Ainsi:

*Si deux points* M *et* M′ *décrivent simultanément deux courbes fermées d'un plan, de même longueur et bordant des surfaces équivalentes, les courbes décrites par les points* $\mu$ *et* $\mu'$, *contraposés pour la médiatrice du segment* MM′, *sont fermées et bordent des surfaces équivalentes.*

La proposition s'applique particulièrement au cas de la correspondance par arcs équivalents sur des courbes fermées de même longueur; les lieux de $\mu$ et de $\mu'$ ont, en outre, même longueur.

Juillet 1932.

---

# SUR LA SOMMATION DES SÉRIES DIVERGENTES PAR LES MOYENNES GÉNÉRALISÉES

PAR

Nikola OBRECHKOFF (Sofia, Bulgarie).

---

Soit $c_0, c_1, c_2, \ldots,$ des nombres donnés et supposons que les nombres

$$C_n = \sum_{\mu=0}^{n} c_\mu$$

sont différents de zéro. La série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tag{1}$$

est sommable par les moyennes généralisées si l'expression

$$\delta_n = \frac{c_0 s_0 + c_1 s_1 + \ldots + c_n s_n}{C_n}, \qquad s_n = \sum_{\mu=0}^{n} a_\mu,$$

tend vers une limite,lorsque $n \to \infty$. Pour que chaque série convergente soit sommable par cette méthode avec la même somme, il faut et il suffit, d'après un théorème connu de Tœplitz, que

1) $\lim\limits_{n \to \infty} |C_n| = \infty$

2) $|c_0| + |c_1| + \dots + |c_n| < K|C_n|$, K fini.

Il est intéressant de chercher s'il est possible d'employer cette méthode de sommation pour le prolongement analytique d'une série de Taylor. D'après la méthode de M. Borel pour le prolongement analytique il faut d'abord étudier la série

$$(2) \qquad 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots$$

Dans le cas $c_n > 0$, M. Bouligand, dans la deuxième édition du livre de M. Borel « Leçons sur les séries divergentes » (1928, p. 253-254), démontre, en se basant sur un théorème de M. Montel, que la série (2) n'est pas sommable pour aucun $|z| > 1$ si les $c_n$ satisfont encore à quelques conditions de monotomie, en remarquant que le cas général paraît difficile à résoudre. Nous démontrons le résultat général suivant:

*La série* (2) *n'est pas sommable par cette méthode en dehors du cercle* $|z| \leqq 1$.

Démonstration. En effet, nous avons

$$S_n = 1 + z + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}, \qquad S_n = \frac{1}{1-z} - \frac{z\tau_n}{1-z},$$

$$\tau_n = \frac{c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n}{C_n}.$$

Soit $z$ un nombre fixe, $|z| > 1$. Supposons que la série (2) est sommable pour $z$ c'est-à-dire que $\lim\limits_{n \to \infty} \tau_n = A$. Nous avons

$$c_n z^n = C_n \tau_n - C_{n-1} \tau_{n-1},$$

d'où l'on obtient

$$\frac{C_n}{C_{n-1}} = \frac{z^n - \tau_{n-1}}{z^n - \tau_n} = \frac{1 - \tau_{n-1} x^n}{1 - \tau_n x^n}, \qquad x = \frac{1}{z}, \quad |x| < 1,$$

$$C_n = c_0 \prod_{\rho=1}^{n} \frac{1 - \tau_{\rho-1} x^\rho}{1 - \tau_\rho x^\rho}$$

Comme les séries $\Sigma \tau_n x^n$, $\Sigma \tau_{n-1} x^n$ sont absolument convergentes, les produits infinis

$$\Pi (1 - \tau_n x^n) \ , \qquad \Pi (1 - \tau_{n-1} x^n)$$

sont aussi absolument convergents et par conséquent sont différents de zéro. On en déduit que $C_n$ tend vers une limite finie, ce qui est en contradiction avec la condition et le théorème est démontré.

---

# SUR LES POLAIRES GÉNÉRALISÉES ET COURBES MOYENNES

PAR

André HAARBLEICHER (Paris).

---

M. d'OCAGNE m'a communiqué les résultats de deux Notes[1], l'une de lui, l'autre de M. HARMEGNIES sur les courbes polaires et les courbes moyennes, et m'a demandé de rechercher l'application des coordonnées isotropes à cette étude[2].

Je donne ci-après cette application pour la courbe moyenne relative à deux cercles quelconques.

Soit $C_1$, $C_2$ les deux cercles, $O_1$, $O_2$ leurs centres, O un point quelconque par lequel on mène une sécante qui coupe le cercle $C_1$ en des points $M_1$, le cercle $C_2$ en des points $M_2$. Lieu du milieu M des segments de droite $M_1 M_2$ lorsque la sécante tourne autour du point O.

Prenons pour axes de coordonnées les droites isotropes passant par O. Soit

$$XY - b_1 X - a_1 Y + c_1 = 0$$

$$XY - b_2 X - a_2 Y + c_2 = 0$$

$$Y - mX = 0$$

---

[1] Voir *L'Ens. Math.*, t. XXXI, p. 31-49, 50-57.

[2] Voir: *De l'emploi des droites isotropes comme axes de coordonnées*, par A. HAARBLEICHER (Paris, Gauthier-Villars, 1931). [N. d. l. R.]