BIBLIOGRAPHIE

Louis DE BROGLIE. — **Théorie de la Quantification dans la nouvelle Mécanique.** — Un vol. gr. in-8° de XXVIII-250 pages. Prix: 70 francs. Hermann et Cie. Paris, 1932.

Nous commençons ces analyses bibliographiques par celles de publications récentes relatives à la Physique théorique. Voilà qui n'est déjà pas conforme aux idées d'autrefois qui donneraient plus volontiers la première place aux Mathématiques pures et chercheraient à ne voir que des *applications* dans le domaine physique. La réalité actuelle inverse cependant les choses en imposant, par exemple, le recours aux redoutables subtilités des théories matricielles et groupales lorsqu'on veut poursuivre mécaniquement les énigmes et les bizarreries qui apparaissent à l'échelle atomique ou corpusculaire. Et qui s'étonnera de voir, en tête des présentes pages, le nom de M. Louis de Broglie.

La quantification, avec Planck, fut d'abord une théorie d'états distingués mais entre lesquels notre pensée accrochait encore des bribes de continuité représentées par des phénomènes intermédiaires rapides. La quantification d'aujourd'hui est une franche théorie d'opérateurs à structure discontinue, en laquelle on délaisse résolument les idées qui, à l'échelle moyenne, semblent cependant les plus intuitives et les plus légitimes. Il faut abandonner l'idée de *forme*, donc le postulatum d'Euclide, et l'on ne peut jamais connaître, à la fois, la figure et le mouvement (incertitudes de Heisenberg).

L'équation fondamentale est toujours celle de Schrödinger; comme nous l'avons déjà signalé, son élaboration ne va pas sans quelques difficultés et les cas de *dégénérescence*, où plusieurs *fonctions propres* correspondent à une seule *valeur propre*, ne sont pas encore aussi maniables que fréquemment imposés. Il y a, indéniablement, une rigueur à perfectionner, ce qui n'empêche pas de faire des sauts prodigieux et heureux dans des régions jugées presque inaccessibles, tels celui fait par Dirac en considérant tout à coup quatre fonctions d'onde au lieu d'une.

Il faut un espace fonctionnel, préparé par une géométrie *unitaire*, pour reconnaître le caractère *hermitique* de l'opérateur de Schrödinger et concevoir les opérateurs permutables avec ce dernier, opérateurs qui élargiront considérablement le cercle des solutions de l'équation des ondes.

A toute grandeur mécanique correspond un opérateur hermitique et si l'on mesure exactement la valeur de cette grandeur mécanique, on ne peut trouver, pour cette valeur, que l'une des valeurs propres de l'opérateur correspondant.

Les « traces », ou diagonales matricielles, jouent un rôle considérable assez analogue à celui de la divergence ou trace d'un déterminant fonctionnel. Ceci n'a rien d'étonnant si l'on songe que d'éminents auteurs (Bateman, De Donder, ...) tirent toutes les équations de la Physique de la notion de divergence.

Les intégrales premières sont remplacées par des constances matricielles. Il s'agit partout d'un univers mathématique entièrement nouveau pour presque tout le monde, pour ceux, en tout cas, qui n'ont jamais connu que la science classique.

Je pense souvent aux Théories d'Einstein telles qu'on les exposait il y a quinze ans et qui semblaient alors si nouvelles, si extraordinaires, si peu assimilables pour beaucoup d'esprits. Elles font maintenant l'effet d'une oasis reposante à côté du domaine mathématique de la Mécanique quantique.

L'exposé de M. Louis de Broglie développe amplement plusieurs exemples: rotateur, oscillateur, atome H. Il permettra d'aller vers Weyl. C'est un ouvrage clair, bien digne du brillant et jeune savant récompensé par le Prix Nobel et, tout récemment, par le Prix Albert Premier de Monaco.

A. Buhl (Toulouse).

Louis de Broglie. — **Exposés de Physique théorique.** — Fascicules gr. in-8°. Hermann et Cie. Paris, 1932.

Ces *Exposés*, rédigés par M. Louis de Broglie ou par d'éminents collaborateurs, font d'ailleurs partie des *Actualités scientifiques et industrielles.* Dans cette Collection, ils portent respectivement les numéros XXXI, XXXII, XXXIII, XXXIV, XXXVIII. Ils ont pour but de traiter rapidement des questions de Physique théorique importantes mais localisées.

Il ne faut pas que des auteurs, même très savants et très autorisés, cèdent trop facilement à l'idée de publier des Traités dont les points vraiment originaux seraient précisément faciles à isoler. Et cette remarque, vraie en général, l'est plus particulièrement encore dans un domaine qui commence à devenir terriblement touffu. Dans l'ordre d'idées indiqué, plusieurs fascicules viennent d'être publiés.

I. — Louis de Broglie. *Sur une forme plus restrictive des Relations d'incertitude, d'après MM. Landau et Peierls.* (24 pages. Prix: 6 francs). — Il s'agit de la notion de *mesure d'une grandeur* d'après la nouvelle Mécanique. Il y a les mesures *prévisibles*; d'autres sont *répétables.* C'est une question de dénombrement quant aux fonctions propres d'opérateurs relatifs à la grandeur que l'on se propose de mesurer. C'est aussi une question d'opérateurs permutables. La notion de *rapidité* dans la mesure joue un rôle essentiel. L'interaction entre le système mesurant et le système mesuré tend à s'estomper, à devenir probabilitaire dans une théorie quantique qui voudrait être rigoureuse et relativiste. C'est toujours l'antinomie à la Heisenberg, antinomie irrésoluble. Mais que de travaux tenteront de repérer, de resserrer le domaine antinomique.

II. — Irène Curie et F. Joliot. *La projection de noyaux atomiques par un rayonnement très pénétrant. L'existence du neutron.* (24 pages. Prix: 6 francs). — Il s'agit ici de recherches expérimentales aussi délicates qu'intéressantes. Elles ont donné lieu à de remarquables photographies de trajectoires corpusculaires. En outre, elles semblent fournir une base sérieuse à l'hypothèse du neutron, particule massique sans charge.

La vitesse du neutron et celle du proton sont en relation simple.

Il y a bien quelques difficultés provenant de l'admission des lois du choc élastique; il y a aussi incertitude sur les circonstances qui permettent à un neutron de désintégrer un noyau, mais tout ceci ne fait qu'appeler des recherches complémentaires, celles des auteurs restant éminemment suggestives.

III. — Jean-Louis Destouches. *Etat actuel de la Théorie du Neutron.* (72 pages. Prix: 18 francs). — Et voici déjà un très important complément préfacé d'ailleurs par M. Louis de Broglie.

Le neutron est décidément plus qu'une hypothèse et son étrange pouvoir de pénétration porte à se demander s'il ne constitue pas les fameux rayons cosmiques. Quoiqu'il en soit, il se meut à l'aise à travers la matière, ce qui le rend particulièrement difficile à déceler. A de certains points de vue, le neutron défie la Mécanique quantique, ce qui rend d'autant plus méritoire une certaine analyse de M. Destouches faite à partir de l'équation de Schrödinger. Dans un ordre d'idées analogue, il y a des neutrons de Pauli. Le neutron est peut-être formé d'un proton et d'un électron avec une masse voisine de l'unité mais impossible à préciser exactement; on ne peut encore dire s'il a ou non un spin. Et cette question porte à s'interroger, de manière nouvelle, sur la composition des spins. Tout ceci n'empêche pas que nous avons, pour le neutron, des modèles géométriques; il faut leur reconnaître un caractère provisoire, imparfait mais propre cependant à aiguiller des recherches plus exactes. On a également tenté d'employer la Mécanique à quatre fonctions de Dirac, mais en aboutissant à d'inadmissibles états d'énergies négatives. De telles difficultés montrent que nous sommes ici très près des questions fondamentales relatives à la structure nucléaire.

IV. — Salomon Rosenblum. *Origine des rayons gamma. Structure fine du spectre magnétique des rayons alpha.* (37 pages. Prix: 12 francs). — Nouvel avertissement de M. Louis de Broglie.

L'attaque du noyau essaie de se préciser. Les rayons alpha sont des noyaux d'hélium ou « hélions » à énergie cinétique immense. Capitale théorie de Gamow sur les constituants du noyau situés à l'intérieur d'une pellicule sphérique d'action répulsive vers l'extérieur. Particule α excitant un hélion qui, revenant à son état primitif, provoque l'émission γ. Avec J. Thibaud, noyaux à rotation quantifiée. Actinium, thorium, radium, polonium. Belles planches.

V. — André George. *Mécanique quantique et causalité.* (18 pages. Prix: 6 francs). — Discussions de principe, d'après M. Fermi, concernant les idées fondamentales exposées, par M. Louis de Broglie, dans sa *Théorie de la Quantification* et dans le précédent fascicule I. Retour sur l'impossibilité de mesurer, à la fois et rigoureusement, deux grandeurs canoniquement conjuguées. De même, deux grandeurs mécaniques ne peuvent être mesurées simultanément et avec une absolue précision que si leurs opérateurs permutent. On comparera donc les fascicules V et I avec grand profit.

Actualités scientifiques (*suite*). — Ces fascicules nous sont parvenus dans un certain désordre et avec des lacunes évidentes d'après le simple numérotage. Mais, même si celui-ci avait été respecté, l'impression d'ordre philosophico-scientifique n'aurait sans doute pas été autre.

Il s'agit manifestement de sujets d'actualités presque aussi vite écrits que pensés; on doit donc trouver là des informations beaucoup plus rapides que coordonnées, souvent suivies de discussions verbales improvisées. Les liaisons de fascicule à fascicule sont choses secondaires.

Dans ce qui suit les chiffres romains se rapportent à l'ordre par rapport à l'ensemble des *Actualités*.

XXXVI. — A. SAINTE-LAGUË. *Probabilités et Morphologie.* (Exposés de Morphologie dynamique. Direction A. Magnan. 32 pages. Prix: 6 francs). — Il s'agit surtout d'applications biologiques du Calcul des Probabilités. La loi de Gauss, la courbe de Gauss sont mis à l'épreuve d'abord par procédé graphique; la signification des trois paramètres qu'on peut introduire dans la loi, les variations possibles de celle-ci sont étudiées de même. Quant à la morphologie c'est surtout celle de la taille humaine. Einstein est cité. L'espace-temps a donné l'animal-temps. Une allocution du Docteur Magnan, qui sert de Préface, n'est peut-être pas très heureuse. Il s'agit de l'analogie des Mathématiques avec un moulin qui ne rend que ce qu'on lui donne à broyer. Cette stupide comparaison n'est combattue qu'assez mollement.

XXXIX. — Léon BRILLOUIN. *Notions de Mécanique ondulatoire. Méthodes d'approximation.* (Exposés sur la théorie des Quanta. Direction L. Brillouin. 36 pages. Prix: 10 francs). — Ce sont là des premières notions excellemment élémentaires, assez comparables à celles de l'ouvrage de M. Marcel Boll analysé plus loin. Les méthodes d'approximation ne visent pas seulement des résultats; elles visent, en cours de route, la simplification des méthodes analytiques. Dans les problèmes perturbés, caractérisés naturellement par l'équation de Schrödinger, il y a distinction entre perturbations faibles et fortes. Le cas de *dégénérescence*, où plusieurs fonctions propres correspondent à une même valeur de l'énergie, sont traités avec une aisance inattendue. Et cependant on finit par des considérations très générales, telles que: Une grandeur observable se représente par une matrice.

XL. — E. BAUER. *Critique des Notions d'Ether, d'Espace et de Temps. Cinématique de la Relativité.* (La Relativité. Série d'Exposés et de discussions. Direction P. Langevin. 32 pages. Prix: 7 francs). — Ce fascicule ne s'éloigne pas de la Relativité dite restreinte, c'est-à-dire de celle de la transformation de Lorentz. On pourrait croire le sujet périmé, ne voir dans cette Relativité qu'un problème préliminaire maintenant dépassé de beaucoup. Il n'en est rien. Le problème préliminaire garde sa portée et toute sa puissance d'initiation. Il est ici le point de départ de belles discussions historiques et philosophiques que M. Langevin a terminées en rebâtissant la transformation de Lorentz sur la considération d'un « chronomètre à lumière ».

XLI. — Francis PERRIN. *La Dynamique relativiste et l'inertie de l'Energie.* (La Relativité. Direction P. Langevin. 20 pages. Prix: 6 francs). — Ce fascicule s'accorde fort bien avec le précédent. Il est conforme à la Cinématique de Lorentz-Einstein et va, dans ces conditions, vers la Dynamique. Il compare l'électron toujours sphérique de M. Abraham à l'électron contracté. Il y a un principe d'équivalence qui, joint au principe de relativité, inspire le principe d'inertie. Des considérations thermodynamiques peuvent même être incluses dans ce jeu. L'énergie de condensation atomique donne une théorie particulièrement séduisante du rayonnement solaire.

XLII. — Louis DE BROGLIE. *Conséquences de la Relativité dans le développement de la Mécanique ondulatoire.* (La Relativité, Direction

P. Langevin. 16 pages. Prix 6 francs). — La Relativité est encore prise ici à partir de la transformation de Lorentz d'origine optique, conservant l'équation dalembertienne des ondes et s'appliquant, d'autre part, à l'extension de la dynamique du point. Premier lien admissible entre ondes et corpuscules. Les considérations de Planck, Boltzmann, Wien peuvent unir le rayonnement noir au gaz photonique si l'on reprend la théorie cinétique des gaz avec des considérations relativistes. Entre la vitesse v du corpuscule et la vitesse de phase V, on a la relation $vV = c^2$ mais une vérification correcte de cette égalité suppose encore la cinématique lorentzienne. Enfin si le photon peut être limite de l'électron, cela ne va pas non plus sans aperçus limites essentiellement relativistes.

XLIII. — G. Darmois. *La Théorie Einsteinienne de la Gravitation. Les vérifications expérimentales.* (La Relativité. Direction P. Langevin. 32 pages. Prix: 7 francs.) — Les choses se poursuivent ici très normalement comme cela devait être en des conférences successives. Après l'espace-temps de Minkowski, sans courbure, nous arrivons à l'espace incurvé aux R_{ik} nuls; c'est celui où la courbure est vraisemblablement aussi simple que possible après le cas où il n'y en a aucune. Et cet espace, second en complication, est l'espace gravitationnel. Au delà il est facile de situer les équations générales d'Einstein avec les formes complémentaires de De Donder, Lanczos, Darmois, Chazy, etc. Le problème des deux corps est ... à signaler. L'anomalie séculaire du périhélie de Mercure, la déflexion de la lumière stellaire près le Soleil, les déviations vers le rouge du spectre solaire sont brièvement étudiées dans le sens einsteinien. L'accord avec l'observation n'est pas partout absolument strict mais quelle théorie possède partout de tels accords ? Et, sur tous les points litigieux, aucune théorie n'est plus approchée que celle d'Einstein.

XLIV. — Elie Cartan. *La Parallélisme absolu et la Théorie unitaire du Champ.* (La Relativité. Direction P. Langevin. 22 pages. Prix: 6 francs.) — Ceci est un couronnement, très provisoire sans doute, mais enfin un couronnement tout de même, par rapport aux exposés précédents, puisqu'il s'agit maintenant de la nouvelle théorie d'Einstein où l'espace de Riemann, incurvé et à parallélisme selon Levi-Civita, est remplacé par un espace sans courbure mais *à torsion.* Un tel espace admet le parallélisme à distance. Dans le cas d'une torsion constante, il n'est autre chose qu'un espace paramétrique pour groupes finis et continus ce qui, malheureusement, est *trop peu général* pour donner une théorie physique tant soit peu universelle. Ainsi, toute la Théorie des groupes de Lie, déjà si formidable, apparaît ici comme devant être encore étendue ! Albert Einstein et Elie Cartan n'ont fini ni de travailler ni de nous proposer les plus gigantesques travaux.

A. Buhl (Toulouse).

Pierre Bricout. — **Microénergétique.** Préface de M. Ch. Fabry. Tome I. Introduction. — Un vol. gr. in-8° de VIII-304 pages. Prix: 100 francs. Gauthier-Villars et Cie. Paris, 1933.

Ouvrage de haute vulgarisation. Très probablement l'auteur a voulu se familiariser avec la nouvelle science, y a réussi et s'est senti bien en forme pour faire profiter autrui du fruit de ses efforts. Le livre est d'ailleurs excellemment présenté par M. Ch. Fabry qui remarque qu'il est parfaitement permis de dire: « on démontre que ... », le lecteur étant prêt à faire confiance au mathématicien, pourvu qu'on le mette en possession de l'instrument dont il a besoin. Le double emploi, avec les *Exposés de Physique théorique* de M. Louis de Broglie, n'est pas à craindre.

Il y a justement grand intérêt à comparer l'œuvre d'un créateur et celle d'un auteur se proposant de professer en puisant dans un arsenal mathématique beaucoup moins original que les applications qui en sont faites actuellement.

Ce premier volume est divisé en deux parties: *Introduction mathématique à l'étude de la Microénergétique* et *Introduction physique* au même sujet.

Justement parce que je suis mathématicien, c'est l'introduction mathématique qui m'intéresse le moins. On commence à s'habituer à l'Algèbre matricielle, encore qu'il soit remarquable que M. P. Bricout l'ait prolongée par un très utile chapitre sur le Calcul tensoriel. Les opérateurs et matrices hermitiques peuvent aisément lier les deux choses. Les fonctions orthogonales et leur normalisation sont illustrées d'abord par les séries et intégrales de Fourier. Et le Calcul des variations précède les équations canoniques, ces systèmes d'équations, *aussi simples que possible* parmi les systèmes différentiels, à deux séries de variables, qui sont fondamentaux partout et subsistent encore, en Mécanique ondulatoire, malgré l'incertitude également fondamentale (si l'on peut dire !) qui, quant aux mesures, tend à se reporter indéfiniment d'un ensemble de variables canoniques à l'autre.

Un chapitre des plus utiles est relatif aux statistiques quantiques avec la notion d'extension en phase. Il y a même une statistique de l'énergie. Les *cellules* peuvent renfermer un nombre quelconque de points figuratifs; les systèmes sont alors *discernables* (Boltzmann) ou *indiscernables* (Bose-Einstein). Avec zéro ou un seul point figuratif, on tombe sur la statistique de Fermi-Dirac. Chaque statistique admet ses *fluctuations* d'énergie.

La seconde Partie du volume débute par une étude sur la matière et ses constituants élémentaires. Les rayons cathodiques, les phénomènes thermioniques, l'effet photo-électrique, la radioactivité donnèrent et donnent encore les premières suggestions intra-atomiques. Les expériences de Millikan personnifièrent définitivement l'électron. La classification de Mendeleef devint la véritable base de l'atomisme. La radioactivité est, en général, hétérogène (rayons α, β, γ). Une théorie du noyau est particulièrement difficile à construire; elle ramène au *neutron*.

Les ondes électromagnétiques sont naturellement maxwelliennes. Peut-être faut-il regretter légèrement, ici, que les équations générales de Maxwell n'aient pas été rapprochées, dans la première Partie, des généralités tensorielles et des équations canoniques, mais nous n'en arrivons pas moins à un élégant raccordement entre l'optique géométrique et l'optique ondulatoire.

Les échanges d'énergie entre la matière et le rayonnement se traduisent en les apparences spectrales (séries de Lyman, Balmer, Paschen, ...) où l'on rencontra les premières confirmations de la Mécanique ondulatoire. Viennent ensuite les effets plus anormaux (Zeeman, Stark, ...). Une équation d'Einstein liée à des expériences de Millikan permet de déterminer une constante universelle d'action. Les effets Compton et Raman sont encore à porter à l'actif de la nouvelle Mécanique.

Un dernier Chapitre, sur les hypothèses modernes concernant la matière et le rayonnement, n'est certes pas le moins émouvant. Nous y rencontrons l'atome de Bohr, les différentes conditions quantiques, l'électron pivotant, l'interdiction de Pauli montrant, dans l'atome, d'impossibles symétries qui le feraient sortir de la classification de Mendeleef. Le tout ne va pas sans quelques objections relatives à la théorie photonique. Nul doute qu'avec un tome second qui, sans doute, suivra bientôt, M. Pierre Bricout n'ait écrit un grand ouvrage; il n'est d'ailleurs pas seulement le professeur dont nous parlions plus haut, mais est aussi l'auteur d'une Thèse en laquelle on trouve de remarquables mesures spectrales.

Tome II. Les Théories et les faits. — Un vol. gr. in-8° de 430 pages. Prix: 100 francs. 1933.

Le second volume n'a pas tardé beaucoup. Il répond bien aux désirs que le premier pouvait faire naître. Son premier Chapitre est une apologie justifiée du Principe d'Hamilton qui peut aussi bien donner la Mécanique classique, l'Electromagnétisme de Maxwell et la Gravifique la plus générale, comme l'a notamment montré M. De Donder.

Apparaissent ensuite les conditions quantiques allant de la gravitation microcosmique de Bohr aux généralités de la Mécanique quantique. Celle-ci ne s'embarrasse pas forcément d'images géométriques; c'est surtout une science d'opérateurs mathématiques et cependant si l'on veut se prouver, à soi-même, que l'on commence à la comprendre, on ne peut mieux faire que de retrouver les résultats spectraux que Bohr avait déduits de sa théorie gravitationnelle. C'est probablement parce qu'une science d'opérateurs peut donner énormément de choses, y compris la Géométrie, choses qui d'ailleurs ne sont pas obligatoirement d'une cohérence absolue; elles sont tellement nombreuses.

L'incohérence ici a une valeur philosophique; elle montre la nature imparfaite des raisonnements humains surtout en des investigations paraissant avoir, au premier abord, des prétentions absolument fondamentales dans le domaine de la Connaissance. Toutes les difficultés signalées par M. Bricout me semblent l'être dans cet état d'esprit. Nous ne sommes pas loin d'une science variationnelle où l'on cherchera à *minimer* l'incohérence; quant à la supprimer totalement, tout le monde conviendra que c'est folie pure. Il faut en prendre son parti, disait Henri Poincaré. A propos de Poincaré, il faut noter que ses recherches sur la Mécanique céleste l'ont conduit à considérer des mouvements troublés, par des méthodes qui s'appliquent encore aux problèmes quantiques d'aujourd'hui.

On peut arriver aisément à l'équation de Schrödinger en partant des idées de Louis de Broglie.

Il y a une équation ondulatoire de l'électron avec un dalembertien à cinq variables représenté d'ailleurs par un symbole pentagonal. E. Madelung a donné, à propos de l'intégrale en $\psi\psi^*$ une représentation hydrodynamique signalée aussi par L. de Broglie dans sa *Théorie de la Quantification.* Voir de même J. Frenkel: *Einf. in die Wellenmechanik*, 1929, p. 91. Vient le « paquet d'ondes » avec son accélération newtonienne de point matériel. La Mécanique quantique reprend le Principe d'incertitude de Heisenberg. Elle se constelle bientôt de matrices, de lois de commutation réalisées ou non et d'équations canoniques matricielles. Elle se généralise conformément aux idées de Dirac et devient alors une Algèbre des quantités observables. Le symbolisme peut paraître nouveau mais cette impression de nouveauté est diminuée par une étude attentive de la théorie des groupes; le renvoi à Weyl et à Wigner est indiqué. Tout ceci ne forme qu'une première partie de ce second volume, partie se rattachant tout naturellement au tome I. Les théories et les faits n'arrivent qu'ensuite. Il s'agit d'abord de descriptions expérimentales relatives à tous ces curieux phénomènes corpusculaires imitant les phénomènes ondulatoires. L'électron pivotant ramène vers les conceptions gravitationnelles; il peut être précessionnel comme une véritable planète.

L'atome d'hydrogène est idéal pour les théories spectrales; les spectres, projetables sur une règle divisée, sont évidemment des représentations essentielles des systèmes corpusculaires. Mais toutes les anomalies de ces représentations tendent à influer sur la théorie de l'atome de manière à lui faire perdre tout caractère intuitif. Ce que nous appelons l'intuition est une faculté acquise à l'échelle vulgaire ! Il n'en faut que remercier davantage M. Pierre Bricout qui a si bien tenté de nous familiariser avec les échelles de la Microénergétique. A. BUHL (Toulouse).

Johann v. NEUMANN. — **Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik.** (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band XXXVIII). — Un vol. gr. in-8° de VIII-262 pages. Prix: broché, RM. 18; relié R.M. 19,60. J. Springer. Berlin, 1932.

Ceci est véritablement la grande œuvre et presque Le Grand Œuvre car, après tout, avec ces questions de radiations et d'échanges corpusculaires pouvant transmutter des atomes en d'autres, nous ne sommes certainement plus bien loin de la Pierre philosophale.

Le livre de M. Johann v. Neumann était attendu; l'illustre Weyl et Wigner et tant d'autres déjà fort rigoureux ont cependant renvoyé, pour des suppléments de rigueur, à des mémoires publiés, par le présent auteur, en 1929, aux *Mathematische Annalen.* Mais ce périodique ne se trouve pas partout; il restait donc à espérer un ouvrage isolé contenant les travaux de 1929 qui, en 1932, ne pouvaient guère manquer d'importants compléments. Eh bien, maintenant, nous avons tout cela et j'admire sans réserve, un peu toutefois comme on admire des sommets éblouissants, accessibles certes aux intrépides mais dont l'ascension est jugée communément des plus redoutables. Le livre en litige est ce que je connais de plus difficile au sujet de la Mécanique des quanta. Faut-il s'en étonner ? Non pas. Que l'on songe aux théories newtoniennes, à l'équation de Laplace et à tous les problèmes qu'elle engendre (problèmes de Dirichlet, de Neumann, ...); c'est déjà fort ardu. Or l'équation de Schrödinger est indéniablement plus compliquée que celle de Laplace.

Dans une introduction philosophique, M. J. v. Neumann dénonce le fameux principe de continuité: Natura non facit saltus. C'était exactement l'attitude de René Baire, en 1905, dans ses *Leçons sur les Fonctions discontinues.* Le savant français prédisait même, au profit du discontinu, l'avènement d'une nouvelle Physique. Combien le présent lui donne raison !

A la construction de l'équation de Schrödinger, on peut faire présider deux séries de matrices à termes permutables dans une même série mais non d'une série à l'autre. L'intégrale quadratique à normer suit immédiatement. Ceci ne vas pas sans deux théories équivalentes; l'une, de physionomie analytique, est bâtie à l'instar de celle des transformations linéaires; l'autre, de physionomie géométrique, est celle de l'espace de Hilbert. Il faut d'abord savoir se retourner dans ce H. R. (Hilbertsche Raum) et ceci est aussi le point de vue de Weyl. Des considérations intégrales, de A à E, servent de bases à la nouvelle analyse. Après quoi les opérations dans le H. R. s'éclaircissent singulièrement. Les opérateurs hermitiques triomphent et sont même généralisés, notamment par emploi d'opérateurs adjoints, A et A*, pour lesquels $(A f, g) = (f, A^* g)$. Le cas hermitique est celui où A et A* coïncident.

Le problème des valeurs propres, dans l'équation $H\varphi = \lambda\varphi$, est peut-être le plus épineux. Il est traité par une méthode de comparaisons matricielles conduisant bientôt au parallélisme, entre formes linéaires et intégrales de Stieltjes, méthode qui constitue l'une des révélations originales les plus importantes déjà publiées par le savant auteur.

Dans le même ordre d'idées, les opérateurs permutables ont un rôle de premier plan. La trace (die Spur) a l'importance partout signalée et dont la divergence ne donne qu'une faible idée. Les méthodes statistiques, les possibilités de mesure prennent un aspect nouveau dans cette analyse nouvelle qui, malgré son indéniable difficulté, aura, pour certains, l'avantage d'être une construction propre n'exigeant pas d'exposition préliminaire de la Théorie des groupes. Et comme on n'empêchera pas les groupes d'être au fond des choses, on pourra couronner l'effort par une ultime comparaison entre les méthodes groupales et les méthodes intégrales de l'ouvrage.

Finalement, on a l'impression délicieuse de retomber dans les aperçus physiques. L'extrême rigueur mathématique semblait les disperser aux quatre vents du ciel. Erreur. Ils sont maintenant d'une structure simple. La mesure macroscopique n'est rien à côté des conditions générales qui permettent à l'idée de mesure de naître. La lumière est toujours maxwellienne....

Arrêtons-nous, sans chercher à faire croire que toute l'ascension a été faite. Néanmoins, nous en avons vu assez pour nous porter garant de la splendeur que peuvent avoir certains paysages malgré l'aridité d'un premier aspect.

A. BUHL (Toulouse).

Marcel BOLL. — **L'idée générale de la Mécanique ondulatoire.** Atome d'hydrogène. Phénomènes chimiques. Conduction électrique. — Un vol. petit in-8° de 74 pages. Prix: 15 francs. Hermann et Cie. Paris, 1932.

Après la Mécanique quantique, si ardue, de J. v. Neumann, plaçons ici, par esprit d'opposition, un exposé délicieusement élémentaire. L'auteur situe celui-ci entre le *Recueil d'Exposés* de M. Louis de Broglie et *La Théorie des Quanta* de M. Eugène Bloch, ouvrages déjà analysés ici même (t. XXIX, 1930, p. 362; p. 180). Il a pu imiter, pour ainsi dire, nombre de propriétés de l'équation de Schrödinger à l'aide de l'équation des cordes vibrantes dont il n'utilise d'ailleurs que des propriétés particulièrement simples.

Il est vraiment curieux de retrouver ainsi, sous un revêtement modeste, les traits principaux de généralités plutôt inattendues dans le domaine indiqué. Ainsi à l'équation des cordes, dans le cas de l'onde associée à un électron libre, on adjoint aisément une dérivée partielle seconde en u, variable qui, avec les coordonnées x, y, z et le temps t, conduit à la notion très physique d'un espace à cinq dimensions. La constante h de Planck devient un reflet de la projection d'une cinquième dimension sur l'espace-temps.

Quant aux relations d'incertitude, on peut encore les apercevoir sous couleur physique élémentaire. C'est, par exemple, l'effet Compton qui fait qu'on n'envoie pas des photons sur une particule, pour l'éclairer, sans altérer son mouvement. A l'échelle sous-atomique, il y a généralement perturbation d'un phénomène par tout procédé d'investigation ou de mesure; l'individualité ne se maintient, contre les actions extérieures, que lorsqu'elle est suffisamment complexe.

Signalons aussi quelques développements des plus intéressants sur l'orientation de la chimie théorique. Plaignons les chimistes de demain. Il y a seulement trente ans, on pouvait être un physicien distingué, en possédant les éléments du calcul infinitésimal, ou un brillant chimiste avec les rudiments d'arithmétique qui s'apprennent à l'école primaire. Le chimiste de demain devra faire table rase de son expérience des objets usuels !

Combien il est suggestif de comparer cette opinion à celle des gens qui accusaient les théories einsteiniennes de manquer au bon sens. Les einsteiniens d'il y a quinze ans ne tenaient d'ailleurs pas absolument à prêcher la révolte ouverte contre cette insuffisante faculté du domaine moyen, mais quels progrès immenses et étranges depuis. On apprend, on enseigne maintenant aux futurs savants à se défier du sens commun. Renan, dans *L'Avenir de la Science*, l'avait prédit. Quant à M. Marcel Boll, il a vraiment de puissants moyens élémentaires pour aiguiller les esprits dans les directions actuellement nécessaires. A. Buhl (Toulouse).

Marcel Boll. — **Exposé électronique des Lois de l'Electricité.** Courants continus et alternatifs. Electromagnétisme et induction. Réseaux de distribution. Emission et réception radioélectriques. — Un vol. in-8° de 72 pages. Prix: 15 francs. Hermann et Cie. Paris, 1932.

Encore un exposé joliment élémentaire et même d'une portée pratique quelque peu inattendue. Certes l'électricité doit maintenant être électronique; nous sommes à l'âge corpusculaire.

Mais on pourrait penser que la transformation est indifférente au praticien qui, dans ces conditions, préférera conserver ses habitudes. Or il n'en est pas ainsi; les sous-titres ci-dessus, qui accompagnent le titre de l'ouvrage, montrent assez que l'électronisme peut s'imposer au point de vue technique. Et même, il s'accorde si bien avec les équations de Maxwell que le radioélectricien semble avoir désormais tout avantage à être électroniste.

Dès le début, M. Boll fait tenir, en une page, un tableau de correspondance entre le langage traditionnel et sa traduction dans le monde des électrons. Par exemple: *Corps chargé positivement*, Corps présentant, à sa surface, un défaut d'électrons; *Corps chargé négativement*, Corps présentant, à sa surface, un excès d'électrons. Avec quatorze correspondances de ce genre, toute l'électricité s'électronise.

D'ailleurs l'électron n'a peut-être pas d'individualité mais un caractère ondulatoire qui l'accorde précisément avec la notion rudimentaire d'oscillation électrique.

La conduction dans les métaux s'oppose au libre parcours électronique comme la pesanteur s'oppose au mouvement ascensionnel. Les analogies hydrauliques perdent beaucoup de terrain depuis que l'on connaît l'électricité mieux que l'eau; il reste cependant encore, du côté de la viscosité et de la loi de Poiseuille, d'intéressantes comparaisons avec la résistance électrique. Mais la règle générale est celle des *vibrations* électroniques et non de parcours pour lesquels le mot *courant* prend un sens de plus en plus dénué d'exactitude. Dans un circuit inductif, l'électron peut s'affecter d'une masse apparente valant cent milliards de fois sa masse propre.

N'insistons pas sur la consommation de l'énergie électrique et la production de l'énergie mécanique. Le rayonnement par antennes, les différents modes de puissance transmise, trouvant, en électronique, des expressions remarquablement simples. Tout, jusqu'au caractère réduit de l'œuvre de M. Boll, est en faveur de la maniabilité de la nouvelle théorie.

A. Buhl (Toulouse).

Paul Labat. — **La propagation des Ondes électromagnétiques.** Exposé des connaissances acquises. Synthèses des idées et des théories. — Un vol. gr. in-8° de xii-445 pages. Prix: 80 francs. Gauthier-Villars et Cie. Paris, 1932.

Grand ouvrage écrit pour praticiens, pour ceux qui ont à émettre et à capter des ondes et non à discuter sur l'allure philosophique des théories corpusculaires ou ondulatoires. Il est cependant aussi théorique qu'il peut l'être dans le monde des radioélectriciens; il s'apparente, dès la seconde Partie, aux équations de Maxwell, contient tant de choses sur la Physique de l'atmosphère, la radiation solaire et même les fameuses radiations cosmiques, sans parler du recours constant à l'électronique, qu'il apparait aussi comme un habile résumé de toutes nos connaissances en matière de radiations enregistrables à notre échelle. Il est à peine besoin de dire que de telles connaissances sont fortement teintées d'hypothèses et d'incertitudes, mais c'est précisément cet état de choses qui exigeait, d'un auteur habile, une discrimination, vraiment utilitaire, à effectuer parmi d'innombrables travaux, ceux mentionnés dans la bibliographie du volume étant déjà en nombre considérable. Le volume est dédié à la mémoire du Général Ferrié, frappé par la mort en février 1932, lequel tenait en haute estime les travaux du Capitaine Labat et avait beaucoup insisté pour la publication de l'œuvre.

La première Partie est intitulée: Faits d'observation et hypothèses sur la constitution de l'atmosphère terrestre et son ionisation. Influences solaires.

Les hypothèses s'entrechoquent déjà et Végard, en 1925, conseillait un recours éclectique aux aurores, aux météores, aux nuages lumineux, à la lumière zodiacale. Le mouvement des particules électrisées, accompagnées toutes de chevelures de lignes de force, est considéré avec les idées de Langevin (conférence à la Société de Physique, 1912). Tout centre électrisé est un *ion*. Les rayons cathodiques conduisent aux *électrons*. Tout ceci est d'accord avec les remarques faites lors de l'analyse de l'ouvrage prédécent dû à M. Boll. Quant à l'effet Compton c'est le cas de remarquer qu'il ne perturbe pas seulement la Philosophie de la Connaissance. Il faut signaler les pages très intéressantes concernant l'auréole, la couronne, le champ magnétique solaire, les expériences de Millikan sur les rayons cosmiques et même l'ultra-radiation cosmique. Au sujet du champ magnétique terrestre, faut-il rappeler tout ce que nous devons à Störmer et à Birkeland. Au-dessus de la troposphère nous rencontrons l'ozone.

La deuxième Partie du livre est particulièrement mathématique; c'est elle qui débute par les équations de Maxwell. Les ondes sont bientôt considérées en milieu ionisé, compte tenu, ou non tenu, des chocs moléculaires. Une première théorie de leur propagation dans l'atmosphère est fort analogue, ce qui est tout naturel, à celle de la réfraction astronomique. Et, dans les deux cas, nous n'avons, pour les couches d'air, que des constitutions présumées.

Ceci nous fait passer à la troisième Partie en laquelle on commence par une propagation affranchie, cette fois, autant que possible, d'hypothèses concernant la conductibilité en haute atmosphère. A signaler une application de la notion de *vitesse de groupe* dans ses relations avec la densité ionique. D'après Nagaoka, la couche ionisée peut présenter des *plissements locaux* comme dans les vagues de vent. C'est un grand obstacle aux communications sans fil. Les ondes courtes exigent qu'on s'occupe de leur propagation dans la stratosphère. Il existe aussi de remarquables équations différentielles de la trajectoire d'un rayon électromagnétique dans différentes hypothèses (Kenrick et Jen) sur la variation de l'indice de réfraction avec l'altitude. A la partie inférieure d'une couche, dite couche d'Heaviside, les rayons électromagnétiques peuvent subir une sorte de réflexion totale. Ceci peut engendrer des zones de silence. Dans une théorie de Ponte et Rocard (1928) s'introduit la notion de *structure* de la couche ionisée. Enfin nous arrivons à la question capitale des signaux multiples, signaux de circumpropagation faisant le tour de la Terre. Et ce n'est encore rien à côté des *échos cosmiques* qui, d'après Störmer, se produisent sur des nuées corpusculaires certainement plus éloignées de nous que la Lune. Ceci est bien l'une des plus grandes merveilles réalisées par ondes hertziennes. Elle commence à donner un corps à la radiotélégraphie interplanétaire, encore qu'il soit bien improbable que nous trouvions jamais des partenaires pour nous répondre. Mais enfin, le radiogramme pourrait être lancé, probablement sur ces ondes courtes surtout étudiées ici et qui remplaceraient des signaux lumineux auxquels personne n'a jamais songé sérieusement.

La bibliographie placée à la fin du volume comprend vingt pages et une foule de noms illustres. A l'époque radioélectrique où nous sommes, que de perfectionnements on peut prévoir grâce à l'œuvre si étendue et si profonde de M. Paul Labat.

A. Buhl (Toulouse).

David Hilbert. — **Gesammelte Abhandlungen.** Erster Band: Zahlentheorie. — Un vol. gr. in-8° de xiv-540 pages. Prix : RM. 48, Julius Springer. Berlin, 1932.

Les œuvres de David Hilbert ! Magnifique monument que le génie élève, pour ainsi dire, à lui-même. Quatre volumes sont prévus et le premier, comme tout ce qui a trait à la Théorie des Nombres, n'est peut-être pas le plus accessible mais il se rapporte cependant beaucoup à la jeunesse de l'auteur. On peut donc espérer qu'il orientera de jeunes esprits. L'impression globale est celle que donnent les œuvres de Riemann ou de Ch. Hermite mais, bien entendu, dans le sens d'un prolongement. Il nous paraît absolument impossible de faire ici une véritable critique analytique du volume; ce serait recommencer ce qu'a fort bien fait M. Helmut Hasse en huit pages terminales réévoquant Gauss, Dirichlet, Kummer, Galois, ... et d'admirables conceptions telles celles des groupes d'idéaux. Mais ici nous ne disposons même pas de huit pages.

Indiquons au moins les titres des mémoires rassemblés:

1. Ueber die Transzendenz der Zahlen e und π (1893, 4 pages).
2. Zwei neue Beweise für die Zerlegbarkeit der Zahlen eines Körpers in Primideale (1894, 1 page).
3. Ueber die Zerlegung der Ideale eines Zahlkörpers in Primideale (1894, 7 pages).
4. Grundzüge einer Theorie des Galoisschen Zahlkörpers (1894, 11 pages).
5. Ueber den Dirichletschen biquadratischen Zahlkörper (1894, 35 pages).
6. Ein neuer Beweis des Kroneckerschen Fundamentalsatzes über Abelsche Zahlkörper (1896, 10 pages).
7. Die Theorie der algebraischen Zahlkörper (1897, 300 pages).
8. Ueber die Theorie der relativquadratischen Zahlkörper (1899, 6 pages).
9. Ueber die Theorie des relativquadratischen Zahlkörpers (1899, 112 pages).
10. Ueber die Theorie der relativ-Abelschen Zahlkörper (1898, 27 pages).
11. Beweis für die Darstellbarkeit der ganzen Zahlen durch eine feste Anzahl n-ter Potenzen. Waringsches Problem (1909, 18 pages).

De cette simple énumération ressort d'abord la rapidité ou la continuité de l'inspiration. A peu près tout a été conçu et publié en six ans et un terrain réputé si aride n'a certainement pas dû faire cet effet à M. David Hilbert.

Le mémoire principal est évidemment celui qui porte le numéro 7. Il y est d'abord question de l'opinion de Legendre quant à la véritable passion que montrait Euler pour l'Arithmétique supérieure. Gauss parla d'un attrait magique. Kronecker écrivit: Le Bon Dieu créa le Nombre entier, tout le reste est œuvre humaine ! On cite de telles opinions avec grand plaisir, à une époque où l'idéalisme renaît, tout au moins pour les esprits supérieurs. Et si, au-delà du domaine des entiers ordinaires, on a créé les *idéaux*, ce n'est peut-être pas par une coïncidence purement terminologique.

On nous permettra aussi de rappeler que le grand travail dont il s'agit a été traduit en français dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* par MM. A. Lévy et Th. Got, avec Notes de Georges Humbert (1909, 1910, 1911). Le regretté Eugène Cosserat qui, à l'époque indiquée, était Secrétaire de nos *Annales* n'a pas laissé passer l'occasion de vulgariser, en France, les pensées maîtresses de David Hilbert.

Faut-il encore rappeler qu'ici un entier algébrique ou, tout simplement, un *entier* est une racine d'équation algébrique, à coefficients rationnels, que ces entiers forment des *corps* puis précisément ces *idéaux* à propriétés de groupes linéaires. Bien que, dans ces préliminaires, il ne soit pas explicitement question de mécanique quantique, ce qui ne pouvait être en 1897, il est bien certain que ce serait une excellente chose, pour une première étude de cette mécanique, que d'être pénétré du texte hilbertien. Et combien tout ceci conduirait aisément à l'espace hilbertien et aux formes d'Hermite. Les corps de Galois, leur structure, les idéaux premiers, les corps quadratiques avec leur ingénieux symbolisme, les restes quadratiques, les classes d'idéaux conduisant aux recherches de Dirichlet et de Dedekind, le corps des racines de l'unité, la subdivision des corps cycliques en corps de Kummer, les idéaux ramifiés, l'intervention des nombres de Bernoulli et de la fonction dzèta de Riemann, le théorème négatif de Fermat sont les points les plus saillants d'une exposition qui est toujours un modèle du genre.

Dans le mémoire 9, je signalerai surtout l'emploi d'*opérateurs*, notamment quant aux idéaux A inchangés par un opérateur S, soit SA = A. Cela rappelle encore les groupes et les opérateurs hermitiques. Réétudier tout Hilbert serait œuvre d'actualité; c'est pourquoi la publication de ce premier volume apparaît aujourd'hui comme étant de la plus haute importance. Nous lui souhaitons beaucoup de lecteurs puisqu'il peut indéniablement former beaucoup de disciples. A. Buhl (Toulouse).

Harris Hancock. — **Foundations of the Theory of Algebric Numbers.** Volume II: The general Theory. — Un vol. in-8° de xxvi-654 pages. Prix: $8.00. The Macmillan Company. New-York, 1932.

L'Enseignement mathématique a déjà rendu compte du premier volume de ce grand ouvrage (voir t. 30, 1931, p. 302). Le tome II, dédié aussi à la mémoire de Mr. et Mrs. Charles Phelps Taft, ne suscitera pas moins d'admiration que le tome premier. Il est particulièrement heureux qu'une telle publication soit contemporaine de celle des Œuvres de David Hilbert. L'analyse hilbertienne ne s'imite pas facilement; elle a même dû paraître inféconde à beaucoup d'esprits. La traduction toulousaine dont il était question tout à l'heure, bien que faite au pays de Fermat, n'a, que je sache, suscité aucun grand travail. Les Charles Hermite, les Georges Humbert se sont éteints sans laisser vraiment de grands successeurs qui auraient pu travailler l'Arithmétique de concert avec Hilbert. C'est pourquoi le mérite de M. Harris Hancock est indiscutable. Il infuse une vie nouvelle à cette Arithmétique supérieure, selon les traditions de Kronecker, Dedekind, Hilbert et ce d'une manière didactique d'accord avec toutes les nécessités arithmétiques, analytiques et physiques d'aujourd'hui.

Les idéaux, dont on reprend maintenant la théorie générale, sont des formes bilinéaires d'éléments algébriques; il importe de les réduire à des types canoniques par une analyse de transformations linéaires dans laquelle on perçoit toutes les modalités de la Théorie des groupes et, sans doute, toutes les extensions possibles de la notion de divisibilité.

Les liens si délicats, si trompeurs, qui existent cependant entre divisibilité arithmétique et divisibilité algébrique, trouvent une première expression dans un théorème de Gauss. Les produits d'idéaux peuvent être *normés* et rapprochés alors de produits ordinaires. D'où aisément les idéaux premiers, au sujet desquels un théorème type remonte formellement à Fermat.

Une correspondance entre formes et idéaux a été étudiée par Kronecker et précisée par Hilbert. On peut être finalement conduit à des congruences qui se construisent par opérateurs aux dérivées partielles analogues à ceux de la théorie des polaires, ce que nous aurons d'ailleurs à rappeler plus loin à propos des *Modular Invariants* de D. E. Rutherford. Viennent ensuite les travaux de Hurwitz sur l'idéal plus grand commun diviseur de deux autres idéaux dits principaux, travaux intimément mêlés à ceux de G. Humbert adjoints à la traduction de Lévy et Got déjà citée.

Avec Hensel nous rencontrons notamment la notion de diviseur irrégulier conditionnée par des inégalités. Il me paraît impossible de donner ici, en quelques mots, la moindre idée de tels résultats, mais M. Kurt Hensel s'est jugé si bien compris par M. Harris Hancock qu'il lui a adressé une lettre de félicitations reproduite en tête du volume.

Le cas où ε et son inverse sont, à la fois, entiers algébriques, conduit aux unités algébriques; la théorie en est très jolie et rappelle, avec plus de généralité, celle de l'équation binome. Hilbert et Minkowski ont rajeuni une première exposition de Dirichlet et Dedekind.

Au-delà de toutes ces combinaisons algébrico-arithmétiques, nous tombons, par exemple, dans la Géométrie des Nombres de Minkowski et le texte se constelle d'intégrales multiples, ce qui peut paraître inattendu. Au fond, c'est d'une admirable simplicité et c'est là, à mon avis, que l'on aperçoit particulièrement bien l'œuvre créatrice du Bon Dieu de Kronecker dont il était question, plus haut, toujours à propos des Œuvres de Hilbert. On ne manie pas toutes les formes algébriques intervenant dans ce qui précède sans manier aussi des déterminants *fonctionnels* et ce pour une foule de raisons, mais ne serait-ce que pour exprimer des compatibilités. Or, le déterminant fonctionnel est aussi le symbole essentiel associé aux intégrales multiples et à leurs transformations. Voilà d'où viennent ces intégrales et maintenant les domaines *continus* avec le cortège d'inégalités qui accompagne toute conception convenable de la continuité. Les domaines continus et intégraux ont leurs invariances intégrales se traduisant notamment en formules stokiennes desquelles sortent facilement le Calcul différentiel absolu et la Gravifique selon Einstein. Cette synthèse, si formidable soit-elle, n'épuise pas l'infinie richesse des *groupes*. Nombreuses sont les circonstances naturelles inaltérées ou transformées simplement par des *permutations* qui, d'autre part, renouvelèrent, avec Galois, la théorie des équations algébriques. Etudier ces équations c'est encore une manière d'étudier la structure discontinue d'une Nature où la continuité n'est que l'apparence quant à une observation insuffisamment pénétrante. L'exposé de M. Harris Hancock est actuellement l'exposé d'une *quantification* pouvant se rapporter à tout ce qui est accessible à l'Analyse. C'est une grande œuvre de Philosophie naturelle. A. Buhl (Toulouse).

D. Hilbert und S. Cohn-Vossen. — **Anschauliche Geometrie.** (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band XXXVII). — Un vol. gr. in-8° de VIII-310 pages et 330 figures. Prix: broché, RM.24; relié, RM. 25,80. J. Springer. Berlin, 1932.

Cette géométrie du visible, de l'évident, montre maintenant la souplesse d'esprit de M. Hilbert passant de l'abstraction arithmétique ou analytique à ce qui se conçoit de manière visuelle et en faisant toujours joliment image. Le sujet fut professé, par le grand géomètre lui-même, à Göttingen, en 1920-21 ; il fut ensuite développé par des disciples, notamment par W. Rosemann et S. Cohn-Vossen. Les 330 figures du volume en disent long sur l'appel à l'intuition et sur la difficulté d'écrire une analyse sans rien dessiner. Essayons cependant de suivre le fil des analogies.

Un premier Chapitre traite des courbes et des surfaces les plus simples. Les coniques, en tant que sections, se voient sur des cônes. Les hyperboloïdes se déforment comme de certains cache-pots et les quadriques, en général, se construisent par coniques en carton ingénieusement imbriquées.

Remarques analogues pour le système triplement orthogonal des trois quadriques homofocales.

Sur les systèmes ponctuels réguliers (Ch. II), sur les *grilles*, naissent non seulement des figures mais des considérations de mensurabilité utiles en Théorie des Nombres ou quant à l'évaluation de certaines séries. Un lemme de Minkowski est ici particulièrement à sa place. Il y a des grilles spatiales donnant lieu à de curieux assemblages de sphères, puis à des constructions polyédrales et à des emplissements spatiaux par *paquets* qui, pris isolément, sont fort irréguliers. De là à passer aux cristaux et aux symétries groupales, il n'y a qu'un pas.

Les configurations (Ch. III) liées aux noms de Brianchon, Pascal, Desargues, demandent, pour être traitées complètement, une théorie logique assez ardue. Elles prennent aussi un aspect très intuitif, de par une perspective de croquis à intentions spatiales négligées dans un examen plan. La configuration de Reye, qui comprend 12 points et 12 plans remarquables, s'aperçoit très simplement en lui donnant d'abord la symétrie du cube; ses propriétés projectives font le reste. Les assemblages cellulaires polyédraux donnent lieu à une sorte de géométrie énumérative.

La Géométrie différentielle (Ch. IV) possède de jolis croquis concernant, par exemple, les lignes de courbure de l'ellipsoïde. La configuration des surfaces fait concevoir des *selles*, à trois dépressions, superflues pour un cavalier humain mais utilisables pour des singes qui tiendraient à y placer aussi leur queue. La courbure de Gauss est nulle en des points, dits paraboliques, dont les lieux ont été tracés jusque sur l'admirable visage de l'Apollon du Belvédère. L'hélicoïde réglé, le caténoïde ont été réalisés par lames liquides photographiées ensuite. Suivent onze propriétés concernant la courbure et le caractère extrémal de la sphère. Les géométries non-euclidiennes deviennent tangibles sur les surfaces à courbure totale constante. Le Problème de Plateau serait, paraît-il, résolu par J. Douglas (*Trans. Amer. math. Society*, vol. 33, 1931).

La Cinématique (Ch. V) est surtout relative aux roulettes. Les mouvements spatiaux sont illustrés par la photographie d'un engrenage hyperboloïdal à hyperboloïdes évidents.

La Topologie (Ch. VI) nous offre un véritable musée tératologique de singularités superficielles, surtout avec les surfaces unilatères dont certaines peuvent être fermées. Elle comprend aussi les problèmes de coloriage relatifs aux cartes.

A vrai dire, beaucoup de ces choses sont loin d'être nouvelles mais aucun ouvrage ne les avait aussi élégamment rassemblées. Et certainement celui-ci a l'allure de l'œuvre d'art. A. BUHL (Toulouse).

Karl MENGER. — **Kurventheorie,** herausgegeben unter Mitarbeit von Georg Nöbeling. (Mengentheoretische Geometrie in Einzeldarstellungen, herausgegeben von Dr. Karl Menger, Wien. Band II). — Un vol. gr. in-8° de VI-376 pages. Prix: broché, RM. 22; relié, RM. 24. B. G. Teubner. Leipzig et Berlin, 1932.

Encore une opposition à faire entre la géométrie visible et intuitive de l'ouvrage précédent et la géométrie de celui-ci qui est loin de se fier à l'apparence et à l'intuition. La liste des auteurs cités, en laquelle on relève les noms d'Alexandroff, Baire, Borel, Brouwer, Cantor, Fréchet, Hahn, Hausdorff, Janizewski, Kuratowski, Lebesgue, Mazurkiewicz, Sierpinski, Urysohn, Whyburn, Young, renseigne tout de suite sur le caractère de l'exposé. Toutefois, il est quelque peu étonnant de ne pas trouver trace ici du nom et des travaux de M. Georges Bouligand qui, en France, est bien le savant qui a le plus fait pour élargir les bases de la Géométrie infinitésimale. Essayons de concilier les choses en disant que les points de vue ne sont peut-être pas tout à fait les mêmes et que M. Menger n'a sans doute pas eu besoin des conceptions propres à M. Bouligand, mais il n'en est pas moins vrai que, devant surtout signaler le livre de M. Menger à des lecteurs français ou de langue française, il me semble que je ne puis mieux faire qu'en m'adressant tout d'abord à ceux qui se sont intéressés à une *Introduction à la Géométrie infinitésimale directe* dont *L'Enseignement mathématique* a récemment rendu compte (ce tome, p. 132).

Les courbes de M. Menger, on le sait maintenant, ne sont pas celles que l'on crée d'un geste, la main étant simplement munie d'un crayon ou d'un morceau de craie; il ne recourt jamais à la figure. Il lui faut d'abord étudier les questions de dénombrement, donc les ensembles, puis l'apparition de la notion complexe de continu. Et, dans le continu, toujours par voie logique, il recherchera les ensembles d'éléments qui paraîtront mériter ce nom de « courbe » sur lequel les géomètres d'autrefois s'appuyaient comme sur une notion première.

Un ensemble qui est image topologique d'une courbe doit aussi être une courbe. Les courbes de Cantor, nulle part denses par rapport au plan qui les contient, sont parmi celles ici définies. La comparaison de la courbe et du segment entraîne rapidement celle de la courbe et du polygone. Un point terminal (Endpunkt) est du premier ordre, un point ordinaire est du second ordre; au-delà apparaît le point de ramification (Verzweigungspunkt). Il y a des points de courbe qui sont dits *fortement* ou *faiblement* irrationnels suivant que leur irrationnalité est limite d'opérations irrationnelles ou rationnelles. Ces procédés constructifs pourront certainement être variés mais on aura sans doute de la peine à les généraliser encore.

A signaler aussi l'apparition du lemme des « n-Beine ». C'est quelque chose comme la notion d'ordre discernable dans un voisinage ponctuel unique. Les *graphes* admettent un ordre d'enchaînement. Les questions de connexion apparaissent ensuite. Les discontinuités dans la distribution des singularités permettent l'existence de courbes régulières d'où l'on descend ensuite aux courbes rationnelles. L'usage d'un continu cyclique, défini par des cercles topologiques, qui équivaut à l'usage de courbes souches (Baumkurven) d'où l'on peut aller à la courbe universelle, fait précisément penser à nouveau aux cônes de révolution, à propriétés contingentes, de M. Bouligand. L'œuvre de ce dernier et l'œuvre de M. Menger ne peuvent se nuire en rien. Elles doivent, au contraire, engendrer des comparaisons hautement suggestives montrant qu'il y a encore une grande indétermination dans le choix des instruments qui approchent le point, le segment, la courbe, ..., dans un esprit de généralisation. L'idée d'approche, de voisinage, aura probablement toujours quelque chose de subjectif. Là encore, la difficulté est d'analyser le domaine du très petit indéfiniment décroissant sans idées formelles empruntées à l'échelle vulgaire. Ce n'est jamais absolument possible. La seule terminologie (Bein, Baum, ...) suffit à le prouver, mais l'art constructif des définitions n'en joue pas moins d'une façon supérieurement intéressante.

A. Buhl (Toulouse).

Heinrich Dörrie. — **Triumph der Mathematik.** Hundert berühmte Probleme aus zwei Jahrtausenden mathematischer Kultur. — Un vol. in-8° de VIII-386 pages et 112 figures. Prix: broché, RM. 7; relié, RM. 9. Ferdinand Hirt. Breslau, 1933.

Cent problèmes célèbres issus de deux millénaires de culture mathématique ! Beau projet que de vouloir rassembler de telles choses et combien réussi ! Le livre est d'un véritable savant, car il comprend de grands problèmes à la manière de Gauss et d'Abel et il est stupéfiant qu'ils soient alors traités en quelques pages. D'autres sont de simples curiosités, genre Bachet de Méziriac, mais toujours étonnantes.

Parmi 25 problèmes arithmétiques, signalons d'abord le Problema bovinum d'Archimède et celui de Newton dont la solution tient en un déterminant du troisième ordre égale à zéro. Puis le problème 4, dit des sept 7. Une division arithmétique ordinaire, d'apparence assez chargée, a, par accident, tous ses chiffres effacés, sauf sept 7. Il est possible de retrouver tous les chiffres illisibles ! Les problèmes suivants roulent sur des considérations élémentaires permettant de reconstruire les séries entières les plus usuelles. Le 19 a trait à l'équation de Fermat $x^2 - ay^2 = 1$, le 20 à l'impossibilité, en nombres entiers, de $x^3 + y^3 = z^3$. En 23 est la règle de Sturm, en 24 l'impossibilité abélienne de la résolution par radicaux, en 25 le lemme de transcendance de Lindemann-Hermite.

Suivent 15 questions planimétriques. Les droites et les cercles remarquables associés au triangle (Feuerbach, Malfatti, ...) sont d'abord mis à contribution. En 32, nous rencontrons le Problème de Mascheroni qui ne devrait peut-être plus porter ce nom (voir *L'Ens. math.*, t. 28, 1929, p. 144) mais sans qu'il soit utile, pour le moment, de s'attacher à cette question de priorité. En 33 est la réciproque de Steiner avec intervention d'un cercle fixe. Puis viennent la duplication du cube (34), la trisection de l'angle (35), le polygone régulier de 17 côtés (36).

Les coniques et les courbes cycloïdales fournissent 25 problèmes. Après les emprunts faits à Poncelet et à Brianchon, passons à l'astroïde (51), à l'hypocycloïde à trois rebroussements (52), courbe admirable qui a d'ailleurs l'honneur d'orner la couverture du volume, aux quadratures remarquables, aux configurations déjà rencontrées dans un précédent ouvrage de D. Hilbert.

Les problèmes stéréométriques sont au nombre de dix. Les corps réguliers y jouent le rôle principal. Viennent ensuite treize questions d'astronomie ou de science nautique, avec la loxodromie, les cadrans solaires, les courbes d'ombre, les éclipses, les stations et rétrogradations planétaires.

Enfin, hors série, restent 12 problèmes. D'abord (89) la curieuse relation d'Euler et de Steiner

$$\frac{\log e}{e} \geqq \frac{\log x}{x} .$$

En 90 est le problème de Fagnano sur le triangle de périmètre minimum inscrit dans un triangle acutangle, en 91 celui de Fermat à Torricelli sur la somme minimum des distances d'un certain point aux sommets d'un triangle quelconque. En 92 est le problème de la navigation contre le vent, en 93 celui de Réaumur inspiré par les cellules que construisent les abeilles, en 94 celui de la visibilité optimum de l'anneau de Saturne, en 95 celui du maximum d'éclat de Vénus, en 96 celui de la présence d'une comète à l'intérieur de l'orbite terrestre, en 97 celui du plus bref crépuscule. Les trois derniers problèmes, empruntés à Steiner, se rapportent à des propriétés extrémales relatives aux ellipses, au cercle et à la sphère. Ces dernières questions géométriques font penser à nouveau à la Géométrie de l'évidence de Hilbert. En résumé, tout le volume s'impose à l'admiration parce que l'auteur, manifestement, n'a voulu rassembler que des choses admirables. Il a fait, de plus, œuvre hautement utilitaire, car il se trouve que tout ce qu'il a rassemblé, en algèbre, en analyse, en géométrie, est précisément ce fonds rapidement accessible qui peut servir maintenant à bâtir des variations sur des questions résolues. Si l'on consentait à passer sur la rédaction allemande, je recommanderais volontiers ce beau volume aux candidats à notre Agrégation.

Enfin signalons un point où se mêlent des souvenirs toujours émouvants relatifs à Charles Ange Laisant qui fut, ne l'oublions pas, l'un des fondateurs de la présente Revue. Pour le problème 8, dit « des couples d'époux » de Lucas, nous avons une solution particulièrement élégante qui repose sur une formule récurrente due à Laisant. Ce dernier certes eût une vie agitée où la Science s'entrechoqua avec beaucoup d'autres choses. Tout de même, le voici cité, par un auteur lointain, indéniablement impartial, à propos du Triomphe des Mathématiques. A. Buhl (Toulouse).

Evelyn Walker. — **A Study of the Traité des Indivisibles of Gilles Persone de Roberval.** (Teachers College, Columbia University, Contributions to Education, No. 446). — Un vol. gr. in-8° cartonné de VI-272 pages. Prix: $3.00. Bureau of Publications, Teachers College, Columbia University. New York City, 1932.

Le titre ci-dessus est prolongé par des sous-titres indiquant que l'étude a été entreprise en vue de répondre, autant que possible, à deux questions. Quelles propositions, contenues dans le volume, appartiennent vraiment en propre à Roberval et quelles sont celles qui seraient plutôt dues à ses prédécesseurs ou à ses contemporains ? Quel effet, s'il y en a eu un, a eu l'œuvre de Roberval sur ses successeurs ?

L'auteur de la même étude, en quelques lignes d'avertissement, remercie, de plus, M. David Eugene Smith, qui a tout mis à sa disposition, notamment son insurpassable fonds de connaissance (his inexhaustible fund of knowledge) pour en permettre la publication.

Voilà qui est bel et bon. Les géomètres français savent maintenant à qui leur reconnaissance doit aller quant à cette résurrection de l'œuvre de Roberval à une époque où les quanta feraient peut-être assez bon ménage avec les indivisibles. Remercions nos amis américains, tout en regrettant que Gilles Persone, né le 8 août 1602, à Roberval, près Beauvais, n'ait pas, à l'heure actuelle, trouvé, en France, un historien digne de lui.

Vraiment Roberval avait besoin d'être ressuscité. Son caractère a malheureusement desservi son intelligence, celui-ci lui faisant des ennemis dans le monde même où celle-là pouvait le mettre en faveur. Influencé par Mersenne, il fut l'ami de Fermat mais se prit de querelle avec Descartes et Torricelli. Il eut des idées communes avec Cavalieri sans que l'on puisse, dans un sens ou dans l'autre, parler de plagiat. Il influença Pascal. Il tenta de justifier les « indivisibles » en ayant recours aux propriétés physiques de la matière et, de toutes façons, exécuta des passages à la limite parfaitement corrects.

L'intégration l'intéresse beaucoup et il est encore intéressant de le suivre dans ce domaine pour peu que l'on emploie les symboles d'aujourd'hui. Ses courbes préférées sont des « quadratrices » mais il manie couramment des roulettes et effectue des cubatures; il considère des aires équivalentes, des centres de gravité et rectifie la cycloïde dont, d'ailleurs, il construit la tangente. Il s'attaque à d'autres courbes, notamment à la parabole, et donne des méthodes de tangentes comparables à celles de Descartes, Fermat, Torricelli, Wallis, Barrow, Newton et Leibnitz. Tout ceci ne va pas, très certainement, sans questions de priorité épineuses à trancher, mais la simple chronologie est souvent en faveur de Roberval.

Quant à la traduction même du Traité des Indivisibles, elle devient, avec son recours continuel à l'intuition géométrique et l'emploi de notations modernes, un exposé dont la lecture est attachante, exposé riche en invariances d'aires où l'on retrouve, sous des formes variées, des dénombrements équivalents d'éléments équivalents parce qu'indivisibles.

Une bibliographie étendue s'imposait. Elle remonte à l'Antiquité, notamment à Archimède. Les historiens modernes des Mathématiques, Chasles, Rouse Ball, Duhem, Eneström, David Eugene Smith, dont on comprend l'empressement déjà signalé, Paul Tannery, Zeuthen n'ont pas tous eu pour Roberval la même considération. L'étude nouvelle devait cependant s'inspirer de leurs opinions et se justifier en elle-même par des vues originales sur un esprit dont l'originalité, vue à distance, risque de se diluer dans l'atmosphère géniale du dix-septième siècle.

Finalement Roberval est très heureusement brossé, campé sur ses œuvres et nous devons dire encore, nous autres Français, tout notre admiration pleine de gratitude au fin portrait qui nous en vient d'Amérique.

A. Buhl (Toulouse).

Gian Antonio Maggi. — **Selecta.** Raccolta di Scritti matematici dal 1880 al 1931. — Un vol. gr. in-8° relié, de 390 pages. Prix: L. 75. Casa editrice E. S. T., Milan, 1932.

Ces *Selecta* semblent nées de pensées analogues à celles qui engendrèrent le volume de même titre offert, il y a quelques années, à M. Emile Picard. Une brève allocution dit la fraîcheur, la vigueur d'esprit avec laquelle le professeur Maggi quitte une chaire en laquelle il a enseigné pendant presque un demi-siècle. Ses disciples lui offrent un livre formé avec ses propres travaux en le priant d'y voir un hommage s'adressant à la vie de l'homme et du citoyen autant qu'à l'œuvre enthousiaste et infatigable concernant la Science. Suivent les signatures venues de toute l'Ecole italienne.

Des Mémoires rassemblés, treize ont trait à la Mécanique rationnelle, sept à l'Electrostatique, six à l'Optique, trois à l'Elasticité, quatre au Potentiel, quatre à la Relativité; enfin six se rapportent à des sujets variés. L'espace nous manque pour en reproduire les titres généralement longs, voulant toujours indiquer sans ambiguité l'objet envisagé. Signalons le mouvement des fils et l'équilibre des surfaces flexibles, le mouvement des systèmes non holonomes avec l'énergie d'accélérations de Paul Appell. On sait que ce dernier s'est occupé aussi du mouvement des fils. Plus loin nous trouvons Painlevé et le frottement avec des notions générales de Cinétostatique. Qu'est-ce que la force centrifuge ? La question est de 1925. Voici des « Réflexions sur l'exposition des Principes de la Mécanique rationnelle » publiées dans *L'Enseignement mathématique* en 1901.

Clifford, Lobatschewsky, Hertz interviennent. Quand nous avons publié cela, nous devions joliment faire l'effet d'une Revue d'avant-garde. La signification, dans le passé et dans l'avenir, des équations dynamiques, est envisagée dans un Mémoire de Mécanique ondulatoire qui date de 1929 et va, de Fermat et Maupertuis, à Schrödinger.

L'électrostatique est imprègnée de Poisson, Maxwell, Mascart. Les inversions d'intégrales définies y sont nombreuses. Les formules stokiennes interviennent en Optique et dès 1887, ce qui fait même l'effet d'une véritable curiosité. Ondes et corpuscules sont considérés depuis une dizaine d'années. L'équilibre élastique est traité par des méthodes parfaitement symétriques. Le potentiel est discuté d'après Poincaré et avec M. Levi-Civita. La Relativité intervient dès 1921; on y reprend le Calcul différentiel absolu et on y discute des interprétations diverses de la transformation de Lorentz. En 1925, M. Maggi a peut-être été un peu trop émotionné par l'expérience de D. C. Miller au Mont Wilson. Certes, la conscience et l'habileté de l'expérimentateur ne pouvaient faire l'ombre d'un doute, mais les théories einsteiniennes ont précisément révélé l'extrême complexité d'un monde physique que le dix-neuvième siècle avait projeté d'enfermer en un petit nombre de principes. Combien nombreux sont les *effets*, généralement décorés du nom du premier observateur, qui semblent se jouer des généralités. Voilà qui remet en mémoire une Note, de M. E. Carvallo, publiée aux *Comptes rendus* du 7 novembre 1932 et intitulée: C'est l'effet Esclangon qui fut observé, par M. Miller, au Mont Wilson. Ceci n'empèche pas, page 341, quelques aperçus fort intéressants sur le *deviating vector* de Stokes. Les variétés qui terminent sont pleines de symbolisme moderne; la valeur de l'auteur est partout et un heureux rassemblement de thèmes différents la fait admirablement ressortir. A. Buhl (Toulouse).

D. E. Rutherford. — **Modular Invariants.** (Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 27). — Un vol. in-8° de VII-84 pages. Prix: 6*s*. net. Cambridge University Press. Londres, 1932.

Thème ardu, de qualité supérieure pour qui est de force à apprécier cette qualité. Il semble d'ailleurs que cette remarque puisse être faite pour tout ce qui paraît dans ces *Cambridge Tracts.* Il s'agit ici de groupes linéaires dans leurs rapports avec la Théorie des Nombres et le sujet m'a tout de suite fait penser à un article de M. G. A. Miller, *Introduction à la Théorie des congruences au moyen de la Théorie des groupes*, que j'ai eu l'honneur de traduire de l'anglais et que *L'Enseignement mathématique* a publié en 1930. Seulement, nous sommes ici dans un domaine beaucoup plus formulé, toujours très d'accord avec les préoccupations de la Mécanique ondulatoire, encore qu'il n'en soit pas du tout question explicitement. Mais c'est le domaine matriciel, le domaine des opérateurs se rapportant à des transformations linéaires, les décomposant ou les engendrant. Et le sujet a des faces nouvelles exigeant de nouveaux symboles. Il y a des formes polaires aux dérivées partielles ou, tout simplement, des *polaires modulaires* qui, à part des complications d'indices, rappellent les formes polaires de la géométrie analytique. Tel est l'opérateur modulaire d'Aronhold conduisant, en particulier, aux transvectants modulaires. De même qu'il y a des opérateurs élémentaires, de nature différentielle, qui transmuttent une fonction en *zéro*, il y en a qui remplacent une telle égalité par une congruence. Et tout ceci est très anglo-américain, les dames mêmes s'en mêlant comme le prouvent les recherches de Miss Hazlett et de Miss Sanderson. L'origine de ces préoccupations remonte à Galois et même à Fermat, ce qui fait grandement regretter que ces illustres arithméticiens français n'aient pas été suivis, avec les méthodes précédentes, par des contemporains compatriotes. Les auteurs modernes qui triomphent ici sont Hurwitz, Dickson, Glenn, Williams, Feldstein, Nœther et quelques autres. Leurs travaux sont surtout disséminés dans les périodiques anglais et américains. Espérons que la mise au point de M. Rutherford élargira quelque peu un champ d'action qui paraît susciter partout le même intérêt. A. Buhl (Toulouse).

C. Carathéodory. — **Conformal Representation.** (Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 28). — Un vol. in-8° de VIII-106 pages. Prix: 6*s*. 6*d*. net. Cambridge University Press. Londres, 1932.

Ceci est beaucoup plus facile, bien que nous soyons toujours dans les groupes, mais comment pourrait-il en être autrement dès qu'il s'agit de transformations ou de représentations. Le premier groupe étudié est celui de Mœbius avec y fonction homographique de x lorsque x est complexe. C'est le point de vue des groupes fuchsiens et analogues qui conduit immédiatement aux angles et aux distances définis à l'aide d'un logarithme de rapport anharmonique. L'auteur ne se gêne pas plus que Poincaré (dont les *Œuvres*, t. II, sont mises à contribution) pour décerner le nom de *droites* aux arcs circulaires coupant orthogonalement le cercle fondamental.

Après des transformations classiques, changeant des aires simples en d'autres, nous arrivons aux recherches de Schwarz et de Harnack, non sans passer par le théorème de Liouville sur la constance d'une fonction entière bornée. Le lemme de Schwarz est une certaine invariance, d'une distance non-euclidienne, par une transformation de Mœbius. Il est complété par un théorème de Pick où il est question de mouvement non-euclidien. Suivent des considérations dues à Erhard Schmidt que l'ouvrage de M. Carathéodory publie pour la première fois. Parmi les extensions du lemme de Schwarz, se trouve un théorème de M. Julia où n'interviennent que d'ingénieuses considérations circulaires.

Les théorèmes fondamentaux de la représentation conforme conduisent aux familles normales de fonctions bornées, aux théorèmes d'existence quant à la solution de certains problèmes variationnels, aux familles normales de fonctions analytiques. On peut construire des familles normales composées de fonctions qui transforment des domaines simples en des cercles. La transformation des frontières, des multifurcations, est particulièrement délicate. Elle mérite particulièrement d'être étudiée dans le cas des courbes de Jordan.

Outre les auteurs déjà cités, nous retrouvons ici Darboux, E. Picard, Weyl, Montel (familles normales), Hilbert, Kœbe, Lindelöf, Lichtenstein. On sent, derrière le sujet, tout un passé physique, mais les opérateurs du tract précédent, de M. Rutherford, dans le même ordre d'idées, ont sans doute, pour eux, le présent et l'avenir. A. Buhl (Toulouse).

Oswald Veblen and J. H. C. Whitehead. — **The Foundations of Differential Geometry.** (Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 29). — Un vol. in-8° de x-98 pages. Prix: 6*s*. 6*d*. net. Cambridge University Press. Londres, 1932.

Maintenant, difficultés moyennes, bien que les auteurs voient en ce tract comme une suite du n° 24: *Invariants of Quadratic Differential Forms.* Et encore, est-ce bien une suite ? Non. C'est un « companion ». Le problème essentiel ici traité est: Choisir un système de coordonnées tel que...; il est permis d'avoir une *préférence* parmi divers systèmes *admissibles*, mais quant à faire de l'espace quelque notion première extérieure à nous et qui imposerait une géométrie, quelle baliverne ! Il semble que l'esprit du livre serait encore mieux respecté si le mot « Geometry » du titre était mis au pluriel. Mais peu importe.

On commence toujours par les transformations linéaires et les matrices; les conceptions quadratiques apparaissent avec la *distance*. Les géométries les plus importantes sont groupales; elles se précisent en devenant coordonnées ou, plus exactement, les groupes les fondent et les coordonnées leur donnent le maximum de maniabilité. Sur ce, quelques pages remarquables qui partent de Riemann, de Klein et du Programme d'Erlangen, pour aboutir à Cartan et à Schouten. Les coordonnées permises, admissibles, ne vont point sans considérations fonctionnelles qui peuvent ne jouer qu'en certaines *cellules* ou sur certaines *variétés* ou encore de cellule à cellule, de variété à variété. Les *fonctions de points* ou *scalaires* sont précisément ce qui donne une réalité au point.

Le procédé qui s'est révélé le plus puissant, quant à l'analyse élémentaire de toutes ces notions est, très probablement, celui qui consiste à procéder, de proche en proche, par variétés tangentes; sa forme mathématique est celle du Calcul différentiel absolu.

La structure de l'étendue, au fond, est toujours dans la dépendance du Nombre. On pourrait encore rappeler ici la phrase de Kronecker citée plus haut à propos des Œuvres de M. Hilbert. Pratiquement, tenus comme nous le sommes de sérier les questions, il nous faut faire de l'Arithmétique, de l'Analysis Situs, du Calcul infinitésimal, des Groupes, ... et, avec cela, satisfaire notre intuition tout en nous habituant à l'élargir beaucoup. Le résultat de ces efforts peut donner une sensation géométrique de grande envergure; c'est ainsi, du moins, que naissent les Espaces.

A. Buhl (Toulouse).

A. E. Ingham. — **The Distribution of Prime Numbers.** (Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 30). — Un vol. in-8° de viii-114 pages. Prix: 7*s*. 6*d*. net. Cambridge University Press. Londres, 1932.

Nous retombons dans les difficultés, mais combien tentantes pour peu qu'on les aime. Et ce petit volume est encore un « companion » pour celui publié, dans les mêmes *Tracts*, sous le n° 26, par le Prof. E. C. Titchmarsh, sur « The Zeta-function of Riemann ». Voir *L'Enseignement mathématique*, t. 29, 1930, p. 355.

Le présent exposé devrait plutôt être étudié avant celui du Prof. Titchmarsh; il serait plus élémentaire ou, du moins, n'introduirait la fonction

Zeta qu'après avoir dûment expliqué comment la question des nombres premiers conduit à cette fonction.

La question remonte à Euclide qui prouva que les nombres premiers formaient une suite illimitée. Elle intéressa Euler, Tchebychef à peu près en même temps que Riemann, puis la Vallée-Poussin, Hadamard, Littlewood. La comparaison entre $\pi(x)$, nombre des nombres premiers contenus dans les x premiers entiers, et li x est vraiment étonnante, encore qu'il ne s'agisse que d'un résultat approché. Quant à la fonction Zeta, elle peut apparaître très simplement après un théorème d'Euler bâti lui-même sur la propriété fonctionnelle $f(m)\,f(n) = f(mn)$. Elle admet une célèbre équation fonctionnelle dépendant d'un cosinus et de la fonction Γ. Il y a là des considérations à la Cauchy, des emplois de lacets, puis des recours à la théorie des fonctions entières qui ne semblent pas inférieurs à ce que donnent les plus modernes travaux concernant ces fonctions. De nombreuses transcendantes associées ont de curieuses représentations intégrales, notamment par intégrales définies qui deviennent ainsi comme des centres d'investigations analytiques profondes faites pour des raisons arithmétiques initiales qu'on ne perd jamais de vue. C'est dans un ordre d'idées analogue qu'interviennent les séries et les intégrales de Dirichlet.

Citons encore Landau, Bachmann, Maillet, Hardy, Riesz, H. Bohr, et comme auteurs de travaux tout-à-fait récents, R.-J. Backlund, Breusch, Cramer, Hoheisel, Ikehara, Karamata, Mordell, Pólya, Schnirelmann, Schur, Siegel, Wiener. C'est encore une liste qui n'est pas très française et cependant M. Jacques Hadamard avait magnifiquement ouvert le chemin.

A. Buhl (Toulouse).

Gaston Julia. — **Exercices d'Analyse.** Tome II. Fonctions analytiques. Développements en série. Résidus. Transformations analytiques. Représentation conforme. — Un vol. gr. in-8° de IV-344 pages et 86 figures. Prix: 70 francs. Gauthier-Villars et Cie. Paris, 1933.

Le tome premier de ces *Exercices* a déjà été analysé, ici-même, par M. Fehr (t. 27, 1928, p. 346). C'est toujours le même esprit, profond et original, apprenant beaucoup de choses, d'allure moderne, d'abord à propos de classiques énoncés de licence ou d'agrégation. Les questions plus ardues, professées dans les livres de M. Goursat et de M. Hadamard, élèvent bientôt le niveau. Les exercices ajoutés par M. Painlevé au *Recueil* de Tisserand, se trouvent eux-mêmes prolongés ainsi que bien des choses exposées sommairement par M. Emile Picard dans son prodigieux *Traité d'Analyse*. Telle est, par exemple, la conception des fonctions analytiques sur une surface, d'après Beltrami.

La représentation conforme, annoncée en dernier lieu parmi les sous-titres du volume, intervient élégamment dès les premières pages. Il s'agit même de ce que M. Carathéodory appelle « transformation de Möbius » dans sa *Conformal Representation* (voir plus haut). C'est l'homographie à variable imaginaire avec toutes ses belles conséquences non-euclidiennes. Je ne cite pas M. Carathéodory au hasard. Je crois que la comparaison des deux ouvrages serait des plus suggestives. Mais je crois aussi que des élèves français, qui jugeraient incommode ou trop onéreux de se documenter ainsi, trouveront auprès de M. Julia une érudition valant celle des meilleurs ouvrages étrangers. D'ailleurs, dans le chapitre suivant, M. Julia établit lui-même le contact avec les recherches dues à l'auteur de la *Conformal Representation.* Le lemme de Schwarz est repris, considérablement transformé et généralisé avec R. Nevanlinna et G. Hardy. Les limitations en module, sur frontières circulaires, conduisent au théorème des trois cercles de M. Hadamard. Des extensions aux moyennes superficielles sont possibles. Tout cela est profondément intéressant et original tout en devenant accessible à un bon candidat à la licence.

Les intégrales définies sont surtout calculées par la méthode des résidus, mais non sans comparaisons avec d'autres; les contours polaires sont bientôt compliqués de lacets à rôles cycliques. Les intégrales eulériennes interviennent *explicitement*, ce qu'il n'est pas inutile de souligner tant il est possible de faire de longs calculs, polaires ou cycliques, à propos d'intégrales dont le caractère eulérien, très simple, est cependant dissimulé.

Avec les transformations des domaines plans, nous nous élevons encore et considérablement vers les recherches de l'auteur sur l'itération des fractions rationnelles. Puis c'est le problème de Dirichlet avec Neumann, Schwarz, Poincaré, Picard. Là aussi, M. Julia peut faire intervenir de profonds travaux personnels et, d'une manière plus didactique, ses *Leçons sur la Représentation conforme* déjà publiées. Les problèmes font toujours image en élégantes figures. Les intégrales extrémantes complètent le tableau. Les nombreux clichés de l'ouvrage montrent, à eux seuls, que l'intuition géométrique n'est pas négligée. Elle joue même un rôle essentiel dans lequel il faut distinguer, en tout premier lieu, les propriétés circulaires. Le cercle est vraiment la courbe de prédilection dans la géométrie des concepts analytiques. C'est du moins l'opinion que M. Julia impose avec la plus remarquable des maîtrises. A. Buhl (Toulouse).

R. Wavre. — **Figures planétaires et Géodésie.** Préface de M. Jacques Hadamard. (Cahiers scientifiques publiés sous la direction de M. Gaston Julia. Fascicule XII). — Un vol. gr. in-8° de VIII-194 pages. Prix: 55 francs. Gauthier-Villars et Cie. Paris, 1932.

Autre volume malaisé à présenter après une Préface de M. Jacques Hadamard. Il était encore beaucoup plus difficile à écrire après les *Figures d'équilibre* de Poincaré et le tome IV du *Traité de Mécanique* de Paul Appell. Cependant M. Wavre n'est nullement au-dessous d'un si grand sujet exigeant une connaissance approfondie de tout ce qui rapporte au potentiel newtonien (problème de Dirichlet, de Neumann, ...) et à la statique des fluides puis qui déborde ce cadre, de manière dynamique, pour raisons d'observation. On sait, en effet, que des corps célestes, tels le Soleil ou Jupiter, ne tournent pas tout d'un bloc autour de leur axe. Peut-être en est-il de même de la Terre, avec une légère *dérive* des continents. Ces phénomènes ont considérablement élargi le problème qui, d'autre part, n'est pas resté purement newtonien. Comme le dit excellemment M. Wavre, l'idée d'une attraction entre corps célestes n'est qu'une représentation d'un phénomène plus subtil que la Gravifique d'Einstein nous a révélé et M. Crudeli est parvenu à écrire les équations du champ créé par la Terre au point de vue de la Relativité généralisée. D'autre part, c'est dans la rotation des corps célestes, notamment dans la rotation terrestre, que la notion du temps trouve sa base la plus ordinaire et la plus solide. La question ici envisagée tend donc à devenir une théorie générale et très difficile des champs considérés dans l'espace-temps.

Là, comme ailleurs, il faut préciser exactement d'où l'on part et les considérations ensemblistes ne sont pas superflues. Il faut bientôt distinguer entre mouvements *barotropes* et mouvements *baroclines* (Dive) et signaler le plan de symétrie normal à l'axe de rotation, découverte des plus remarquables, due à M. Lichtenstein, qui donne immédiatement la sphère dans le cas d'une rotation nulle, c'est-à-dire à axe indéterminé.

Il y a une représentation paramétrique de la stratification, une représentation analytique des surfaces équipotentielles, une impossibilité de stratifications ellipsoïdales qui aboutissent aisément à la théorie de Clairaut sous une forme propre à de nombreuses extensions. Ici l'auteur semble vraiment un digne continuateur de Poincaré, lequel s'est toujours retourné à l'aise, au moyen de formules peu encombrantes, dans des questions qui, au premier abord, semblaient inextricables. Il donne un procédé uniforme là où l'on a besoin de deux développements en fonctions sphériques, pour l'inverse de r, développements qui jusqu'ici ne pouvaient converger ensemble. Tisserand réclama, en vain, l'applanissement de cette difficulté.

Viennent les approximations successives où l'on ne néglige plus les termes d'un ordre supérieur au carré de la vitesse angulaire. Ces approximations ont un caractère itératif ou, du moins, peuvent l'avoir dans le cas d'astres suffisamment étendus provenant d'une condensation analogue à celle d'une nébuleuse. Les singularités, certes, ne manquent pas dans la question mais on conçoit mal qu'elles aient un rôle *physique* essentiel. On ne modifiera guère une figure planétaire en la modifiant en un point, si singulièrement choisi soit-il, d'où, malgré les bifurcations de la théorie, une continuité qui ne doit pas être perdue de vue. C'est ainsi que M. Wavre retrouve les principaux résultats classiques sans ces échafaudages de formules qui, dans Tisserand, sont franchement décourageants.

Les mesures géodésiques et les mesures précessionnelles doivent encore être en accord aisément saisissable, desideratum réalisé ici mieux que dans d'autres régions de la Science. La stabilité et les petites vibrations des astres fluides bénéficient du procédé uniforme indiqué plus haut. Bref, l'œuvre est d'une simplicité partout remarquable. Elle s'est prêtée, au récent Congrès de Zurich, à une brillante conférence. Elle honore maintenant les *Cahiers scientifiques* autant qu'elle a honoré le Congrès.

A. Buhl (Toulouse).

Jean Chazy. — **Cours de Mécanique rationnelle.** Tome I. Dynamique du point matériel. — Un vol. gr. in-8° de VIII-392 pages. Prix: 70 francs. Gauthier-Villars et Cie. Paris, 1933.

Ce Cours me cause un assez profond étonnement. Quand cela m'arrive, surtout en matière d'analyse bibliographique, je me demande toujours si je comprends bien et si je n'ai pas tort d'être étonné. Je crois, au moins, que M. Chazy aurait dû s'expliquer sur l'esprit de son livre dans une Préface qui, réduite à une dizaine de lignes, n'explique guère ce que je souhaiterais comprendre. Le volume est écrit comme on aurait pu l'écrire aisément il y a quarante ans et cependant il serait difficile d'être mieux averti, que l'auteur de *La Théorie de la Relativité et la Mécanique céleste*, sur les prodigieux changements qui, au vingtième siècle, sont survenus en Mécanique.

M. Chazy nous donne probablement une leçon de pédagogie. Il estime sans doute qu'un premier enseignement de la Mécanique doit être conforme au classicisme newtonien; Henri Poincaré ne conseillait l'étude des mécaniques nouvelles qu'à ceux qui possédaient l'ancienne absolument à fond. Tout de même, dans l'étude des principes, je relève des comparaisons avec les opinions des Scholastiques et des considérations galiléennes sur les déterminations *complètes* des positions et des vitesses. Or, ces opinions ou ces considérations sont, de toutes manières, absolument périmées à l'échelle corpusculaire.

La Relativité est timidement citée, page 65, pour dire que les Principes anciens et la Mécanique newtonienne continuent à donner une représentation extrêmement approchée des mouvements de la réalité. Cela dépend de quelle réalité et de quelle échelle.

Sans doute il y a, dans les nouveautés, de si grandes difficultés qu'on ne peut les enseigner immédiatement aux élèves qui suivent, même en Sorbonne, leurs premiers cours de Mécanique. Et puis la science nouvelle manque totalement de plasticité quant à l'élaboration de questions d'examens ou de concours. C'est grave ! Tout de même, il faut s'arranger et mieux indiquer ce qu'on croit devoir omettre dans un premier enseignement. Qu'on me permette de regretter au moins l'insuffisance de la Préface.

De plus, je lis dans celle-ci que le Cours correspond essentiellement au Programme du Certificat de Mécanique rationnelle. diminué de la Cinématique. Soit. Mais qu'est-il advenu de la Statique ? On peut la laisser de côté, l'étudiant pouvant la trouver ailleurs. On peut aussi la réserver pour plus tard, la placer à côté du mouvement des systèmes et des solides.

Mais, là encore, expliquer ses intentions n'est pas superflu, d'autant plus que l'ouvrage commence par une bonne théorie vectorielle à applications statiques nombreuses. Enfin, l'exposé a trait au point matériel et se termine par des exercices d'examen ayant trait, presque tous, aux mouvements des systèmes ou des solides. Vraiment, je me demande ce qui est arrivé. Le livre, à coup sûr, ne manque pas d'intelligence, mais il semble avoir été écrit dans des conditions anormales.

Quant à cette intelligence propre, quant à ce qui est vraiment exposé, nous ne pouvons faire que des éloges. La clarté mathématique digne du grand souvenir de Paul Appell est conservée partout; les symétries sont des plus soignées. De nombreuses difficultés analytiques, généralement des indéterminations, à partir de données initiales, qui tiennent à la nature même des équations différentielles, sont étudiées très soigneusement aussi. Les attraction et répulsion proportionnelles à la distance donnent des trajectoires coniques sur lesquelles on retrouve les théorèmes d'Apollonius. Le mouvement ponctuel sur une ligne ou sur une surface donne surtout lieu à de belles applications de la méthode de Lagrange. L'ombre de Paul Appell est encore là mais celle de Poincaré, si on le voulait, ne serait pas loin non plus pour nous rappeler — et combien brièvement — qu'une mécanique énergétique, à énergie totale représentable par une seule fonction est aussi une mécanique d'équations canoniques, ces équations pouvant précisément s'écrire à partir d'une seule fonction. Alors nous tiendrions les deux séries de variables canoniques, mesurables ensemble ou non suivant qu'on est en Mécanique classique ou en Mécanique ondulatoire.

Voilà par où je passerais si l'on me proposait de moderniser l'exposé. Après tout, M. Chazy le fera peut-être dans son tome second.

Quant à mes critiques ci-dessus, elles ne peuvent nuire à l'ouvrage; elles visent particulièrement son allure philosophique et n'empècheront nullement les auditeurs de M. Chazy d'avoir recours, en tout premier lieu, au livre de leur professeur pour s'en trouver très bien quant à leur préparation aux examens. Seulement nous sommes à une époque où je me défie du classicisme à outrance; je crains que ce soit lui qui ne mette la France en état d'infériorité quant à l'élaboration de travaux concernant les formes les plus récentes de l'Energétique.

A. BUHL (Toulouse).

Edouard HUSSON. — **Les trajectoires de la Dynamique** (Mémorial des Sciences mathématiques, dirigé par Henri Villat; fasc. LV). — Un fascicule gr. in-8° de 58 pages. Prix: 15 francs. Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1932.

Ce fascicule rappelle surtout *Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste* de Poincaré. Il reprend les choses, de manière relativement élémentaire, peut être pas tout de suite à partir des équations canoniques mais à partir des équations de Lagrange qui sont, à coup sûr, fort voisines. Le sujet est conduit jusqu'aux développements récents tels ceux de MM. Levi-Citiva, Chazy, Birkhoff qui montrent bien que les trois volumes de Poincaré n'étaient pas aussi inaccessibles et inféconds qu'on l'a dit parfois.

Les équations canoniques apparaissent dès la page 2; elles sont suivies de la représentation d'un mouvement à n paramètres dans un espace de Riemann et des formes variationnelles des équations de la Dynamique. Quant à l'intégration locale de ces équations, c'est précisément un thème sur lequel s'est dépensé le génie de Poincaré puis celui de M. Jacques Hadamard, pour montrer qu'une étude locale ne pouvait être une étude isolée, qu'elle était inséparable d'une étude qualitative de l'ensemble des solutions. Les recherches de M. Emile Picard, sur l'intégration par approximations successives, celles de M. Elie Cartan, sur les invariants intégraux, ont parachevé l'œuvre de manière aussi profonde qu'élégante.

Les travaux personnels de M. Husson ont trait à des mouvements de solides révolutifs; on se trouve dans des cas simples de mouvements cycliques. On peut passer de là aux cas de Liouville et de Stäckel, perfectionnés par MM. Levi-Civita, Burgatti, Dall' Acqua, cas où l'équation de Jacobi admet une intégrale complète, de structure additive, à variables séparées.

Quant aux résultats de M. P. Painlevé, ils deviennent particulièrement intuitifs, dans l'espace de Riemann; les trajectoires les plus remarquables correspondent aux géodésiques d'un tel espace. C'était le point de vue einsteinien avant Einstein.

Les découvertes de Poincaré sur la stabilité à la Poisson, la quasi-périodicité, le rôle des invariants intégraux sont réindiquées brièvement, dans un dernier Chapitre, avec le secours moderne du langage ensembliste. Le cadre du fascicule était bien étroit pour de si grands sujets mais l'auteur a donné, tout au moins, les indications bibliographiques essentielles.

A. BUHL (Toulouse).

G. Evans. — **Stabilité et Dynamique de la Production dans l'Economie Politique** (Mémorial des Sciences mathématiques, dirigé par Henri Villat; fasc. LVI). — Un fascicule gr. in-8° de 60 pages. Prix : 15 francs. Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1932.

Le sujet n'est pas aussi nouveau que certains pourraient le croire. Il commence au moins avec Cournot (Paris, 1838). Il a été remis franchement en lumière par Pareto (Lausanne, 1896) et maintenant s'apparente tout naturellement au Calcul des Variations et aux Equations intégrales. J'ai personnellement le souvenir d'un opuscule publié, sur la question, par Laurent, Examinateur à l'Ecole Polytechnique, vers 1900, et c'est par là que j'en ai commencé l'étude. Cet opuscule n'a pas laissé de trace dans la bibliographie faite ici, par M. Evans, et, sans doute, cela ne s'imposait guère mais, de toutes façons, il s'agit de quelque chose de mathématique qui, à différentes époques, a tenté des mathématiciens.

Il est bien certain que la seule existence de la monnaie crée une arithmétique qui se précise, chez les commerçants, sous forme de comptabilité. Pourquoi ne préciserait-on pas, au delà, jusqu'à créer une algèbre, une analyse, une statique et une dynamique économiques. Les économistes acceptent, assez volontiers, l'idée; les mathématiciens d'aujourd'hui, sans nier le bien-fondé de celle-ci, sont peut-être plus tièdes, comme s'ils ne voyaient là qu'un intérêt médiocre. Or. M. Evans se propose précisément de montrer qu'il n'y a rien à craindre de ce côté ; l'intérêt est grand, apparenté aux méthodes fonctionnelles, aussi grand que celui de la Biologie mathématique de M. Volterra. L'un des points les plus saillants est une théorie dimensionnelle due originellement à Jevons qui la bâtit d'une manière assez fantaisiste, perdant de vue « dans l'analyse mathématique de la valeur, la valeur de l'analyse mathématique » mais sans nuire cependant à la conception fondamentale. La citation entre guillemets prouve que M. Evans s'exprime parfois en humoriste critiquant, tout le premier, l'introduction de l'algorithme analytique là où il n'a que faire; il redevient d'ailleurs très sérieux dès que le sujet l'exige vraiment. Les paradoxes sont assez nombreux tels celui de la concurrence et de la coopération, thèmes fort distincts, opposés même mais en lesquels cependant tout concurrent et tout coopérateur recherchent un maximum de profits individuels. Il faut également être en garde contre des généralisations mathématiques qui ne généralisent aucune idée économique. Les *crises* sont d'une analyse fort simple; se produisant si naturellement, en théorie, il serait extraordinaire qu'elles n'aient jamais lieu en fait. Ici la théorie devient consolatoire.

A. Buhl (Toulouse).

J. Delsarte. — **Les Groupes de Transformations linéaires dans l'Espace de Hilbert** (Mémorial des Sciences mathématiques dirigé par Henri Villat; fasc. LVII). — Un fascicule gr. in-8° de 60 pages. Prix: 15 francs. Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1932.

On sait que tout groupe de Lie admet un groupe *linéaire* correspondant, de *structure* identique. C'est de là que viennent les *représentations* de groupes quelconques par des *matrices*. Or l'esprit de généralisation le plus abstrait comme les nécessités de la Mécanique quantique portent à étendre tout ceci, pour une infinité de variables, en des matrices à une infinité d'éléments. M. Jean Delsarte représente ici l'esprit de généralisation abstrait.

Il s'agit de *fonctionnelles* linéaires pour lesquelles la notion de structure ci-dessus se conserve ou ne se conserve pas mais pour lesquelles, en revanche, apparaissent des considérations intégrales, généralement invariantes, créant, par exemple, des *distances* généralisées avec lesquelles le langage géométrique devient possible, d'où perception logique d'un « espace » qui est celui de Hilbert. Les considérations intégrales en jeu sont forcément à entendre au sens de Lebesgue; la continuité est *forte* ou *faible*. Les dénombrements paramétriques se compliquent aussi de données variant d'une manière continue, d'où l'introduction de nombres transfinis. Sur un tel terrain doivent évidemment naître les équations intégrales à la Fredholm ou à la Volterra.

Une très grande importance s'attache au groupe invariant une forme quadratique fonctionnelle puis à ceux invariant une forme grassmannienne généralisation de la forme dite ordinairement à multiplication extérieure. La structure des groupes obtenus peut être étudiée par le jeu d'un crochet $[\alpha\ \beta]$ généralisé; elle s'apparente aux questions structurales concernant les *noyaux*. Mais il y a de grosses difficultés à conserver, avec ces nouveaux crochets, les problèmes à la Killing si bien illustrés par les admirables travaux de jeunesse de M. Elie Cartan. La Thèse de ce grand géomètre est d'ailleurs placée en tête de l'index bibliographique du fascicule; dans cet index, outre les noms déjà cités, relevons ceux de MM. Fréchet, Goursat, Hilb, Paul Lévy, Marty, Plancherel, Riesz, Schmidt, Toeplitz, Vitali, Weil.

Le sujet n'abonde guère en formules compliquées; c'est essentiellement une théorie structurale, une théorie d'espaces de groupes où toute l'importance appartient aux éléments de transformation, non aux éléments transformés. Les rotations fonctionnelles de M. Delsarte donnaient à cet auteur toute l'autorité nécessaire pour entreprendre une exposition délicate et à analogies souvent illusoires. A. Buhl (Toulouse).

Th. De Donder. — **Application de la Gravifique Einsteinienne à l'Electrodynamique des Corps en mouvement** (Mémorial des Sciences mathématiques dirigé par Henri Villat; fasc. LVIII). — Un fascicule gr. in-8° de 60 pages. Prix: 15 francs. Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1932.

On entendait fréquemment dire, il y a quelques années, que la Gravifique avait besoin d'être refondue. M. De Donder s'est toujours élevé contre cette manière de voir et continue à prouver qu'avec les points de départ admis il y a plus de quinze ans, toutes les questions actuelles peuvent être atteintes et même étendues. La Thermodynamique et la Mécanique ondulatoire sont englobées. On peut bâtir un Calcul tensoriel abstrait ce qui n'est pas la méthode ici employée; les préoccupations physiques d'autrefois restent en évidence et la terminologie en fait abondamment foi.

Les progrès, les incomparables méthodes d'extension modernes jouent sur ces points de départ et c'est pourquoi nous trouvons, dans le texte du sympathique auteur, tant de choses (équations de Maxwell, force de Lorentz, effet Joule, vecteur de Poynting, vecteur de Max Abraham, Mécanique de Dirac,...) dites *généralisées*.

Le présent fascicule est le quatrième publié par M. Th. De Donder dans le *Mémorial des Sciences mathématiques*. Il forme, avec les trois précédents, une admirable synthèse terminée par l'électromagnétostriction, les tensions de radiation, l'hystérèse, la thermodynamique relativiste. Les équations relativistes fondamentales devaient être complétées; elles sont toujours d'accord avec les équations de Maxwell jouant le rôle de principes analytiques fondamentaux, principes déjà élargis depuis longtemps.

Naturellement les choses deviennent particulièrement maniables dans un champ de Minkowski; les tensions de radiation ont des expressions aisément comparables en Mécanique classique et en Relativité (Léon Brillouin), le repos des systèmes électromagnétiques permet de juger toute l'ingéniosité qu'il a fallu déployer pour passer au cas du mouvement.

La transformation de Lorentz a toujours sa physionomie originelle; elle a aussi des variances géométriques simples intéressant notamment la notion de volume, des covariances et des contravariances dont le jeu est alors facile à suivre. La thermodynamique des corps en mouvement rectiligne et uniforme livre, de même, toutes ses variances et, en particulier, l'invariance de l'entropie. Avec la théorie de Dirac nous passons à des équations photoniques s'accordant merveilleusement avec les équations gravifiques et électroniques. La synthèse est aussi profonde que puissante. A. Buhl (Toulouse).

L. Leau. — **Les suites de fonctions en général. Domaine complexe** (Mémorial des Sciences mathématiques dirigé par Henri Villat; fasc. LIX). — Un fascicule gr. in-8° de 48 pages. Prix: 15 francs. Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1932.

Le domaine réel a déjà été examiné, par M. Leau, dans un fascicule précédent. Il est intéressant et nécessaire de rapprocher les deux cas, de voir ce qui peut se conserver en passant de l'un à l'autre. Dans le domaine réel, où excellait René Baire, nous voyons, par exemple, que les suites de fonctions continues ne jouissent pas, en général, de la continuité.

Les suites de fonctions analytiques jouissent-elles, en général, de l'analyticité ? Plus exactement, comment les singularités des termes de la suite vont-elles retentir sur les singularités d'une fonction somme ou limite de cette suite. De telles questions sont extrêmement compliquées. Une simple série entière a des termes à singularité polaire (z^n a un pôle d'ordre n à l'infini) et peut présenter des singularités déjà très quelconques. Les suites de fonctions risquaient d'être le domaine de l'inextricable si d'ingénieux chercheurs n'avaient trouvé, dans le champ complexe, de merveilleux procédés d'exploration. Des domaines D sont devenus eux-mêmes des limites de domaines D_n, le tout pouvant être transformable par représentation conforme. L'intégrale de Cauchy reste à l'honneur. Sans doute, on la reconstruit parfois, de façon pointilleuse, sur des ensembles où Cauchy ne pouvait évidemment l'aventurer mais sa plasticité n'en est alors que plus remarquable.

Toutes ces considérations, déjà si étendues, ne demandent qu'à s'étendre encore. On les reprend sur les fonctions algébroïdes $u\,(z)$ pour lesquelles

$$u^v + a_1(z)\,u^{v-1} + \ldots + a_v\,(z) = o,$$

les $a\,(z)$ étant holomorphes ou méromorphes. On les étend aux fonctions de n variables complexes et même aux fonctions d'une infinité de variables, d'où une notion de fonctionnelle complexe présentant des caractères tout à fait nouveaux et d'une classification encore rudimentaire. Avis aux chercheurs. Il semble bien que l'Ecole française ait particulièrement brillé dans l'élaboration précédente avec MM. Denjoy, Fréchet, Hadamard, Julia, Montel, Valiron. A l'étranger, Arzela, Bieberbach, Blaschke, Carathéodory, Hartogs, Hilbert, Lindelöf, Lusin, Nevanlinna, Ostrowski, Pompeiu, Priwaloff ont apporté au sujet des contributions souvent assez disparates mais que l'on reliera mieux maintenant grâce à l'exposition de M. Leau.

A. Buhl (Toulouse).

Th. Got. — **Propriétés générales des Groupes discontinus** (Mémorial des Sciences mathématiques dirigé par Henri Villat; fasc. LX). — Un fascicule gr. in-8° de 62 pages. Prix: 15 francs. Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1933.

Encore des groupes ! Etant donnée l'allure actuelle de la Science, ce n'est pas superflu. Le *Mémorial*, parmi tant d'autres services rendus aux mathématiciens, rend encore le service général de faire cesser l'ostracisme qui régnait, surtout en France, contre la Théorie des groupes. Le présent fascicule n'est pas sans présenter certaines analogies avec celui de M. Delsarte analysé un peu plus haut, mais, après quelques préliminaires très généraux, il se spécialise beaucoup plus en s'en tenant, en somme, aux groupes homographiques à une variable complexe. Cependant, le sujet est immense. L'exposé de M. Got pourra servir d'introduction modernisée au tome second des *Œuvres* de Poincaré et également au tome second ajouté par le regretté Fatou aux *Fonctions algébriques* de Paul Appell et de M. Edouard Goursat. Ceci non sans passer par les groupes de M. Emile Picard. Les noms d'aussi grands géomètres montrent tout de même que la théorie a eu aussi de profondes racines en notre pays, mais comme accidentellement et de manière précisément ... discontinue.

Le fascicule actuel part de généralités qui s'appliquent tout aussi bien aux groupes continus. On y trouve l'isomorphisme, l'holoèdrie, la mérièdrie, la notion de groupes liés et, comme première figure, une sorte de magnifique rosace, uniquement formée d'arcs circulaires, qui montre bien que certains groupes peuvent avoir, au point de vue géométrique, une représentation accessible avec de minimes préliminaires et prometteuse de résultats des plus esthétiques.

Les substitutions fuchsiennes et automorphes conduisent sans peine à la Géométrie de Cayley particulièrement étudiée quant à la notion de mouvement et dans un esprit constructif. La composition des substitutions, leur permutabilité sont également traitées de manière cinématique. Plus loin, nous pourrions risquer quelques comparaisons avec le fascicule précédent, de M. Leau, car les domaines de discontinuité propre peuvent être ceux de *familles normales* selon les conceptions de M. Montel. Au total, M. Got a préparé le terrain pour les plus beaux épanouissements analytiques; avec quelle facilité il pourrait, sans doute, dans un autre fascicule, passer des groupes aux fonctions automorphes.

A. Buhl (Toulouse).

A. Buhl. — **Structures analytiques et Théories physiques** (Mémorial des Sciences physiques dirigé par Henri Villat et Jean Villey; fasc. XXII). — Un fascicule gr. in-8° de 60 pages. Prix: 15 francs. Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1933.

Ce fascicule, par son sujet, aurait pu être analysé avec les ouvrages mentionnés en tête de la Bibliographie du présent numéro. Il faut, en effet, le rattacher à la Mécanique corpusculaire et ondulatoire. Le point de départ est celui qui caractérise tous les travaux de Physique théorique de M. Buhl; il est dans les identités fondamentales du Calcul intégral, telles

$$\int_C X dY = \int\int_A dX dY .$$

De telles identités contiennent en germe la multiplication extérieure et les formules stokiennes, choses d'où l'on passe immédiatement aux équations de Maxwell, à leurs compléments gravifiques et, tout aussi bien, aux théories classiques concernant les mouvements des milieux continus. C'est à ce dernier point de vue que l'on peut rattacher l'existence de trois états fluides A, B, C. L'état A est, à coup sûr, le plus idéal qui soit; les particules sont absolument libres et n'engendrent le milieu continu que par de providentiels arrangements de trajectoires. L'état B est l'état, dit *parfait*, à pressions internes *normales*. L'état C est visqueux. La méthode passe de B à C comme de A à B.

Au delà de ces prémisses est étudiée la dualité des opérateurs

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \qquad \text{et} \qquad x_i .$$

Ceux-ci engendrent d'abord des considérations d'homogénéité correspondant au théorème d'Euler. L'équation de Jacobi peut être aussi *homogénéisée* et engendrer des surfaces intégrales transportant des invariants intégraux qui subsistent quand ces surfaces se fragmentent, s'émiettent, leurs éléments donnant des *corpuscules* alors qu'avant l'émiettement ils formaient front d'onde. Il est à peine besoin de dire que, dans ces conditions, ondes et corpuscules peuvent subsister ensemble.

Enfin, plus généralement, M. Buhl établit une *formule de Stokes pour espaces à canaux* avec laquelle il retrouve les généralités de la Mécanique ondulatoire développées autour de l'équation de Schrödinger. Les *canaux* peuvent avoir une forme quelconque et guident toujours une propagation corpusculaire à origine géométrique ondulatoire. A noter que de telles associations, où interviennent un grand nombre de corpuscules, peuvent être atteintes en partant d'une équation de Jacobi, ou de Schrödinger, écrite d'abord pour un mouvement ponctuel unique. H. Fehr.

Nicolas Kryloff et N. Bogoliuboff. — **Recherches sur la Stabilité longitudinale des Avions.** — Un fascicule gr. in-8° de 60 pages. Prix: 2 roubles 40. Avioizdat, Moscou. U.R.S.S., 1932.

Nous avons déjà signalé la remarquable Collection de Monographies scientifiques publiée jusqu'ici uniquement par M. Nicolas Kryloff et son disciple M. N. Bogoliùboff (voir *L'Ens. math.*, ce volume, pp. 138-139). Cette publication est toujours faite en langues russe et ukrainienne mais avec adjonction de résumés français. Elle se rattache aussi à nombre de communications étrangères, notamment à l'une d'elles en anglais, sur les *Fundamental Problems of the non linear Mechanics*, faite au récent Congrès de Zurich (*Vorträge*, II, p. 270).

Nous ne désespérons pas de voir toute cette belle œuvre traduite intégralement en français après avoir déjà laissé tant de notes de haute valeur dans les *Comptes rendus* de Paris.

Il n'est que trop vrai que les problèmes de mécanique non linéaires sont aussi nombreux, sinon plus nombreux, que les autres et les recherches sur la stabilité longitudinale des avions en offrent un nouvel exemple. On peut parfois tenter des réductions aux cas linéaires mais il est certain que, dans l'état actuel de la Science, on peut songer aussi à des cas *non linéaires* typiques, accessibles à certains symbolismes et justiciables de certains opérateurs. Ainsi les phénomènes non linéaires pourront s'éclairer les uns par les autres. Les méthodes employées ne manquent pas d'analogies avec celles de la Mécanique céleste où les problèmes linéaires sont plutôt exceptionnels; on peut remarquer toutefois que la symétrie analytique est, ici, beaucoup plus marquée et s'accomode aisément de transformations de symboles sommatoires en symboles intégraux multiples, le tout étant combiné avec un symbolisme différentiel dont la complexité n'exclut jamais la symétrie. On peut aboutir encore à des aperçus et à des discussions graphiques. S'il est bien certain qu'entre les problèmes non linéaires absolument quelconques et les problèmes linéaires, il y a des cas intermédiaires à classer, à grouper et finalement à traiter méthodiquement, et si c'est à cela que les auteurs s'essaient, on peut déjà noter de remarquables succès comme ceux obtenus dans les cas Thomson ordinairement caractérisés par des états transitoires de l'énergie. De tels efforts enrichissent l'Analyse en même temps que la Technique. A. Buhl (Toulouse).

Nicolas Kryloff et N. Bogoliuboff. — **Méthodes nouvelles pour la solution de quelques Problèmes mathématiques se rencontrant dans la Science des Constructions.** — Un fascicule gr. in-8° de 96 pages. 1933. Prix: 4 r. 50. Ukrkniga, rue K. Liebknecht, 44, Kharkoff. Ukraine, U. R. S. S.

Ce fascicule s'adjoint immédiatement au précédent et fait partie de la même Collection de Monographies. Il s'agit, cette fois, de la Science des constructions ou comme on dit plus volontiers, en français, de la Résistance des matériaux. C'est peut-être là le tournant où les praticiens porteront le maximum d'intérêt aux méthodes d'approximation des éminents auteurs. Nous avons déjà eu l'occasion de remarquer qu'il y avait, en de tels points, des applications des théories élastiques que l'on traitait souvent de manière hybride, en mêlant des bribes d'analyse élevée avec des résultats expérimentaux. Ici, il se trouve que l'expérience et la pratique sont sauvegardées par l'analyse approchée, déjà exposée en d'autres domaines, et avec des perfectionnements *numériques* manifestes dont le calcul est effectué sans peine. Car c'est bien là ce qui frappe dans les méthodes nouvelles; elles sont d'une analyse notablement élevée et riche en formules mais qui ne conduit nullement à des impasses. Si l'on fait de l'analyse complexe, c'est généralement en vue de mises en nombres relativement simples et, en tout cas, parfaitement effectuables. Il y a toujours recherche tangible de la formule « la moins majorée » et ce par le développement de procédés connus tenant aux généralités variationnelles, aux moindres carrés, à l'analyse harmonique, etc.

Pour le moment l'équation fondamentale envisagée est

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\mathrm{EI}\,\frac{d^2y}{dx^2}\right) + ky = q$$

avec des conditions aux limites de natures diverses. Pour les solutions, l'abaissement successif des majorations peut être envisagé par nombre de méthodes dont chacune possède un remarquable degré de plasticité; ces méthodes peuvent d'ailleurs se combiner entre elles. La méthode intégrale et variationnelle n'est pas sans engendrer des systèmes linéaires parfois touffus mais que l'on rend maniables par des orthogonalisations ou des normalisations. Que de tels procédés aillent de pair avec le souci final des nombres à produire dans le domaine utilitaire, c'est bien là l'une des principales caractéristiques de l'œuvre de MM. Kryloff et Bogoliùboff, œuvre qui retient de plus en plus l'attention du monde mathématique.

A. Buhl (Toulouse).

Maurice d'Ocagne. — **Hommes et Choses de Science.** Propos familiers. Deuxième série. — Un volume petit in-8° de IV-292 pages. Prix: 15 francs. Vuibert, Paris, 1932.

Nous avons ici même (t. 29, 1930, p. 366) pronostiqué le succès de la Première série de ces Propos familiers. La Deuxième série confirme éloquemment le pronostic. Ces Propos sont biographiques pour la plus grande partie et commencent par rendre hommage à M. Emile Picard. Grande pensée. M. Emile Picard, qui a écrit tant d'Eloges et de Discours, s'est magnifiquement oublié lui-même. Sachons gré, à M. Maurice d'Ocagne, d'avoir esquissé une réparation. Le point de vue biographique triomphe ensuite avec Léonard de Vinci, les Pères Mersenne et Truchet, Clairaut, Laplace, Coulomb, Perronet, Fourier, Biot, Poinsot, Poisson, Arago, Fresnel, Chevreul, Sophie Germain, Faraday, Maxwell, Edison, Georges Claude, d'Alembert. Les biographies sont entremêlées de causeries dont la première: *Comment s'est formée la Physique*, paraphrase un ouvrage bien connu de M. Henri Volkringer. Il s'agit surtout de Physique expérimentale.

Léonard de Vinci préoccupe toujours les modernes. Il eut pour biographe Pierre Duhem, fut à l'honneur au Congrès de Bologne, en 1928, et joue précisément un rôle dans l'ouvrage du Docteur E. Batault signalé à une page voisine de celle-ci.

Le Père Mersenne est connu. Le Père Truchet l'est moins, bien que son œuvre dure toujours en ce Parc de Versailles où il transporta tant d'arbres avec l'aide du « diable ».

Clairaut fut académicien à dix-huit ans. Passons sur les gloires éclatantes de Laplace et de Coulomb. Le grand ingénieur que fut Perronet construisit le pont de la Concorde, de 1787 à 1791, selon des principes qui furent entièrement respectés lors du récent élargissement. Une cabale contre Fourier arrache, à Louis XVIII, un refus d'approbation quant à l'élection académique. L'incident est sans autre exemple. Jean-Baptiste Biot fut trois fois académicien. Poinsot et Poisson, parfois opposés, sont ici rapprochés. François Arago, académicien à vingt-trois ans, est le benjamin des membres de l'Institut car, au temps de Clairaut, la fusion des Académies, en Institut, n'existait pas encore. Voici Fresnel dont l'œuvre se renouvelle actuellement, sans rien perdre de son génie primitif, puis le centenaire Chevreul. Sophie Germain (1776-1831), qui charma Gauss et Legendre, aimait les rapprochements entre l'ordre physique et l'ordre moral; elle aima la vertu comme la Géométrie. Faraday et Maxwell pourraient se passer de commentaires. Quant aux prodigieuses théories du second, elles ne furent pas seulement confirmées par Hertz; on ne saurait trop dire que les équations électromagnétiques de Maxwell contenaient, à l'état latent, les compléments gravitationnels d'Einstein. Mais ceci entraînerait loin. Il faudrait aussi parler de Riemann et nous n'avons évidemment pas à proposer une modification de plan pour le beau livre de M. d'Ocagne. Edison est l'inventeur magicien.

Les mathématiciens polytechniciens, de Biot (1803) à Jouguet (1930), n'ont pas failli à la devise de leur Ecole: « Pour la Patrie, les sciences et la gloire. »

L'évolution de la locomotive, le pont de l'Elorn à Plougastel, la captation de l'énergie thermique des mers, en disent suffisamment long sur la valeur du génie français. L'astronomie française est malheureusement pauvre au sens financier du mot. Parmi ses observatoires, celui du Pic du Midi, filial de celui de Toulouse, nous paraît cité et étudié de manière particulièrement bien venue.

La mathématique des jeux nous ramène à M. Kraitchik (*loc. cit.*, p. 370). Des dialogues mathématiques sur la quadrature du cercle, les logarithmes, le calcul par le dessin, la trisection de l'angle ne sont pas sans entraîner vers le lyrisme. D'Alembert, avec Clairaut, ont uni Newton à Laplace. La place (risquons ce jeu de mots) nous manque pour en dire davantage; il faudrait aussi un talent, sans doute impossible, pour condenser, en quelques lignes, toute la finesse d'esprit dont M. Maurice d'Ocagne vient, encore une fois, de nous donner une preuve aussi aisée qu'élégante.

A. Buhl (Toulouse).

Emile Batault. — **Le Mystère et le Paradoxe du Vol animal.** — Un volume gr. in-8° de xiv-236 pages, 21 figures et une planche hors-texte. Prix: 50 francs. Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1933.

Ceci est un ouvrage posthume préfacé d'abord par le fils de l'auteur et annoté par M. Henri Tripier, Directeur honoraire des Etudes à l'Ecole Centrale. Le Docteur Emile Batault a traité la question en physiologiste et en s'aidant de la cinématographie à la Marey, comme le montre la belle planche adjointe au texte. Les formules mathématiques n'ont donc à peu près aucun rôle dans ce livre qui, par exemple, contraste fort avec la théorie de l'avion de l'analyse antéprécédente; mais ceci n'est pas pour nous déplaire. Au contraire, nous reconnaissons avec empressement, qu'en la matière, l'œuvre du physiologiste et celle du mathématicien doivent se compléter mutuellement. De plus le présent exposé remet en lumière de très anciennes discussions qui semblèrent frappées de nullité lorsqu'apparurent les premiers avions. Ceux-ci montraient comment on devait voler; toutes les tentatives antérieures, qui n'avaient donné aucun vol digne de ce nom, ne méritaient plus que l'oubli ! Or il y a là une manière par trop sommaire de juger d'efforts centenaires et même millénaires. Chez les oiseaux, les chéiroptères, les insectes, les procédés de vol sont si différents qu'on ne peut vraiment pas considérer l'avion planeur et à moteur comme le seul volateur artificiel possible. Il est déjà quelque peu concurrencé par l'hélicoptère et par les appareils de vol à voile. Le vol à voile ! Voilà bien l'idéal. Un vol d'apparence statique, n'exigeant que de très légères manœuvres et empruntant toute énergie au vent. Le Docteur Batault s'élève contre ces apparences par trop prometteuses; le caractère statique du vol n'est, en effet, qu'une apparence sous laquelle on trouve un continuel état vibratoire que, remarquons-le, la théorie mathématique indique aussi. Néanmoins il reste vrai que les volatiles, surtout dans le vol à voile, savent ne dépenser que très peu d'énergie; l'homme en aurait bien assez pour voler ainsi s'il avait l'appareil approprié. Construire cet appareil ne semble pas impossible et nous ramène à Lilienthal et à des essais plus récents et moins malheureux pour l'expérimentateur, car Lilienthal s'est tué.

Les dessins anatomiques, les tableaux numériques comparatifs se rapportant à toutes espèces de volatiles sont nombreux dans un livre qui a le mérite d'exposer une théorie personnelle en en décrivant beaucoup d'autres. L'utilité de la publication ne fait absolument aucun doute.

A. Buhl (Toulouse).

Max Franck. — **L'univers électromagnétique par une nouvelle Loi de la Gravitation.** — Un volume in-8° de IV-126 pages. Prix: 15 francs. Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1932.

Le titre de cet ouvrage est d'une excellente intention. Réunir l'électromagnétisme et la gravitation ! Joli projet. Seulement une première inquiétude me vient du fait qu'ici le projet est inversé. Toutes les chances ne sont-elles pas pour une gravitation dépendant de l'électromagnétisme ? Je ne connais pas M. Max Franck mais son style scientifique me donne l'impression d'être celui d'un personnage quelque peu âgé, représentant la formation intellectuelle d'il y a trente ans, ce qui ne l'empêche pas d'avoir fait des efforts très actuels pour parler de Relativité et de Mécanique ondulatoire.

La théorie exposée serait une théorie newtonienne complétée alors que les vues ondulatoires de Fresnel et Huyghens seraient « démenties ». Il semble bien que ce ne soit pas là un point de vue vraiment acceptable. Einstein et Louis de Broglie, par exemple, n'ont jamais travaillé à démentir quoi que ce soit; ils ont généralisé, ils ont englobé le passé dans des théories plus vastes. Hors de cet esprit, je ne vois point de salut: « Tout doit s'expliquer, avec le respect des notions évidentes du temps et de l'espace absolus, dans un univers euclidien » (page 3). Impossible. Tout domaine euclidien est un domaine de *formes* et les corpuscules n'ont point de formes, au sens complet et ordinaire du mot. Il y aurait deux éthers, l'un électrolumineux, matériel et pesant accompagnant la Terre, l'autre immatériel, intersidéral et immobile. Le Chapitre premier traite de l'erreur de Huyghens-Fresnel ! Une limite existe quant à la division de la matière mais l'élément ultime a nécessairement des dimensions finies (p. 18). Voilà qui est trop affirmatif. Il faut savoir qu'à l'échelle corpusculaire les notions de dimension et de mesure deviennent sujettes à caution; je renvoie aux analyses placées en tête de la présente Bibliographie.

Plus loin (p. 56) nous revenons à la conception électrique. Tous les phénomènes, sans exception, sont électriques, l'électromagnétisme universel dépendant de l'action newtonienne complétée déjà mentionnée. Bornons ici une analyse qui peut évidemment sembler traîtresse de par sa seule brièveté. Mais il semble bien aussi que l'auteur ne nous révèle autre chose que les caractéristiques de son propre esprit.

A. Buhl (Toulouse).

G. Iliovici et A. Sainte-Laguë. — **Algèbre et Analyse,** à l'usage des Elèves des Classes de Mathématiques spéciales et des Candidats aux Grandes Ecoles. Tome I. Introduction. Equations algébriques. Fonctions. Calcul différentiel. — Un volume gr. in-8° de VIII-526 pages et 109 figures. Prix: 95 francs. Librairie de l'Enseignement technique Léon Eyrolles, Paris, 1933.

Cet ouvrage rappelle d'abord des souvenirs lointains, ceux, par exemple, de Joseph Bertrand, de Niewenglowski, de Jules Tannery. Il me paraîtrait naturel qu'il prenne maintenant une importance analogue à celle prise jadis par les Traités de ces auteurs qui furent de si remarquables professeurs. De plus, les analyses bibliographiques qui précèdent m'ont conduit dans la haute algèbre, avec Hilbert, Harris Hancock, Heinrich Dörrie, Rutherford, algèbre qui n'est pas partout à la portée d'un élève sortant de Mathématiques spéciales, même s'il s'agit d'un excellent élève. Malgré cela, je trouve dans le livre de MM. Iliovici et Sainte-Laguë comme une préparation des plus remarquables à ces exposés franchement transcendants. Les deux auteurs savent voir les choses de haut. Cela se sent dans leur analyse des polynomes, avec le P.G.C.D. et l'identité $AU + BV = 1$ qui a tant de répercussions en de difficiles régions, dans le maniement des équations algébriques avec la notion de résolvante, dans l'étude de la division non seulement par $x - a$ mais par $x^m - a$, dans une manière d'effleurer la transformation de Tchirnhausen qui conduirait aisément à Weber, dans la décomposition des fractions rationnelles avec les notions de pôle et de résidu et encore en d'autres points trop nombreux pour être tous cités. La Théorie des fonctions est intuitive, les représentations graphiques sont abondantes et suggestives, les fonctions hyperboliques accompagnent l'exponentielle.

On passe aisément des polynomes aux développements fonctionnels limités. Je regrette un peu que l'intégrale ne soit pas accompagnée tout de suite de quelques quadratures élégantes mais nous pourrons avoir cela dans le Tome second. L'homogène, l'implicite, qui préparent tant et tant de choses sont présentés avec une heureuse concision.

Evidemment, je n'ai pas commencé par le commencement. J'aurais dû parler de la clarté de la Théorie des déterminants et même de celle de l'Analyse combinatoire qui est brièvement appliquée au Calcul des Probabilités. Non, j'ai feuilleté au hasard, mais je suis tombé sur nombre de choses de grand intérêt, traitées de façon séduisante. La rigueur cependant n'est point sacrifiée. Au total je pense que le livre a les plus grandes chances de devenir classique comme je le laissais pressentir au début. Il est aussi le livre sur lequel beaucoup pourront revenir pour y trouver facilement ce qui manque, de manière parfois si gênante, quand on n'a pas eu la chance de faire « de bonnes spéciales ». Il me semble apercevoir ainsi de nombreux lecteurs au delà de ceux visés par les sous-titres du volume.

A. BUHL (Toulouse).

G. HOHEISEL. — **Aufgabensammlung zu den gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen** (Sammlung Göschen, 1059). — Un volume in-16, relié, de 148 pages. Prix: RM. 1,62. Walter de Gruyter et Co. Berlin W 35, Leipzig, 1933.

Nous avons récemment rendu compte (voir plus haut pp. 150-151) de deux de ces petits volumes dûs à M. Konrad Knopp et portant les numéros 703 et 877. Voici le 1059.

On reste confondu de tout ce qu'ils peuvent contenir de science pratique sous une apparence minuscule à laquelle il ne faut précisément pas se fier. Ici nous rencontrons d'abord un nombre prodigieux d'exercices sur les équations différentielles ordinaires, principalement dans les cas d'intégrabilité élémentaires qui se découvrent souvent à propos d'équations si bien camouflées qu'on pourrait croire, même en étant très averti, qu'elles définissent d'inextricables transcendantes. On considère aussi les transformations de contact, les théorèmes d'existence pour équations quelconques, les intégrations par séries ou par intégrales définies pour les équations d'ordre supérieur.

Les éléments de travail sont aussi nombreux avec les équations aux différentielles totales et les équations en x, y, z, p, q; on va même jusqu'aux équations de Monge-Ampère. L'esprit méthodique est partout absolument strict. Il y a même, à cet égard, une légère exagération. Ainsi (p. 124) il n'y a besoin d'aucune méthode pour intégrer l'équation de Pfaff

$$2x^3\,dx + z dy + (y + 2\,z)\,dz = 0.$$

Il suffit de l'écrire

$$2x^3\,dx + d\,(yz) + 2z\,dz = 0.$$

De même (p. 134), le plus simple, pour l'équation

$$F\,(p^2 + q^2\,, \quad x^2 + y^2\,, \quad qx - py) = 0,$$

n'est pas d'en faire une théorie en x, y. Avec des coordonnées semi-polaires, on a

$$F\left[\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2, \qquad r^2\,, \qquad \frac{\partial z}{\partial \theta}\right] = 0$$

d'où, par quadrature, l'intégrale complète $z = a\theta + f\,(r)$.

Sous prétexte d'être méthodique, il ne faut pas banir complètement le flair et le coup d'œil. Mais comme, malgré tout, la carrière, de beaucoup la plus vaste, appartient à la méthode, le petit et substantiel ouvrage de M. Hoheisel est destiné, sans aucun doute, à rendre les plus grands services.

A. BUHL (Toulouse).

O. Perron. — **Algebra.** I. Die Grundlagen. (Göschens Lehrbücherei.) Zweite, verbesserte Auflage. — Un vol. in-8° de VIII-301 p., relié, RM 12,80; Walter de Gruyter & C^ie^, Berlin u. Leipzig, 1932.

Nous avons déjà eu l'occasion de signaler ce Traité dont la première édition a paru en 1927. La rapidité avec laquelle il a été épuisé montre qu'il répondait à un besoin. Il nous suffira de rappeler qu'il s'agit d'un traité d'Algèbre moderne rédigé à l'usage des étudiants. Dans cette nouvelle édition, revue et complétée, l'auteur établit les principes fondamentaux en prenant comme point de départ la notion de domaine algébrique qui joue un rôle si considérable dans les théories modernes. Il laisse de côté tout ce qui n'est pas essentiel pour la théorie des équations algébriques qui fait l'objet du second volume. Son exposé, clair et précis, constitue une excellente introduction à l'étude de l'Algèbre supérieure. H. Fehr.

Richard Dedekind. — **Gesammelte Werke.** Herausgegeben von R. Fricke, E. Noether u. Ö. Ore. Dritter Band. — Un vol. in-8° de 508 p.; broché, RM 41,40, relié, RM 43,65; Fr. Vieweg u. Sohn, Braunschweig, 1932.

C'est par ce volume que se termine la publication des œuvres complètes de Dedekind. Il contient les belles recherches sur la Théorie des nombres entiers algébriques publiées pour la plupart en appendice dans les éditions successives des *Vorlesungen über Zahlentheorie* de Dirichlet. L'un d'eux, rédigé sur la demande de la Rédaction, est extrait du *Bulletin des Sciences mathématiques* (années 1876 et 1877).

Puis viennent les mémoires célèbres intitulés « Stetigkeit und irrationale Zahlen » et « Was sind und was sollen die Zahlen » qui, comme par le passé, seront toujours consultés avec le plus vif intérêt par les nouvelles générations de mathématiciens.

La dernière partie du volume nous apporte quelques mémoires inédits, ainsi que des extraits de la correspondance scientifique de Dedekind avec Minkowski, Lipschitz et H. Weber.

A la suite du décès de Robert Fricke, l'un des collaborateurs des deux premiers volumes, les mémoires du tome III ont été revus et annotés par M^lle^ Emmy Noether et M. Ö. Ore. H. Fehr.

Georg Cantor. — **Gesammelte Abhandlungen** math. u. philosoph. Inhalts, mit erläuternden Anmerkungen sowie Ergänzungen aus dem Briefwechsel Cantor-Dedekind. Herausgegeben von Ernst Zermelo. Nebst einem Lebenslauf Cantors von A. Fraenkel. — Un vol. in-8° de 486 p., avec un portrait, prix broché RM 48.—; Julius Springer, Berlin, 1932.

C'est avec une vive satisfaction que nous enregistrons cette publication à la suite du recueil que nous venons de signaler. Richard Dedekind et Georg Cantor, deux grands noms dans les sciences mathématiques, deux esprits profonds et puissants dont les travaux ont ouvert des voies nouvelles à la Théorie des nombres, à l'analyse et à la philosophie des mathématiques. Dans leurs entretiens et dans leur correspondance, ils ont abordé les problèmes les plus délicats touchant aux fondements même des mathématiques.

Il est rare qu'une discipline scientifique d'une portée aussi considérable que la Théorie des ensembles ait été créée et développée d'une manière aussi complète par un seul savant. Aujourd'hui encore les fondements établis par Cantor conservent toute leur valeur. Leur influence sur le développement des mathématiques modernes ne fait que croître.

M. Zermelo était tout particulièrement qualifié pour entreprendre cette publication. C'est avec un soin éclairé qu'il a groupé les mémoires, suivant leur objet, en quatre parties homogènes: Théorie des nombres et Algèbre; Théorie des fonctions; Théorie des ensembles; contributions à l'Histoire des mathématiques et à la Philosophie de l'infini. Dans chacune de ces parties les mémoires sont présentés dans l'ordre chronologique. En Appendice on trouve un extrait de la correspondance entre Cantor et Dedekind. L'ouvrage se termine par une très intéressante étude biographique de Georg Cantor rédigée par M. A. Fraenkel.

Nous sommes certains que ce beau recueil, vraiment digne du grand géomètre, sera partout accueilli avec la faveur qu'il mérite. H. Fehr.

A. Speiser. — **Die mathematische Denkweise.** — Un vol. in-8° de 137 p., 7 fr. 50; Rascher & Cie, Zurich, 1932.

Sous le titre de « Klassische Stücke der Mathematik », M. Speiser nous a donné, en 1925, une sorte d'anthologie de pages classiques empruntées aux grands géomètres depuis Platon à Einstein. Dans ce nouveau volume il examine comment la pensée mathématique intervient dans quelques domaines des connaissances tels que les Beaux-Arts et la Musique. Il fait des rapprochements très judicieux entre les concepts auxquels ont recours le mathématicien, l'artiste et le musicien. Il montre, par exemple, quelles sont les origines géométriques des formes ornementales. Voici d'ailleurs la liste des principaux chapitres:

Sur la symétrie dans l'ornementation. — Questions de forme en Musique. — La Philosophie naturelle de Dante. — Proclus et les Mathématiques. — Le nombre et l'espace chez les néoplatoniciens. — La Théorie des couleurs de Goethe. — Sur l'Astrologie. — Képler et l'harmonie du monde.

Comme on le voit par cette énumération, il ne s'agit pas, contrairement à ce que pourrait laisser supposer à première vue le titre de l'ouvrage, de la pensée mathématique dans son mécanisme logique. L'auteur s'est simplement proposé de mettre en lumière les liens entre les Mathématiques, les Beaux-arts et la Musique. Ses réflexions seront lues avec intérêt dans tous les milieux cultivés. H. Fehr.

Gerhard Kowalewski. — **Lehrbuch der höheren Mathematik für Universitäten und Technische Hochschulen.** — Band I: Vektorrechnung u. analytische Geometrie. — Un volume in-8 de 210 p. avec 67 fig. RM. 3,80. — Band II: Hauptpunkte der analytischen Geometrie des Raumes. Grundbegriffe der Differential-u. Integralrechnung. — Un volume relié toile de 240 p. avec 18 fig., RM. 3,80; Walter de Gruyter & Cie, Berlin et Leipzig. 1933.

Ce traité a comme point de départ le cours que professe l'auteur depuis de nombreuses années à l'Ecole technique supérieure de Dresde; il constitue une excellente introduction à l'étude des mathématiques supérieures.

M. Kowalewski se borne aux chapitres fondamentaux et s'efforce de mettre en lumière les notions essentielles sans développements inutiles dans une première étude. Il expose d'abord le calcul vectoriel combiné avec la théorie des déterminants. On comprend aisément le parti qu'il peut en tirer en géométrie analytique dans l'étude des propriétés projectives des sections coniques, ainsi que des transformations géométriques et des déplacements.

C'est à ce même point de vue qu'il examine, dans le tome II, la géométrie analytique à trois dimensions en s'attachant plus particulièrement à l'étude des surfaces du second ordre.

La seconde partie du volume est consacrée aux notions de dérivée et d'intégrale présentées avec beaucoup de soin.

Le tome III, qui paraîtra sous peu, comprendra les principaux chapitres de l'analyse. H. FEHR.

G. JUVET. — **Leçons d'Analyse vectorielle**. Première partie: Géométrie différentielle des courbes et des surfaces, Théorie mathématique des champs. (Cours de l'Ecole d'Ingénieurs de Lausanne). — Un volume in-8 de 120 p. avec 28 fig. Librairie Rouge & Cie, Lausanne; Gauthier-Villars & Cie, Paris, 1933.

Ces Lecons d'analyse vectorielle correspondent au cours que professe M. Juvet à l'Ecole d'ingénieurs de Lausanne. Elles s'adressent à des étudiants qui ont déjà une connaissance précise du calcul différentiel et intégral.

Le présent volume constitue la première partie du cours. Il débute par l'algèbre vectorielle présentée dans ses parties essentielles, sous une forme concise et avec beaucoup de clarté. Puis viennent les applications à la géométrie infinitésimale comprenant l'étude des courbes gauches, des surfaces et des lignes tracées sur une surface.

L'auteur aborde ensuite la théorie des champs et des opérateurs différentiels qui forme le principal objet de ce volume. Son exposé est très bien adapté à une première étude. Certains traités introduisent les opérateurs différentiels par des considérations physiques fort suggestives, mais qui sont au détriment de la généralité et de l'unité de la méthode. D'autres ont recours aux coordonnées et démontrent ensuite que cette définition est indépendante du choix des axes; cette méthode indirecte n'est pas conforme à l'esprit du calcul vectoriel. Ce qui distingue l'exposé de M. Juvet, en ce qui concerne l'analyse vectorielle, c'est qu'il est élémentaire et qu'il reste purement mathématique. Grâce à une définition peu connue des opérateurs différentiels, due à M. von Ignatowski et reprise par M. Juvet, la marche suivie est parfaitement conforme au but du calcul vectoriel qui consiste à établir un algorithme permettant de faire une étude intrinsèque de certains êtres géométriques.

Chaque chapitre se termine par des exercices qui permettent à l'étudiant de s'assimiler plus facilement les méthodes du calcul vectoriel.

La seconde partie du cours traitera des applications de l'analyse vectorielle à la physique et des problèmes aux limites que ces applications posent au mathématicien. H. FEHR.

F.-J. Duarte. — **Nouvelles Tables logarithmiques à 36 décimales.** — Un volume in-8 de VI-128 p.; 40 fr.; Gauthier-Villars & Cie, Paris.

Calculateur à la fois très sûr et d'une grande habileté, M. Duarte s'est proposé de faire un recueil logarithmique complet pour les travaux exigeant une grande précision. Aux *Nouvelles Tables de Log n! à 33 décimales*, publiées en 1927, viennent s'ajouter ces *Nouvelles Tables logarithmiques à 36 décimales*. Elles contiennent:

1º Les logarithmes vulgaires à 36 décimales des nombres premiers jusqu'à 10.007;

2º Les logarithmes à 36 décimales des nombres naturels depuis 1 à jusqu'à 1.000:

3º Des tables logarithmiques des nombres de la forme $1 \pm 0{,}0^{u}\alpha$ pour le calcul des logarithmes des nombres à 36 décimales exactes;

4º Des tables à 33 décimales des logarithmes des factorielles depuis 3.050 ! jusqu'à 10.000 !, de 50 en 50.

Ces tables sont tout à fait nouvelles, non seulement parce qu'il n'existait pas de tables de logarithmes vulgaires à un grand nombre de décimales aussi étendues, mais aussi par le fait que tous les calculs pour leur établissement ont été effectués entièrement à nouveau, sans que l'auteur ait admis aucun résultat antérieur non calculé par lui. M. Duarte a pris toutes les dispositions utiles pour éviter des erreurs. Il n'a pas craint de soumettre les résultats à un contrôle très rigoureux, même si ces calculs de vérification sont aussi longs à exécuter que ceux qui ont été exigés pour l'établissement des tables. C'est ce que n'ont pas toujours fait tous les auteurs de tables. Les précautions nécessaires ont également été prises pour éviter des fautes de transcription ou d'impression.

L'*Introduction* renseigne le lecteur sur les formules employées et la marche suivie pour l'établissement de ces tables, ainsi que sur les diverses vérifications auxquelles les calculs ont été soumis.

Comme pour ses premières tables, M. Duarte a eu recours à l'imprimeur de *L'Enseignement mathématique* (Kundig, Genève). Grâce au choix du papier et à la typographie, irréprochables en tous points, ce volume peut être comparé avantageusement aux meilleures publications de ce genre.

H. Fehr.