relations (4); nous les savons incompatibles, a' différant de a. Mais si

$$\int_0^l y\,dx - x\,dy = \int_0^l (y'\,dx' - x'\,dy') \;,$$

c'est-à-dire si les projections de (C) et de (C′) sur xOy enferment des surfaces équivalentes, les conditions précédentes font place aux égalités (5), vérifiées pour

$$a \,.\, a' = 1 \;.$$

Ainsi:

Si deux points M *et* M′ *décrivent simultanément deux courbes fermées de même longueur et dont les projections sur un plan bordent des surfaces équivalentes, les courbes décrites par les points* μ *et* μ' *de la droite* MM′, *contraposés pour le milieu du segment* MM′, *jouissent des mêmes propriétés.*

La proposition s'applique particulièrement au cas de la correspondance par arcs équivalents sur des courbes fermées de même longueur; les lieux de μ et de μ' ont, en outre, même longueur.

II.

8. — Plaçons-nous maintenant dans le domaine de la géométrie plane et soit le point μ transformé du point M′ par l'homothétie-rotation de centre M et de rapport complexe r_α (fig. 1); l'égalité vectorielle

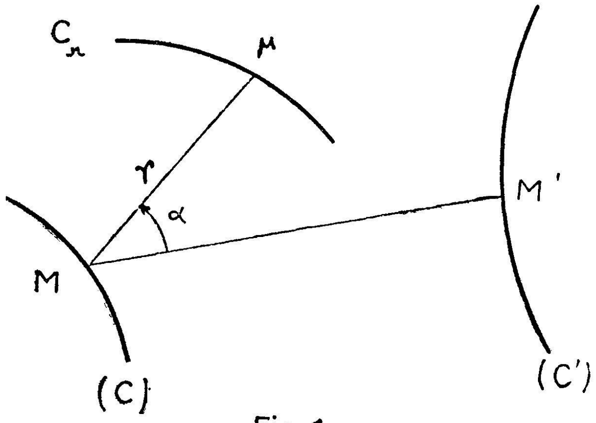

Fig 1

$$\overrightarrow{M\mu} = r_\alpha \,.\, \overrightarrow{MM'}$$

s'écrit encore

$$\overrightarrow{O\mu} = \overrightarrow{OM} + r_\alpha(\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM})$$

et, par suite,

$$\xi + i\eta = (x + iy) + (r\cos\alpha + ir\sin\alpha)\,[(x' - x) + i(y' - y)]:$$

finalement, les coordonnées de μ sont

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= x + r[(x'-x)\cos\alpha - (y'-y)\sin\alpha] , \\ \eta &= y + r[(x'-x)\sin\alpha + (y'-y)\cos\alpha] . \end{aligned}\right.$$

Par suite

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\xi}{\partial u} &= \frac{dx}{du} + r\left(-\frac{dx}{du}\cos\alpha + \frac{dy}{du}\sin\alpha\right) , \\
\frac{\partial\xi}{\partial v} &= r\left(\frac{dx'}{dv}\cos\alpha - \frac{dy'}{dv}\sin\alpha\right) , \\
\frac{\partial\eta}{\partial u} &= \frac{dy}{du} + r\left(-\frac{dx}{du}\sin\alpha - \frac{dy}{du}\cos\alpha\right) , \\
\frac{\partial\eta}{\partial v} &= r\left(\frac{dx'}{dv}\sin\alpha + \frac{dy'}{dv}\cos\alpha\right) ,
\end{aligned}$$

et les coefficients, pour cette surface plane que décrit le point μ, sont

$$\left|\begin{aligned} &\mathrm{A} = 0 , \\ &\mathrm{B} = 0 , \\ &\mathrm{C}\,du\,dv = r\sin\alpha\,(dx\,dx' + dy\,dy') + r(\cos\alpha - r)(dx\,dy' - dy\,dx') \end{aligned}\right.$$

$$\left|\begin{aligned} &\mathrm{E}\,du^2 = (r^2 - 2r\cos\alpha + 1)(dx^2 + dy^2) , \\ &\mathrm{F}\,du\,.\,dv = r(\cos\alpha - r)(dx\,dx' + dy\,dy') - r\sin\alpha\,(dx\,dy' - dy\,dx'), \\ &\mathrm{G}\,dv^2 = r^2(dx'^2 + dy'^2) . \end{aligned}\right.$$

9. — *Correspondance par surfaces équivalentes.* — La surface élémentaire décrite par μ sur le plan a pour aire

$$d\sigma_\mu = |\mathrm{C}\,du\,dv|$$

ou bien

$$d\sigma_\mu = |r\sin\alpha\,(dx\,dx' + dy\,dy') + r(\cos\alpha - r)(dx\,dy' - dy\,dx')| .$$

Cette aire est la même pour les points μ et μ' tels que

$$\left\{\begin{aligned} r\sin\alpha &= \pm\, r'\sin\alpha' , \\ r(\cos\alpha - r) &= \pm\, r'(\cos\alpha' - r') , \end{aligned}\right.$$

ou que

$$\frac{r}{\sin\alpha'} = \frac{r'}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin(\alpha + \alpha')} ;$$

il est immédiat de constater que les points μ et μ' ainsi définis sont contraposés pour la médiatrice du segment MM′.

10. — *Correspondance par arcs équivalents.* — L'expression de l'arc élémentaire décrit par μ sur le plan est telle que

$$ds_\mu^2 = \left| \begin{array}{l} (r^2 - 2r\cos\alpha + 1)(dx^2 + dy^2) \\ + 2[r(\cos\alpha - r)(dx\,dx' + dy\,dy') - r\sin\alpha(dx\,dy' - dy\,dx')] \\ + r^2(dx'^2 + dy'^2) \;. \end{array} \right.$$

La correspondance précédente ne se poursuit pas en général, car les relations

$$\left\{ \begin{array}{l} r^2 - 2r\cos\alpha + 1 = r'^2 - 2r'\cos\alpha' + 1 \;, \\ r(\cos\alpha - r) = r'(\cos\alpha' - r') \;, \\ r\sin\alpha = r'\sin\alpha' \;, \\ r^2 = r'^2 \;, \end{array} \right. \tag{6}$$

qui se réduisent d'ailleurs aux trois dernières, n'admettent que la seule solution

$$r = r' \;, \qquad \alpha = \alpha' + 2k\pi \;.$$

Mais si les arcs simultanément décrits par M et M′ ont même longueur,

$$dx^2 + dy^2 = dx'^2 + dy'^2$$

et les égalités

$$\left\{ \begin{array}{l} r(\cos\alpha - r) = r'(\cos\alpha' - r') \;, \\ r\sin\alpha = r'\sin\alpha' \;, \end{array} \right. \tag{7}$$

sont satisfaites dans les conditions du paragraphe 9.

Une autre correspondance par arcs équivalents s'obtient encore en supposant parallèles les tangentes en M et M′; ceci entraîne

$$dx\,dy' - dy\,dx' = 0$$

et supprime la troisième relation (6), donnant un système de solution

$$r = r' \;, \qquad \alpha = -\alpha' + 2k\pi \;:$$

les μ et μ' sont contraposés pour la droite MM′.

11. — *Conclusion.* — En résumé:

Si deux points M *et* M′ *décrivent deux courbes quelconques données d'un plan, il s'établit entre les points* μ *et* μ', *contraposés pour la médiatrice du segment* MM′, *une correspondance conservant l'aire; si, de plus, les arcs simultanément décrits par* M *et* M′ *ont même mesure, de même ceux que décrivent* μ *et* μ'.

12. — En supposant les courbes (C) et (C′) fermées, de même longueur et simultanément décrites par les points M et M′, la courbe qu'engendre μ se ferme et l'aire incluse a pour expression

$$\int_0^l \eta\, d\xi - \xi\, d\eta \ ,$$

l'élément différentiel étant une fonction de l'arc de (C), par exemple. Un calcul long mais fort simple transforme l'intégrale définie en

$$\begin{aligned}(r^2 - 2r\cos\alpha + 1) &\int_0^l (y\,dx - x\,dy)\\ + r(\cos\alpha - r) &\int_0^l (y\,dx' - x\,dy' + y'\,dx - x'\,dy)\\ - r\sin\alpha &\int_0^l (y\,dy' - y'\,dy + x\,dx' - x'\,dx)\\ + r^2 &\int_0^l (y'\,dx' - x'\,dy') \ .\end{aligned}$$

L'aire est la même pour les points μ et μ' répondant précisément aux relations (5); de là une conclusion analogue à celle du paragraphe 10. Si

$$\int_0^l y\,dx - x\,dy = \int_0^l (y'\,dx' - x'\,dy') \ .$$

c'est-à-dire si les aires qu'enferment (C) et (C′) sont égales, (6) est remplacé par (7): les points μ et μ' sont contraposés pour la médiatrice du segment MM′.

Ainsi:

Si deux points M *et* M′ *décrivent simultanément deux courbes fermées d'un plan, de même longueur et bordant des surfaces équivalentes, les courbes décrites par les points* μ *et* μ', *contraposés pour la médiatrice du segment* MM′, *sont fermées et bordent des surfaces équivalentes.*

La proposition s'applique particulièrement au cas de la correspondance par arcs équivalents sur des courbes fermées de même longueur; les lieux de μ et de μ' ont, en outre, même longueur.

Juillet 1932.

SUR LA SOMMATION DES SÉRIES DIVERGENTES PAR LES MOYENNES GÉNÉRALISÉES

PAR

Nikola Obrechkoff (Sofia, Bulgarie).

Soit $c_0, c_1, c_2, \ldots$, des nombres donnés et supposons que les nombres

$$C_n = \sum_{\mu=0}^{n} c_\mu$$

sont différents de zéro. La série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tag{1}$$

est sommable par les moyennes généralisées si l'expression

$$\delta_n = \frac{c_0 s_0 + c_1 s_1 + \ldots + c_n s_n}{C_n}, \qquad s_n = \sum_{\mu=0}^{n} a_\mu ,$$