Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 31 (1932)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LA SOMMATION DES SÉRIES DIVERGENTES PAR LES MOYENNES GÉNÉRALISÉES

Autor: Obrechkoff, Nikola

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-24625

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Siehe Rechtliche Hinweise.

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. Voir Informations légales.

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. See Legal notice.

Download PDF: 23.05.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Ainsi:

Si deux points M *et* M′ *décrivent simultanément deux courbes fermées d'un plan, de même longueur et bordant des surfaces équivalentes, les courbes décrites par les points* μ *et* μ', *contraposés pour la médiatrice du segment* MM′, *sont fermées et bordent des surfaces équivalentes.*

La proposition s'applique particulièrement au cas de la correspondance par arcs équivalents sur des courbes fermées de même longueur; les lieux de μ et de μ' ont, en outre, même longueur.

Juillet 1932.

SUR LA SOMMATION DES SÉRIES DIVERGENTES PAR LES MOYENNES GÉNÉRALISÉES

PAR

Nikola OBRECHKOFF (Sofia, Bulgarie).

Soit $c_0, c_1, c_2, \ldots,$ des nombres donnés et supposons que les nombres

$$C_n = \sum_{\mu=0}^{n} c_\mu$$

sont différents de zéro. La série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tag{1}$$

est sommable par les moyennes généralisées si l'expression

$$\delta_n = \frac{c_0 s_0 + c_1 s_1 + \ldots + c_n s_n}{C_n}, \qquad s_n = \sum_{\mu=0}^{n} a_\mu ,$$

tend vers une limite, lorsque $n \to \infty$. Pour que chaque série convergente soit sommable par cette méthode avec la même somme, il faut et il suffit, d'après un théorème connu de Tœplitz, que

$$1) \qquad \lim_{n \to \infty} |C_n| = \infty$$

$$2) \qquad |c_0| + |c_1| + \ldots + |c_n| < K|C_n|, \qquad K \text{ fini}.$$

Il est intéressant de chercher s'il est possible d'employer cette méthode de sommation pour le prolongement analytique d'une série de Taylor. D'après la méthode de M. Borel pour le prolongement analytique il faut d'abord étudier la série

$$(2) \qquad 1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots$$

Dans le cas $c_n > 0$, M. Bouligand, dans la deuxième édition du livre de M. Borel « Leçons sur les séries divergentes » (1928, p. 253-254), démontre, en se basant sur un théorème de M. Montel, que la série (2) n'est pas sommable pour aucun $|z| > 1$ si les c_n satisfont encore à quelques conditions de monotomie, en remarquant que le cas général paraît difficile à résoudre. Nous démontrons le résultat général suivant:

La série (2) *n'est pas sommable par cette méthode en dehors du cercle* $|z| \leqq 1$.

Démonstration. En effet, nous avons

$$S_n = 1 + z + \ldots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}, \qquad S_n = \frac{1}{1 - z} - \frac{z\tau_n}{1 - z},$$

$$\tau_n = \frac{c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n}{C_n}.$$

Soit z un nombre fixe, $|z| > 1$. Supposons que la série (2) est sommable pour z c'est-à-dire que $\lim_{n \to \infty} \tau_n = A$. Nous avons

$$c_n z^n = C_n \tau_n - C_{n-1} \tau_{n-1},$$

d'où l'on obtient

$$\frac{C_n}{C_{n-1}} = \frac{z^n - \tau_{n-1}}{z^n - \tau_n} = \frac{1 - \tau_{n-1} x^n}{1 - \tau_n x^n}, \qquad x = \frac{1}{z}, \quad |x| < 1,$$

$$C_n = c_0 \prod_{\rho=1}^{n} \frac{1 - \tau_{\rho-1} x^\rho}{1 - \tau_\rho x^\rho}$$

Comme les séries $\Sigma \tau_n x^n$, $\Sigma \tau_{n-1} x^n$ sont absolument convergentes, les produits infinis

$$\Pi (1 - \tau_n x^n) \ , \qquad \Pi (1 - \tau_{n-1} x^n)$$

sont aussi absolument convergents et par conséquent sont différents de zéro. On en déduit que C_n tend vers une limite finie, ce qui est en contradiction avec la condition et le théorème est démontré.

SUR LES POLAIRES GÉNÉRALISÉES ET COURBES MOYENNES

PAR

André HAARBLEICHER (Paris).

M. d'OCAGNE m'a communiqué les résultats de deux Notes[1], l'une de lui, l'autre de M. HARMEGNIES sur les courbes polaires et les courbes moyennes, et m'a demandé de rechercher l'application des coordonnées isotropes à cette étude[2].

Je donne ci-après cette application pour la courbe moyenne relative à deux cercles quelconques.

Soit C_1, C_2 les deux cercles, O_1, O_2 leurs centres, O un point quelconque par lequel on mène une sécante qui coupe le cercle C_1 en des points M_1, le cercle C_2 en des points M_2. Lieu du milieu M des segments de droite $M_1 M_2$ lorsque la sécante tourne autour du point O.

Prenons pour axes de coordonnées les droites isotropes passant par O. Soit

$$XY - b_1 X - a_1 Y + c_1 = 0$$
$$XY - b_2 X - a_2 Y + c_2 = 0$$
$$Y - m X = 0$$

---

[1] Voir *L'Ens. Math.*, t. XXXI, p. 31-49, 50-57.

[2] Voir: *De l'emploi des droites isotropes comme axes de coordonnées*, par A. HAARBLEICHER (Paris, Gauthier-Villars, 1931). [N. d. l. R.]