Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 31 (1932)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES POLAIRES GÉNÉRALISÉES ET COURBES MOYENNES
Autor: Haarbleicher, André
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-24626

Comme les séries $\Sigma \tau_n x^n$, $\Sigma \tau_{n-1} x^n$ sont absolument convergentes, les produits infinis

$$\Pi (1 - \tau_n x^n) \ , \qquad \Pi (1 - \tau_{n-1} x^n)$$

sont aussi absolument convergents et par conséquent sont différents de zéro. On en déduit que C_n tend vers une limite finie, ce qui est en contradiction avec la condition et le théorème est démontré.

SUR LES POLAIRES GÉNÉRALISÉES ET COURBES MOYENNES

PAR

André HAARBLEICHER (Paris).

M. d'OCAGNE m'a communiqué les résultats de deux Notes [1], l'une de lui, l'autre de M. HARMEGNIES sur les courbes polaires et les courbes moyennes, et m'a demandé de rechercher l'application des coordonnées isotropes à cette étude [2].

Je donne ci-après cette application pour la courbe moyenne relative à deux cercles quelconques.

Soit C_1, C_2 les deux cercles, O_1, O_2 leurs centres, O un point quelconque par lequel on mène une sécante qui coupe le cercle C_1 en des points M_1, le cercle C_2 en des points M_2. Lieu du milieu M des segments de droite $M_1 M_2$ lorsque la sécante tourne autour du point O.

Prenons pour axes de coordonnées les droites isotropes passant par O. Soit

$$XY - b_1 X - a_1 Y + c_1 = 0$$

$$XY - b_2 X - a_2 Y + c_2 = 0$$

$$Y - m X = 0$$

---

[1] Voir *L'Ens. Math.*, t. XXXI, p. 31-49, 50-57.

[2] Voir: *De l'emploi des droites isotropes comme axes de coordonnées*, par A. HAARBLEICHER (Paris, Gauthier-Villars, 1931). [N. d. l. R.]

les équations des cercles C_1, C_2 et de la sécante. Soit X_1, Y_1, X_2, Y_2, X, Y les coordonnées des points M_1, M_2, M. Les équations du problème sont

$$X_1Y_1 - b_1X_1 - a_1Y_1 + C_1 = 0 \tag{1}$$

$$X_2Y_2 - b_2X_2 - a_2Y_2 + C_2 = 0 \tag{2}$$

$$Y_1 - mX_1 = 0 \tag{3}$$

$$Y_2 - mX_2 = 0 \tag{4}$$

$$2X = X_1 + X_2 \tag{5}$$

$$2Y = Y_1 + Y_2 \tag{6}$$

L'équation du lieu s'obtient en éliminant X_1, Y_1, X_2, Y_2, m entre ces 6 équations. Des quatre dernières, on tire $m = \frac{Y}{X}$. Remplaçant dans les deux premières Y_1 par $\frac{Y}{X}X_1$ et Y_2 par $\frac{Y}{X}(2X - X_1)$, on a

$$YX_1^2 - (b_1X + a_1Y)X_1 + c_1X = 0\,, \tag{7}$$

$$YX_1^2 - (4XY - b_2X - a_2Y)X_1 + 4X^2Y - 2X(b_2X + a_2Y) + c_2X = 0\,. \tag{8}$$

L'élimination de X_1 donne

$$\begin{aligned} &XY[4XY - 2b_2X - 2a_2Y + c_2 - c_1]^2 \\ &- (b_1X + a_1Y)[4XY - 2b_2X - 2a_2Y + c_2 - c_1][4XY - (b_1 + b_2)X \\ &- (a_1 + a_2)Y] + c_1[4XY - (b_1 + b_2)X - (a_1 + a_2)Y]^2 = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

qui est l'équation du lieu. Si l'on pose

$$4XY - (b_1 + b_2)X - (a_1 + a_2)Y = K\,,$$

$$4XY - 2b_2X - 2a_2Y + c_2 - c_1 = K_2$$

cette équation prend la forme

$$XYK_2^2 - (b_1X + a_1Y)KK_2 + c_1K^2 = 0 \tag{10}$$

$K = 0$ et $K_2 = 0$ sont les équations de deux cercles K et K_2.

Cette équation est du sixième degré. X et Y n'entrent pas dans l'équation à un degré supérieur à 3. Donc le lieu cherché est une courbe du sixième ordre qui a les points cycliques pour points triples.

Les termes de degré inférieur sont du second degré. Donc l'origine O est un point double. Sous la forme (10) de l'équation, on voit qu'elle a pour points doubles les points Q_1 et Q_2 d'intersection des cercles K et K_2. Le cercle K passe par l'origine et a pour centre le point $\left(\frac{a_1 + a_2}{4}, \frac{b_1 + b_2}{4}\right)$ c'est-à-dire le milieu de la droite qui joint le point O au milieu A de $O_1 O_2$: c'est donc le cercle de diamètre OA. Les points Q_1 et Q_2 sont les points d'intersection du cercle K et de l'axe radical des cercles K et K_2 qui a pour équation

$$(b_2 - b_1) X + (a_2 - a_1) Y - c_2 + c_1 = 0 ,$$

c'est l'axe radical des cercles C_1 et C_2 d'après les équations (1) et (2).

Les équations des asymptotes, parallèles aux axes de coordonnées, s'obtiennent en annulant les coefficients de X_3 et de Y_3 dans l'équation de la courbe. Pour le coefficient de X_3, on obtient

$$Y(4Y - 2b_2)^2 - b_1(4Y - 2b_2)(4Y - b_1 - b_2)$$

ou

$$(4Y - 2b_1)(4Y - 2b_2)\left(Y - \frac{b_1 + b_2}{2}\right) .$$

De même pour le coefficient de Y_3

$$(4X - 2a_1)(4X - 2a_2)\left(X - \frac{a_1 + a_2}{2}\right) ,$$

les asymptotes sont donc les droites d'équations

$$X - \frac{a_1}{2} = 0 , \qquad X - \frac{a_2}{2} = 0 , \qquad X - \frac{a_1 + a_2}{2} = 0 ,$$

$$Y - \frac{b_1}{2} = 0 , \qquad Y - \frac{b_2}{2} = 0 , \qquad Y - \frac{b_1 + b_2}{2} = 0 ,$$

ce sont les droites isotropes qui passent par les milieux des côtés du triangle $OO_1 O_2$.

Le lieu cherché est donc une courbe du sixième ordre qui a pour points triples les points cycliques, pour points doubles le point O *et les points* Q_1, Q_2 *d'intersection de l'axe radical des cercles* C_1, *et* C_2 *avec le cercle* K *de diamètre* OA, A *étant le milieu de* $O_1\,O_2$. *Elle a pour foyers doubles les milieux* A, B, C *des côtés du triangle* $OO_1\,O_2$.

En général, cette courbe n'est pas une courbe des trois barres. Pour qu'elle le soit, il faut et suffit que les triangles $OQ_1\,Q_2$ et ABC soient inscrits dans un même cercle et circonscrits à une même parabole.

Le cercle K passe par les points O, Q_1, Q_2, A. Le point B $\left(\frac{a_1}{2}, \frac{b_1}{2}\right)$ est sur ce cercle si

$$a_1 b_1 - (b_1 + b_2)\frac{a_1}{2} - (a_1 + a_2)\frac{b_1}{2} = 0 ,$$

ou

$$a_1 b_2 + a_2 b_1 = 0$$

$$\frac{b_1}{a_1} = -\frac{b_2}{a_2} ,$$

c'est-à-dire si les droites OO_1 et OO_2 sont rectangulaires. La même condition exprime que le point C est sur le cercle.

Elle exprime aussi que les triangles $OQ_1\,Q_2$ et ABC sont circonscrits à une même parabole. Le quadrilatère ABOC est alors un rectangle et la droite $Q_1\,Q_2$, axe radical des cercles C_1 et C_2 est perpendiculaire à BC, parallèle à $O_1\,O_2$. Je dis qu'étant donné un rectangle ABOC et une corde du cercle circonscrit $Q_1\,Q_2$ quelconque perpendiculaire à la diagonale BC, les triangles ABC et $OQ_1\,Q_2$ sont circonscrits à une même parabole. Prenons pour origine des coordonnées isotropes le centre du cercle. Soit

$$\alpha\,,\ \frac{1}{\alpha}\,,\ \beta\,,\ \frac{1}{\beta} - \beta\,,\ -\frac{1}{\beta}\,,\ -\alpha\,,\ -\frac{1}{\alpha}\,,\ z_1\,,\ \frac{1}{z_1}\,,\ z_2\,,\ \frac{1}{z_2}\,,$$

les coordonnées des points A, B, C, O, Q_1, Q_2. Il faut démontrer que les produits des abscisses des sommets des deux triangles sont égaux.

$$-\alpha\beta^2 = -\alpha z_1 z_2$$

ou

$$\beta^2 = z_1 z_2 . \qquad (11)$$

Or le coefficient angulaire de BC est $\frac{1}{\beta^2}$; celui de $Q_1 Q_2$,

$$\frac{\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2}}{z_1 - z_2}$$

ou $-\frac{1}{z_1 z_2}$. La condition de perpendicularité de BC et $Q_1 Q_2$ est donc

$$\frac{1}{\beta^2} = \frac{1}{z_1 z_2},$$

égalité identique à l'égalité (11).

Donc *la condition nécessaire et suffisante pour que le lieu soit une courbe des trois barres est que le point* O *soit sur le cercle de diamètre* $O_1 O_2$.

La polaire généralisée du point O par rapport aux cercles (M_1) et (M_2) inverses de C_1 et C_2, O étant le centre d'inversion, 1 la puissance d'inversion, est la quartique circulaire d'équation.

$$\begin{gathered}
[4 - 2b_2 X - 2a_2 Y + (c_2 - c_1) XY]^2 \\
- (b_1 X + a_1 Y)[4 - 2b_2 X - 2a_2 Y \\
+ (c_2 - c_1) XY][4 - (b_1 + b_2) X - (a_1 + a_2) Y] \\
+ c_1 XY[4 - (b_1 + b_2) X - (a_1 + a_2) Y]^2 = 0 .
\end{gathered}$$