SUR LA SEMI-CONTINUITÉ D'INCLUSION ET QUELQUES SUJETS CONNEXES

SUR LA SEMI-CONTINUITÉ D'INCLUSION ET QUELQUES SUJETS CONNEXES

PAR

M. Georges BOULIGAND (Poitiers).

1. — Peut-on rendre plus profond hommage à la mémoire de René Baire qu'en poursuivant les conséquences d'une idée dégagée par lui et dont l'importance se révèle chaque jour accrue, la semi-continuité ? Elle échappa tout le XIX^e siècle aux adeptes de la théorie des fonctions, et à plus forte raison, aux purs géomètres, qui s'adonnaient à des occupations moins subtiles. Ce fut l'étude des fonctions discontinues d'une ou de plusieurs variables qui fit découvrir à Baire ce fait essentiel: une fonction qui est limite d'une suite croissante ou décroissante de fonctions continues peut être discontinue, mais il subsiste pour elle l'une des deux inégalités classiques auxquelles Cauchy a ramené la continuité en un point. Baire notait de plus qu'une de ces inégalités, satisfaite sur tout un ensemble fermé, assure à la fonction d'atteindre ou sa borne inférieure, ou sa borne supérieure, en quelque point de cet ensemble.

Le calcul fonctionnel, prolongement du calcul des variations, fût très favorable à l'idée de Baire; indépendamment des travaux d'Hilbert, venait d'être créée par Lebesgue une méthode pour prouver qu'il existe des lignes (oú des surfaces) de par lesquelles certaines intégrales simples (ou doubles) atteignent pour de bon leur borne inférieure ou supérieure. Et la méthode mettait en œuvre la semi-continuité sous une forme saisissante, par sa simplicité et sa liaison à ces faits d'intuition courante: le passage d'une ligne à une ligne voisine (d'une surface à une surface voisine) peut fournir une longueur (une aire) dépassant notablement la longueur (l'aire) initiale, mais s'il y a diminution, c'est d'une quantité qui tend vers zéro lorsque le voisinage se resserre indéfiniment: autrement dit, pour ces fonctionnelles élémentaires, se conserve l'une des inégalités de Cauchy. Cette propriété dont Lebesgue, puis Goursat, avaient élargi le champ de validité, appartient, Tonelli l'a montré, à toutes les intégrales du calcul des variations obéissant à des conditions de forme simple. La semi-continuité est donc devenue le pivot de l'analyse des extrema, qui se fonde sur le raisonnement donné par Lebesgue pour les géodésiques, les surfaces minima et divers problèmes connexes, parallèlement à celui de Baire montrant qu'une fonction semi-continue sur un ensemble fermé y atteint l'une de ses bornes.

2. — L'intervention de la semi-continuité en géométrie ne se limite pas à cette catégorie de questions, on la voit fréquemment se produire par l'entremise de la *semi-continuité d'inclusion* (= S.C.I.) déduite de la semi-continuité supérieure ordinaire en remplaçant dans sa définition le symbole d'inégalité par un symbole d'inclusion. Dans un ouvrage récent, je me suis servi souvent de cette nouvelle notion [1]. Mais cet usage peut être étendu pour simplifier diverses démonstrations et pour acquérir certains résultats. C'est ce que je me propose de montrer ici.

La S.C.I. se définit de la façon suivante: soit un ensemble E d'éléments M pour lesquels on possède une notion de voisinage; supposons qu'à l'élément M, arbitraire sur E, une loi fixée fasse correspondre une collection γ (M) d'éléments de nature permanente, pour lesquels est également donnée une définition du voisinage. Nous dirons qu'en M_0, notre collection jouit de la S.C.I., si γ (M_0) inclut les éléments d'accumulation de γ (M) quand M se trouve inclus dans des voisinages indéfiniment resserrés de M_0.

Exemples: *a*) Chaque élément M est un point de l'espace euclidien, chaque élément de γ est une droite ou un segment de droite; γ (M) est le paratingent ordinaire ou d'un rang quelconque de l'ensemble E; ou bien, E étant fermé, γ (M) est le système des projetantes, c'est-à-dire des segments minima allant de M à l'ensemble E, ce qui subsiste pour les distances généralisées [2].

---

[1] *Introduction à la Géométrie infinitésimale directe*, avec une préface de M. Elie Cartan, Paris, Vuibert, 1932. Cf. pages 75, 85, 86, 92, 103, 127, 131, 138, 145, 150, 167, 191, 224.

[2] Spécialement, celles définies par une intégrale du type envisagé dans ma note aux *Lincei: Solidarité entre le minimum d'une intégrale et l'équation correspondante d'Hamilton-Jacobi* (vol, XII, 6e série, p, 27-30). Une extension des intégrales de cette dernière au moyen du contingent, permet d'incorporer parmi elles les fronts d'onde.

b) Chaque élément M est un plan de l'espace euclidien à trois dimensions, et γ (M) est la collection des points d'un ensemble fermé E contenus dans le plan M; si E est borné, on peut noter que l'aire du plus petit ensemble convexe contenant γ (M) dans le plan M jouit de la semi-continuité supérieure ordinaire; c'est là un cas particulier d'une loi générale que nous dégagerons un peu plus loin [1].

c) Chaque élément M est un ensemble ponctuel fermé d'un espace euclidien; γ (M) est l'intersection d'un ensemble ponctuel fermé donné, soit E, et de M. Dire ici que M se trouve inclus dans un voisinage de plus en plus resserré de M_0 revient à dire qu'il l'est dans l'ensemble ouvert obtenu en effectuant sur l'ensemble M la construction de Cantor-Minkowski avec un rayon ρ de plus en plus petit [2].

3. — Nous allons maintenant expliquer l'intérêt de la S.C.I. Voici d'abord la loi générale que nous venons de faire pressentir à propos de l'exemple *b*). Il a été entendu que la nature des éléments dé γ (M) est indépendante du choix de M, la composition de γ (M) variant seule lorsque M varie.

Supposons qu'à chaque collection γ de ce genre soit associée, suivant une loi indépendante de M, une quantité purement numérique φ, qui dépende continument [3] de γ et telle en outre que l'inclusion

$$\gamma_1 \subset \gamma_2$$

entraine l'inégalité

$$\varphi(\gamma_1) < \varphi(\gamma_2) \,.$$

Alors φ sera, pour une γ (M) déterminée, une fonction de l'élément M jouissant de la semi-continuité supérieure ordinaire;

[1] Cette remarque généralise celle que je présente, au n° 28 de mon ouvrage cité, sous ce titre: intervention de fonctions semi-continues en géométrie. L'importance de cette dernière est qu'elle prépare les n^{os} 45 et 52 qui sont eux-mêmes des préliminaires au théorème d'existence du plan tangent (n^{os} 141 à 146).

[2] Enfin, sans souci de la notion générale qui nous occupe, M^{lle} Marie Charpentier se trouve, en avoir donné dans sa thèse, le premier exemple (cf.: *Sur les lois de dépendance de l'intégrale* de $y' = f(x, y)$ *vis-à-vis de son point d'origine*, Mathematica, vol. 5, Cluj, 1931, p. 65-99). — Voir aussi: *Sur les intégrales d'un système*. (Bull. des Sciences Math., juillet 1932).

[3] En disant que φ dépend continument de γ, nous entendons que si les γ_i sont inclus dans la réunion de voisinages indéfiniment resserrés des éléments de γ, ces derniers se trouvant en même temps inclus dans une réunion analogue formée à partir des γ_i, les φ_i correspondants tendent vers φ. Mais on pourrait se contenter ici de supposer φ semi-continu supérieur relativement à γ.

car nous substituons l'inégalité à l'inclusion après avoir pratiqué le processus inverse.

Une seconde application de cette loi générale consiste à déduire la semi-continuité inférieure de l'angle solide du cône limité par le contingent à une frontière fournie par la construction de Cantor-Minkowski, semi-continuité signalée par M. Georges Durand, dans sa thèse, pour chaque point de cette frontière appartenant à la classe (α), c'est-à-dire ayant ses projetantes incluses dans un demi-cône solide de révolution dont le demi-angle est moindre qu'un droit. On sait en effet que le cône limité par le contingent ci-dessus est alors le supplémentaire du plus petit cône convexe K du cône des projetantes: d'après la S.C.I. des projetantes et en vertu de notre loi générale, ce dernier cône a son angle solide semi-continu supérieurement; or si K perd des rayons intérieurs, il y a gain de rayons intérieurs pour le cône contingentiel et inversement, d'où l'on déduit la semi-continuité inférieure de l'angle de ce dernier. On peut d'ailleurs, dans ce raisonnement, substituer à la S.C.I. des projetantes, celle du paratingent [1], les deux choses devenant ici étroitement solidaires.

4. — Une autre application de la S.C.I. consiste à noter que la correspondance entre M et γ (M) devient continue lorsque γ (M) se réduit à un élément unique de la nature considérée. Elle peut d'ailleurs se prolonger à certains cas qu'on pourrait englober dans un énoncé abstrait, mais dont nous croyons préférable de donner un exemple. Supposons que M soit un point de l'espace euclidien à trois dimensions et que γ (M) soit le paratingent en M d'un certain ensemble ponctuel E. Alors, même dans le cas où il passerait en M plus d'une paratingente, il peut arriver cependant que ces paratingentes se trouvent dans un plan unique, dès lors ce plan sera lui-même réparti d'une manière continue. Je n'insiste pas davantage ici sur ce côté de la question qui a inspiré des raisonnements dans mon ouvrage cité.

5. — La dernière série d'applications que j'ai en vue se rapporte à certains champs scalaires et à leurs ensembles de niveau. J'y ai été amené naturellement en poursuivant l'étude de la distance

[1] Voir mon ouvrage cité, ex. 17, p. 221.

ρ d'un point à un ensemble E (qu'on peut toujours supposer fermé), solidaire de celle de la construction de Cantor-Minkowski effectuée sur cet ensemble: mes résultats relatifs au cas où il existe, en un point de la frontière de l'ensemble ouvert $(E)_\rho$ ainsi obtenu, un cône circulaire droit disjoint de $(E)_\rho$, ont acheminé M. Georges Durand vers la découverte des points (α) ci-dessus mentionnés. Je commencerai par noter ici que, grâce à la S.C.I. des projetantes, l'ensemble des points situés à distance positive de E et qui sont de la classe (α) est un ensemble ouvert. Les points que M. Durand désigne sous le nom de points β ou de points γ, forment donc, par leur réunion, un ensemble qui contient tous ses points d'accumulation situés en dehors de E.

En analysant plus profondément les propriétés de la distance d'un point à un ensemble, avec l'aide de la S.C.I., nous allons voir apparaître l'origine la plus naturelle de ces points (α) et la cause des propriétés de la frontière de $(E)_\rho$ en ces points: c'est ce que nous attestera la possibilité de généralisations immédiates et très larges.

Partons de cette remarque simple: sur une demi-droite $M_0\,\Delta$ faisant avec une projetante de M_0 un angle aigu, la distance d'un point M à l'ensemble E est décroissante en M_0 au sens strict [1]. Supposons maintenant que M_0 soit un point (α): il existe donc une demi-droite $M_0\,\Delta_0$ telle que toute projetante de M_0 fasse avec $M_0\,\Delta_0$ un angle obtus dépassant $\frac{\pi}{2} + \theta (\theta > 0)$. Toute projetante de M_0 sera dans un demi-cône solide Γ_0 ayant son demi-axe $M_0\,\Delta_0'$ opposé à $M_0\,\Delta_0$ et de demi-angle au sommet $\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$. En vertu de la S.C.I., on peut trouver une distance δ telle que pour $M_0 M < \delta$, toute projetante de M soit dans un demi-cône de révolution Γ de demi-angle au sommet au plus égal à $\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$ et d'axe arbitrairement peu incliné sur celui de Γ_0. Dès lors, grâce à la remarque initiale (appliquée en cheminant depuis le point M_2 jusqu'au point M_1) sur tout vecteur $\overrightarrow{M_1 M_2}$ tel que $M_0M_1 < \frac{\delta}{2}$ et de longueur $M_1 M_2 < \frac{\delta}{2}$, vecteur dont l'angle avec $M_0\,\Delta_0$ est suffisamment petit, la distance à l'ensemble E d'un

[1] Voir le n° 96 de mon ouvrage cité.

point courant est une fonction strictement croissante [1]. Dans ces conditions, il est impossible que $M_0\Delta_0'$ soit une paratingente en M_0 de l'ensemble de niveau de la distance d'un point à E, si le point M_0 fait partie de cet ensemble [2]. Cet ensemble est d'ailleurs la frontière commune de deux ensembles ouverts, l'un formé de points dont la distance à E est inférieure à celle de M_0, l'autre formé de points dont la distance à E dépasse celle de M_0. Dans une sphère de centre M_0 et de rayon suffisamment petit, sur une corde parallèle à $M_0\Delta_0'$ et suffisamment voisine du centre, il y a un point et un seul de cet ensemble de niveau, subdivisant la corde en deux portions dont chacune (moins le point séparatif) est incluse dans l'un des ensembles ouverts précédents. Le voisinage de M_0, sur l'ensemble de niveau étudié est donc une surface douée d'une représentation analytique $z = f(x, y)$, quand on prend l'axe des z parallèle aux cordes précédentes de la sphère. En outre, relativement au plan perpendiculaire, toute corde de notre surface ayant ses extrémités suffisamment voisines de M_0 est de pente bornée.

6. — Le même principe de raisonnement s'applique à un champ beaucoup plus vaste, comme je l'ai récemment montré dans une note des *Comptes rendus* [3]. Désignons par $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p, \rho_{p+1}, \ldots, \rho_{p+q}$ les distances d'un point aux ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_p, E_{p+1}, \ldots, E_{p+q}$, par

$$f(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p, \rho_{p+1}, \ldots, \rho_{p+q})$$

une fonction possédant la continuité simultanée relativement à ces $p+q$ variables, et qui en outre soit strictement croissante par rapport à chacune des p premières, strictement décroissante par rapport à chacune des q dernières Nous dirons encore que relativement à nos ensembles et à la fonction f, un point de l'espace est un point (α) s'il existe un demi-cône de révolution (de demi-angle inférieur à un droit) dans lequel soient incluses les projetantes du point sur les p premiers ensembles, celles du point sur les q derniers ensembles se trouvant elles-mêmes

[1] Je retrouve ainsi le théorème du n° 95*bis* de mon ouvrage cité. On voit combien la S.C.I. rend avantageuse cette inversion d'ordre des propositions des n°s 95*bis* et 96.
[2] Voir la proposition auxiliaire énoncée à la fin du n° 6 du présent travail.
[3] *C. R.*, t. 194 (1932), p. 1882.

incluses dans le demi-cône opposé. Alors, en chaque point suffisamment voisin de M_0, en vertu de la S.C.I., est satisfaite la même propriété, avec une paire de demi-cônes opposés voisins, et l'on peut comme ci-dessus trouver une longueur δ telle que sur les vecteurs $\overrightarrow{M_1 M_2}$ soumis aux conditions

$$M_0 M_1 < \frac{\delta}{2} \qquad M_1 M_2 < \frac{\delta}{2}$$

et faisant avec le demi-axe des cônes initiaux, suivant lequel $\rho_1, \ldots, \rho_p$ croissent, un angle suffisamment petit, la fonction f soit strictement croissante. Dans ces conditions, il est impossible que la droite, axe du cône total, soit une paratingente en M_0. Et par suite, l'ensemble de niveau de f contenant M_0 possède, au voisinage de ce point, les mêmes propriétés locales que précédemment: il s'identifie avec une surface $z = f(x, y)$ à pentes bornées.

Notons à cette occasion cette forme d'énoncé que nous venons d'utiliser (n[os] 5 et 6) et qui s'applique à des cas plus généraux:

Soit la fonction F (M) dépendant continument du point M à l'intérieur de toute une sphère de centre M_0. Supposons qu'il existe une demi-droite $M_0 \Delta_0$ issue de M_0, telle que sur celle-ci et sur chaque demi-droite d'origine M distante de M_0 de moins de δ, et faisant avec la première un angle $< \varepsilon$, la fonction F (M) soit strictement croissante, à partir de M et sur tout un segment qu'on puisse prendre de longueur constante dans tout le voisinage défini par δ et ε. Alors, au point M_0, le paratingent de l'ensemble des points M tels que $F(M) = F(M_0)$ ne peut contenir $M_0 \Delta_0$. Cet ensemble coïncide, aux environs de M_0 avec une surface représentable sous la forme $z = f(x, y)$ (et à pentes bornées), lorsqu'on prend $M_0 \Delta_0$ pour axe des z.

7. — Les considérations précédentes peuvent être variées de bien des manières. Considérons le cas de deux ensembles E_1 et E_2 et d'une fonction

$$F(M) = f(\rho_1) - f(\rho_2)$$

où f désigne une fonction croissante ayant, dans le plan (ρ, f), un diagramme doué d'un sens permanent de concavité. Supposons qu'en M_0, soit réalisée l'une des hypothèses suivantes:

a_1) On a $\rho_1 > \rho_2$ et la concavité du diagramme $f(\rho)$ est orientée vers les $f > 0$;

(a_2) On a $\rho_2 > \rho_1$ et la concavité du diagramme $f(\rho)$ est orientée vers les $f < 0$;

dans les deux cas, ρ_1 sera donc celle des deux valeurs de ρ pour laquelle notre diagramme a la pente la plus grande. Soient $\Pi(\rho)$ et $\varpi(\rho)$ les pentes des deux demi-tangentes au diagramme, étant entendu que Π désigne la plus grande. Cela posé, prenons pour fixer les idées le cas (a_1) et supposons alors que les projetantes de M_0 sur E_1 soient dans un demi-cône de révolution tel que le cosinus de son demi-angle au sommet dépasse, *au sens strict*

$$\frac{\Pi(\rho_2)}{\varpi(\rho_1)} = \cos\alpha$$

c'est-à-dire tel que le demi-angle au sommet soit inférieur à l'angle aigu α défini par la relation ci-dessus Dès lors, sur la demi-droite $M_0\Delta_0$ opposée au demi-axe de ce cône, la fonction F (M) sera croissante en M_0: en effet, la pente de $f(\rho_1)$ dépasse en ce point $\varpi(\rho_1)\cos\alpha$, c'est-à-dire $\Pi(\rho_2)$, c'est-à-dire enfin, puisque la pente de ρ_2 ne dépasse jamais l'unité, la pente de $f(\rho_2)$. Cela posé, en vertu de la S.C.I. cette croissance au sens strict aura lieu sur chaque vecteur, faisant avec $M_0\Delta_0$ un angle suffisamment petit, et ayant son origine suffisamment voisine de ε, si sa longueur est inférieure à une limite pouvant être évaluée en fonction des bornes des voisinages précédents. Autour de M_0, l'ensemble des points M tels que F (M) = F (M_0) aura donc même structure que ci-dessus: celle d'une surface $z = f(x, y)$ à pentes bornées.

8. — Remarquons en terminant la possibilité, dans les conditions où sont réalisées des inégalités convenables, de déduire des théorèmes locaux qui précèdent des théorèmes intégraux.

Exemple I. — Soit donnée la fonction $f(\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n)$ simulcontinue par rapport aux distances $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n$ de M aux ensembles $E_1, E_2, ..., E_n$. En dehors de la sphère minima circonscrite à la réunion de nos ensembles, le lieu des points où f est au moins égale à son maximum sur cette sphère est une surface coupée en un point et un seul par chaque droite issue du centre de la sphère.

Exemple II. — Considérons le lieu des points tels que $\rho_1 = \rho_2 +$ const. En remplaçant l'un des ensembles par une réunion de sphères de rayon constant centrées sur lui, on se ramène au lieu des points équidistants de E_1 et de E_2. Soient O_1, R_1 et O_2, R_2 les centres et rayons des sphères minima circonscrites à E_1 et à E_2. En tout point M nous aurons

$$MO_1 - R_1 < \rho_1 < MO_1 + R_1 \, ,$$
$$MO_2 - R_2 < \rho_2 < MO_2 + R_2 \, .$$

Si M appartient au lieu, la relation $\rho_1 = \rho_2$ permet de déduire des inégalités précédentes la suivante:

$$-(R_1 + R_2) < MO_1 - MO_2 < R_1 + R_2 \, .$$

Supposons que l'on ait

$$O_1O_2 \geqq 3(R_1 + R_2) \, .$$

Le lieu de M se trouve entre les nappes d'un hyperboloïde de révolution de foyers O_1 et O_2, dans une région à laquelle sont extérieures nos deux sphères: les cônes C_1 et C_2 de sommets M circonscrits à nos sphères sont donc non empiétants au sens strict. Un segment minimum de M relatif à E_2 est dans C_2. Sur la demi-droite MO_2 ou une demi-droite voisine, ρ_2 décroît plus rapidement que ρ_1 lorsque celui-ci décroît et le paratingent du lieu ne peut contenir MO_2. On verrait de même qu'il ne peut contenir MO_1. D'ailleurs, il y aura un seul point du lieu sur chaque rayon vecteur issu de O_1 et chaque rayon vecteur issu de O_2.

9. — Mais ces applications nous éloigneraient de la S.C.I. pour nous rapprocher de cette autre idée: recherche de conditions d'inégalité moyennant lesquelles le lieu des points dont les distances à plusieurs ensembles sont liées par une certaine relation $f = 0$ équivaut topologiquement au lieu obtenu en substituant, à titre d'approximation, un point à chacun de ces ensembles et conservant la même relation. Dans un ordre d'idées voisin, citons également ce problème: on approche chacun des ensembles considérés par un nombre fini de points, et on s'efforce de choisir ces points de manière à réaliser (dans un sens pouvant comporter diverses définitions) la meilleure approximation des ensembles de niveau $f = 0$.