est très riche. Il y a plusieurs centaines d'auteurs cités comme ayant eu quelque commerce explicite avec Sipos ou comme ayant travaillé depuis, plus ou moins consciemment, à des sujets amorcés par lui. En France, la formule ci-dessus semble avoir été cotoyée de très près par M. R. Soreau. Il est certain que lorsqu'on peut faire de telles exhumations avec autant de précision et d'abondance dans les détails, on rend un indéniable service à la Science ou, tout au moins, à l'histoire de celle-ci.

A. BUHL (Toulouse).

A. BUHL. — **Gravifiques, Groupes, Mécaniques** (Mémorial<sup>1</sup> des Sciences mathématiques dirigé par Henri Villat; fasc. LXII). — Un fascicule gr. in-8° de 62 pages. Prix : 15 francs. Gauthier-Villars & C<sup>ie</sup>. Paris, 1934.

Les premières idées développées dans ce fascicule proviennent de la nouvelle théorie d'Einstein publiée en 1929 et faisant appel aux espaces à torsion, le rôle de la courbure proprement dite se trouvant alors diminué au point de laisser place à la notion de parallélisme à distance. M. Buhl tient surtout à montrer que ce nouveau point de vue n'est pas extrêmement éloigné de l'ancien, que tous deux relèvent de relations fondamentales de même structure et comprenant d'ailleurs comme ces particuliers les relations structurales fondamentales de la Théorie des groupes continus. Pour faire ces rapprochements, il n'y a qu'à puiser dans les travaux de M. Elie Cartan, dans ceux de M. Tullio Levi-Civita sans en omettre d'autres, d'étendue moindre, tels ceux de MM. Eyraud et Lagrange où les analogies dont il s'agit ont été cependant pressenties. Et ces analogies confirment l'attitude philosophique de M. R.-H. Fowler qui n'hésite pas à juger les théories d'après les satisfactions esthétiques qu'elles nous donnent.

La Mécanique classique et d'autres mécaniques récentes, reposent surtout sur les équations canoniques; ces équations et les parenthèses de Poisson engendrent les groupes de fonctions d'où il est aisé de descendre aux groupes tout court. Nouvelles liaisons, presque évidentes quand le point de vue est convenablement choisi. Les groupes exigent le maniement d'exponentielles symboliques à multiplication non commutative. Campbell et Poincaré se révélèrent, à cet égard, des précurseurs quant à des développements fort analogues à ceux obtenus aujourd'hui, en Mécanique ondulatoire, par opérateurs hermitiens.

Les Espaces à canaux sont propres à guider des propagations indifféremment ondulatoires ou corpusculaires. C'est ici qu'avec encore un peu de travail, on arrivera à prendre contact avec les espaces de Finsler et les considérations sommairement mentionnées plus haut à propos du fascicule

<sup>1</sup> Le service de presse ne nous étant plus fait par l'éditeur, ni pour le *Mém. des Sc. math.* ni pour le *Mém. des Sc. phys.*, nous ne publierons dorénavant d'analyses relatives à ces publications que pour les fascicules dont un exemplaire aura été adressé, par l'auteur, à la Rédaction de la Revue.

de M. Delens. En attendant, les symboles de Laplace, de Jacobi, de Schrödinger sont unis très simplement en utilisant surtout des considérations d'homogénéité.

H. FEHR.

N. SALTYKOW. — **Méthodes modernes d'intégration des Equations aux dérivées partielles du premier ordre à une fonction inconnue** (Mémorial des Sciences mathématiques dirigé par Henri Villat; fasc. LXX). — Un fascicule gr. in-8° de 66 pages. Prix: 15 francs. Gauthier-Villars & C<sup>ie</sup>. Paris, 1934.

Encore un sujet où les équations canoniques s'imposent immédiatement et triomphent d'éclatante façon. Soit l'équation  $F(x_i, p_i) = 0$ . La différentielle de celle-ci est identiquement vérifiée par le système canonique (avec  $i$  variant de 1 à  $n$ )

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i}$$

qui admet  $2n - 1$  intégrales en  $x, p$ . Parmi ces intégrales, je puis en choisir  $n - 1$  qui, jointes à  $F = 0$ , permettront de déterminer des  $p_i$ , en nombre  $n$ , avec  $n - 1$  constantes arbitraires. Enfin  $dz = p_i dx_i$  doit permettre d'obtenir  $z$ , par intégration, avec  $n$  constantes. Ce sera l'intégrale *complète*. Mais que de rameaux vont se greffer rapidement sur cette souche archi-sèche!

D'abord il y a le choix souligné qui laisse le champ libre à une foule d'opérations, combinant des intégrales du système canonique. Ensuite il y a la question de l'*élément intégrable*  $dz$ ; il ne suffit pas de l'écrire comme ci-dessus pour que l'existence de  $z$  soit acquise. Il y a une question d'intégrabilité qu'on peut encore aborder par des méthodes fort diverses. Tout cela explique pourquoi un problème d'apparence assez élémentaire a été profondément travaillé, et sous des formes différentes, par d'illustres géomètres tels Jacobi, Cauchy, Bour, Lie, Joseph Bertrand. M. Saltykow fait d'abord l'historique du sujet et insiste beaucoup sur l'élément intégrable auquel correspond une équation aux différentielles totales quand l'équation  $F = 0$  contient explicitement la fonction inconnue. Il faut aussi étendre tout cela aux systèmes d'équations. C'est ce que fait l'auteur avec beaucoup d'élégance et grand emploi de déterminants fonctionnels; ces déterminants pourraient même servir à relier la question aux intégrales multiples et aux invariants intégraux mais elle est mise sous une forme qui se suffit à elle-même et qui semble avoir été choisie après de longues méditations. Il ne fallait pas retomber dans des considérations à la Sophus Lie, très générales, à coup sûr, mais qui submergent souvent des régions dont l'abord direct est simple.

Le fascicule résume et prolonge le volume fait, en 1925, sur le même sujet, avec des conférences données en Belgique sous les auspices de la *Fondation Universitaire* (voir *Ens. math.*, 25<sup>me</sup> année, 1926, p. 138). Il complète également un premier exposé fait dans le fascicule L du même *Mémorial* et déjà analysé ici avec le plus grand intérêt (30<sup>e</sup> année, 1931, p. 311).

La publication du fascicule retardera peut-être sur celle de ces lignes, la présente analyse ayant été faite sur épreuves.

A. BUHL (Toulouse).



Lothar KOSCHMIEDER. — **Variationsrechnung I** (Sammlung Göschen, 1074).  
— Un volume in-16, relié, de 128 pages et 21 figures. Prix: RM. 1,62.  
Walter de Gruyter & Co. Berlin W 10 et Leipzig, 1933.

Toujours ces merveilleux petits volumes dont on a cherché, semble-t-il, à réduire le format le plus possible! Nous avons analysé le 1059, de G. Hoheisel, l'année dernière (p. 320). Nous sommes maintenant au 1074. Il est presque heureux que nous n'ayons pas à rendre compte de tous. Manifestement la place nous manquerait.

Le livre, après les préliminaires les plus simples, nous conduit tout de suite aux choses d'utilité moderne. Page 32, nous trouvons les géodésiques des espaces de Riemann avec les symboles de Christoffel. Puis ce sont les procédés de Jacobi et de Weierstrass qui devaient être perfectionnés par Kneser et par Hilbert surtout dans le cas de limites mobiles.

Les extrema liés, les enveloppes d'extrémales sont étudiés avec nombreux exemples et nombreuses figures à l'appui. Les méthodes sont éclectiques et s'inspirent aussi bien des *Leçons* publiées par F. N. M. Moigno et L. L. Lindelöf, en 1861, que des ouvrages didactiques les plus récents concernant la Physique théorique.

Les questions de transversalité, comme celles des enveloppes d'extrémales, sont celles qui conduisent, le plus aisément peut-être, aux travaux de Kneser, lesquels ont eu une si grande et si féconde influence sur M. Jacques Hadamard. Or il semble bien que le monument élevé par ce dernier puisse trouver un accès, simple et agréable, dans le petit mais si substantiel ouvrage de M. Lothar Koschmieder. Si l'on ajoute que celui-ci est Professeur à l'Université technique de Brunn on comprendra aussi pourquoi il y a, dans son exposé, de si nombreux exemples mécaniques et physiques. D'ailleurs la Physique théorique peut être abordée d'une foule de manières; les méthodes variationnelles, les invariants intégraux, les formules stokiennes s'équivalent. Dans des articles voisins, nous avons rencontré les Espaces de Finsler; le succès de leur théorie tient peut-être à ce que les lignes essentielles de celle-ci remettent en jeu, sous d'originales espèces géométriques, les fondements mêmes du Calcul des variations. C'est donc un avantage certain que de posséder une vue d'ensemble de ce Calcul, sans aller jusqu'à se perdre dans les gros ouvrages. Certes l'auteur, donnant ceci comme un tome I, semble promettre un tome II. Mais ce sera certainement encore de la science habilement condensée.

A. BUHL (Toulouse).

Abbé POTRON. — **Exercices de Calcul différentiel et intégral**. Solutions des Problèmes posés au C.D.I. dans les Facultés de France en juin-juillet 1933. — Un cahier in-4° de IV-44 pages. Prix: 10 francs. Hermann & C<sup>ie</sup>. Paris.

Le titre et le sous-titre de ce Cahier montrent suffisamment ce dont il s'agit.

Dans une première partie, les énoncés sont donnés intégralement, et les solutions simplement indiquées.

Dans une deuxième partie, sont développés les raisonnements et calculs qui présentent une difficulté spéciale, ou un intérêt particulier, ou qui sont une application moins immédiate des théories classiques. Les questions sont groupées dans un ordre méthodique.

Tout ceci fait heureusement suite aux *Exercices* déjà publiés par M. l'abbé Potron; l'auteur semble d'ailleurs se disposer à poursuivre l'œuvre et à composer un cahier par session d'examen. Ce premier cahier a un aspect provisoire; il semble que ce soit de la dactylographie reproduite par la lithographie mais ceci augmente peut-être la valeur d'un tel texte. On aurait pu collectionner les problèmes pour en faire un ouvrage imprimé plus volumineux qui viendra probablement plus tard; au lieu de cela, les choses sont prises sur le vif, provisoirement, mais dans l'intérêt des bons élèves qui pensent qu'il n'y a jamais lieu d'attendre pour réunir un nombre aussi grand que possible de bons exercices.

A. BUHL (Toulouse).

G. ILIOVICI et A. SAINTE-LAGUË. — **Mathématiques appliquées**, à l'usage des Ingénieurs, des Elèves-Ingénieurs et des Etudiants des Facultés des Sciences. Calcul intégral. Calcul numérique. Deux cents Problèmes résolus. — Un volume gr. in-8° de VIII-240 pages et 114 figures. Prix: 40 francs. Librairie de l'Enseignement technique L. Eyrolles, Paris, 1933.

Nous avons déjà analysé ici (p. 116 et, tome précédent, p. 319) l'ouvrage en deux volumes, dû aux mêmes auteurs et intitulé *Algèbre et Analyse*. En voici maintenant un extrait spécialement développé en vue des applications. Le rapprochement est des plus heureux puisque cet extrait peut se suffire à lui-même tout en comportant, derrière lui, un exposé plus vaste et plus approfondi auquel l'étudiant pourra avoir recours sans changer d'esprit. Le titre de l'ouvrage, ci-dessus reproduit, est d'ailleurs accompagné de sous-titres indiquant les subdivisions du Calcul intégral: Aires planes et arcs, Volumes et aires de révolution, Masses et Centres de gravité. Moments d'inertie. De même pour le Calcul numérique: Valeur numérique d'une fonction, Calcul des séries, Racines d'une équation, Calcul intégral, Calcul graphique.

L'abondance des figures montre l'importance donnée aux méthodes intuitives. L'esprit pratique n'exclut pas l'élégance, ce que l'on peut remarquer, par exemple, à propos de la formule des trois niveaux. Mais l'exposé commence à revêtir un mérite tout particulier dès qu'il s'agit de calcul numérique. Les maniements logarithmiques sont suivis par la pratique de la règle à calculs. Les erreurs, absolue et relative, sont examinées dans de nombreux cas. Les séries à terme  $u_n = s_n - s_{n-1}$  sont moins tautologiques qu'on ne pense. La convergence lente peut être améliorée très élémentairement. Les méthodes d'intégration approchées sont aussi intéressantes que les méthodes exactes. Le calcul graphique est souvent ingénieusement rectiligne, comme dans la méthode de l'orthogone appliquée à une équation algébrique. Il y a une dérivation graphique plus délicate que l'intégration mais d'autant plus remarquable. L'intégration des équations différentielles est amorcée sur le même terrain.

Et enfin il y a 210 problèmes résolus parfois sommairement mais toujours avec la tendance du jusqu'au bout. Dans *Algèbre et Analyse*, il y avait 1206 énoncés, ce qui nous fit évoquer le formidable ouvrage qui sortirait de là si l'on tentait de publier des solutions. Il semble que le projet commence à se réaliser, par le côté le plus pratique mais, quoiqu'il en soit, les auteurs sont indéniablement de ceux qui savent faire travailler.

A. BUHL (Toulouse).

C. DE LA VALLEE POUSSIN. — **Intégrales de Lebesgue. Fonctions d'ensemble. Classes de Baire.** Leçons professées au Collège de France. (Collection de Monographies sur la Théorie des fonctions.) Deuxième édition. — Un vol. in-8° de xii-193 pages; Fr. 35.—; Gauthier-Villars & C<sup>ie</sup>, Paris, 1934.

Les belles leçons professées au Collège de France par le savant mathématicien belge sont bien connues de tous ceux qui s'intéressent à la théorie des fonctions. Nous les avons analysées dans cette Revue (19<sup>me</sup> année, p. 119-120). Qu'il nous suffise de signaler en quoi cette nouvelle édition diffère de la première; nous ne saurions mieux le faire qu'en reproduisant un *extrait de la Préface* de l'auteur:

« Nous avons traité, dans cette nouvelle édition, les mêmes matières que dans la première et dans le même ordre. Mais nous avons ajouté hors cadre à la fin du volume, deux Notes substantielles: l'une assez étendue, sur la représentation paramétrique des ensembles mesurables (B), l'autre, plus courte, sur les extensions de l'intégrale de Stieltjes. Ce ne sont que des exposés fragmentaires et, s'ils peuvent nous suffire, c'est que deux monographies, récemment parues dans cette même collection, comblent les lacunes de ces exposés: la deuxième édition des *Leçons sur l'intégration* de M. H. Lebesgue (1928) et les *Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications* de M. N. Lusin (1930). Le lecteur pourra y étudier, avec tous les développements qu'elles comportent, les belles questions que nous n'aurons fait qu'effleurer. »

« Ainsi, sauf l'addition de quelques compléments nécessaires, cette deuxième édition reste voisine de la première par le fond, mais elle a subi, en divers endroits, quelques remaniements de forme assez importants, tous dus à la même préoccupation, celle d'accentuer le plus possible le caractère réaliste des énoncés et des démonstrations. J'ai voulu prévenir toute possibilité d'interprétation idéaliste, proscrire tout recours, fût-il seulement apparent, à l'axiome du choix et ne fonder les démonstrations d'existence que sur des procédés de construction effectifs rigoureusement précisés. Cela correspond sans doute à une certaine évolution dans mes idées, mais je me suis abstenu de tout commentaire philosophique. Je n'aurais, en effet, rien à ajouter à ceux que l'on trouvera dans les ouvrages de MM. Lebesgue et Lusin que j'ai déjà cités, auxquels il convient, sous ce rapport, de joindre un troisième volume de la même collection, les *Leçons sur les nombres transfinis* de M. W. Sierpinski (1928). »

L. BIEBERBACH. — **Vorlesungen über Algebra** unter Benutzung der dritten Auflage des gleichnamigen Werkes von Gustav BAUER, in fünfter vermehrter Auflage. — Un vol. in-8° de x-356 pages, avec 15 figures et une planche; RM. 14.—; B. G. Teubner, Leipzig et Berlin, 1933.

Cet ouvrage comprend les chapitres fondamentaux de la théorie des équations algébriques dont la connaissance est indispensable aux étudiants en mathématiques. Ce sont les méthodes classiques que l'on doit à Euler, Lagrange, Cauchy, Gauss, Sturm, Abel, Galois, etc. Une large place est accordée à la résolution numérique et aux méthodes graphiques. La méthode d'approximation de Graeffe fait l'objet d'un chapitre spécial. Bien que M. Carvallo l'ait fait connaître en France, en 1896, dans un opuscule intitulé « Méthode pratique pour la résolution des équations algébriques ou trans-

cendantes », le procédé de Graeffe n'est guère mentionné dans les ouvrages de langue française. Ceux-ci, par contre, donnent la méthode par itération ou approximations successives qu'il conviendrait de signaler aussi dans une prochaine édition du présent ouvrage.

L'origine de ce traité remonte aux leçons professées par G. Bauer à l'Université de Munich de 1870 à 1897. Les éditions successives ont été mises en harmonie avec les progrès de la science par K. Doehlemann (2<sup>me</sup> et 3<sup>me</sup>), puis par M. Bieberbach. C'est ce qui explique le succès de cet ouvrage dont la quatrième édition a été épuisée en moins de cinq ans.

H. FEHR.

H. HASSE. — **Höhere Algebra**. I, Lineare Gleichungen. (Sammlung Goeschen.) Zweite, verbesserte Auflage. — Un vol. in-16 de 152 p.; Walter de Gruyter & C<sup>ie</sup> Berlin, 1933.

Dans ce petit ouvrage, dont le premier volume vient de paraître en seconde édition, revue et complétée, M. Hasse, professeur à l'Université de Marbourg, initie le lecteur aux théories de l'Algèbre moderne. Le problème fondamental repose sur les notions de corps ou domaine algébrique et de groupes. Elles sont établies avec beaucoup de soin. La seconde partie du volume est consacrée à l'Algèbre des formes linéaires.

K. MENNINGER. — **Zahlwort und Ziffer**. Aus der Kulturgeschichte unserer Zahlsprache, unserer Zahlschrift und des Rechenbretts. — Un vol. in-8° de 365 pages avec 170 figures; broché RM. 7.—; Ferdinand Hirt, Breslau, 1934.

Quelle est l'origine de la notion de nombre et quelle a été l'évolution de la numération chez les différents peuples depuis la plus haute antiquité jusqu'à nos jours? Tel est l'objet du présent ouvrage dont la lecture, toujours captivante, est accessible à tout homme cultivé possédant la langue allemande.

L'auteur examine tour à tour la diversité des bases, la numération parlée et la numération écrite, les symboles et les abaques. Richement illustré, son exposé apporte des renseignements très précieux sur une foule de questions qui sont de nature à intéresser les élèves.

Dans son ensemble l'ouvrage de M. Menninger constitue une belle contribution à l'histoire culturelle dans ses rapports avec le développement de la notion de nombre.

H. FEHR.

W. LIETZMANN. — **Kegelschnittlehre** (Mathematisch-physikalische Bibliothek, Reihe I, Bd. 79.) — Un vol. in-16 de 46 pages, avec 36 figures, cart.; RM. 1,20; B. G. Teubner, Leipzig et Berlin, 1933.

Ce nouveau fascicule de la « Bibliothèque mathématique et physique » de la Maison Teubner permet à l'élève de faire une révision rapide des notions relatives aux sections coniques. L'auteur rappelle quels sont les différents points de vue auxquels on peut se placer dans le choix de la définition et il montre quelles sont les propriétés fondamentales qui en découlent directement.

En géométrie plane on considère d'abord l'ellipse, l'hyperbole et la para-

bole comme trois lieux géométriques distincts; puis ce sont les sections planes d'un cône et d'un cylindre de révolution (propriété commune, théorème de Dandelin). En perspective, c'est l'étude de la projection d'un cercle; en géométrie projective, l'étude des propriétés de deux formes homographiques; en géométrie analytique, l'étude des courbes du second ordre. Transformations affines et transformations homographiques.

Signalons à ce propos l'intéressant article « Les coniques dans l'Enseignement secondaire » de M. Lebesgue, Membre de l'Institut, dans *L'Enseignement scientifique* (N° 61, octobre 1933, Léon Eyrolles, éditeur, Paris).

A. TIMPE. — **Einführung in die Finanz- und Wirtschaftsmathematik.**

Un vol. in-8° de 217 pages, avec 70 figures et six tableaux; broché, RM. 9.—; Julius Springer, Berlin, 1934.

Les grandes Ecoles techniques possèdent, pour la plupart, un enseignement permettant aux futurs ingénieurs de s'initier à la théorie et à la pratique des opérations financières. A Berlin cet enseignement est donné par M. le prof. A. Timpe dont les leçons viennent d'être publiées par la Maison Springer.

Cette introduction aux mathématiques financières et à la technique commerciale comprend un exposé des méthodes relatives aux problèmes fondamentaux concernant le change, les rentes, les emprunts et les amortissements, les prix de revient et les bénéfices. Puis viennent deux chapitres traitant du Calcul des probabilités et des théories modernes de la statistique mathématique et de la corrélation. Cette dernière partie donne un intérêt tout particulier à cet ouvrage dont la lecture sera profitable à tous ceux qui désirent compléter leurs connaissances dans le domaine des mathématiques financières.

## BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

### 1. Livres nouveaux :

**Actualités scientifiques et industrielles.** — Fasc. in-8, en vente séparément. Librairie Scientifique Hermann & C<sup>ie</sup>, Paris:

P. CURIE. — *Les Rayons  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  des corps radioactifs en relation avec la structure nucléaire.* — 40 p.; 12 fr.

A. MAGNAN et A. PLANIOL. — *Sur l'excédent de puissance des oiseaux.* — 25 p.; 8 fr.

A. MAGNAN et A. PLANIOL. — *Sur l'excédent de puissance des insectes.* — 26 p.; 8 fr.

L. BRILLOUIN. — *La méthode du champ self-consistent.* — 46 p.; 12 fr.

P. SWINGS. — *Spectres moléculaires. Etude des molécules diatomiques.* — 51 p.; 14 fr.

L. GODEAUX. — *Questions non résolues de Géométrie algébrique.* — 24 p.; 8 fr.

V. A. KOSTITZIN. — *Symbiose, parasitisme et évolution (Etude mathématique).* — 44 p.; 15 fr.