Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 31 (1932)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: DISCRIMINATION AU MOYEN DE LA NOTION DE PARATINGENT D'UNE CATÉGORIE DE CONTINUS QUI SONT DES COURBES

Autor: Bouligand, Georges

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-24623

gine. Pour chaque groupe de quatre de ces cercles, il y a un point de Miquel correspondant. Comme on a

$$|z - z_2 - z_3 - z_4 - z_5| = |z - z_1 - z_3 - z_4 - z_5| = \dots = R ,$$

le point z est le centre d'un cercle de rayon R et passant par les points P_{2345}, P_{1345}, ..., et que nous désignerons par C_{12345}.

Pour $n = 6$ on aura six cercles égaux C_1, C_2, ..., C_6, passant par l'origine et le point

$$z = z_1 + z_2 + \dots + z_6$$

sera commun aux six cercles C_{23456}, C_{13456}, ..., égaux eux aussi. On peut continuer ainsi indéfiniment.

Le théorème de Clifford, dans le cas particulier que nous avons envisagé, est complètement démontré. On constate de plus que tous les cercles qui interviennent successivement dans la figure sont égaux entre eux.

DISCRIMINATION AU MOYEN DE LA NOTION DE PARATINGENT D'UNE CATÉGORIE DE CONTINUS QUI SONT DES COURBES

PAR

M. Georges Bouligand (Poitiers).

---

1. — Soit O un point d'accumulation de l'ensemble ponctuel E. Une droite VV′ passant par O est dite une *paratingente* de E en O s'il existe une suite infinie de cordes P_iQ_i de E tendant vers VV′ lorsque leurs extrémités tendent vers O.

J'ai montré l'utilité du *paratingent* (ou collection des paratingentes) pour la sélection de classes étendues de variétés à p dimensions dans un espace euclidien à $p + q$ dimensions [1]. D'une

[1] G. Bouligand. — Sur quelques applications de la Théorie des ensembles à la géométrie infinitésimale. — *Bull. Ac. Polon. Math.*, série A, année 1930, p. 410.

manière indépendante, M. G. Rabaté s'est occupé du problème plus particulier de la sélection des courbes. Il a établi, dans sa Thèse, le théorème suivant [1]:

a) *Un continu de l'espace à trois dimensions par chaque point duquel il passe un plan ne contenant aucune paratingente est un arc simple, représentable au voisinage de chaque point, pour un bon choix d'axes, par des équations*

$$y = f(x) \qquad z = g(x)$$

où f et g sont des fonctions à nombre dérivés bornés.

Et il l'a complété par la proposition suivante.

b) *Lorsque le paratingent se réduit en chaque point à une droite unique, la courbe est à tangente continue.*

2. — Le présent article a pour but de donner des applications de ces théorèmes, montrant que certains continus, définis par des conditions géométriques simples, se réduisent à des courbes.

Considérons un continu borné tel que chaque triangle ayant ses sommets suffisamment voisins et situés sur ce continu, ait un angle au moins égal à un certain angle obtus A fixe, lequel peut être supposé différent aussi peu qu'on veut d'un angle droit.

Prenons sur ce continu deux points M et P suffisamment voisins pour être assurés que, les points P′ et P″ du continu tendant vers P, le triangle MP′P″ possède nécessairement, soit en P′, soit en P″, un angle au moins égal à A. D'après cela, toutes les paratingentes en P à notre continu feront avec la droite MP un angle aigu au plus égal au supplément de A: le plan perpendiculaire en P à MP ne contient donc aucune paratingente, et par suite, d'après le théorème *a*), les environs du point P sur notre continu sont formés par un arc de courbe représentable, pour un bon choix d'axes, par des équations $y = f(x)$, $z = g(x)$. Le même raisonnement s'applique à tout point de notre continu, qui étant borné, peut, en vertu du lemme de Borel-Lebesgue, être recouvert par un nombre fini d'arcs du genre précédent.

---

[1] G. RABATÉ. — Sur les notions originelles de la Géométrie Infinitésimale Directe (Toulouse, Privat, 1931, nos 65, 66, 67). — Le principe sélectif utilisé par M. G. Rabaté est exactement celui que j'ai mis en œuvre (loc. cit.) dans les conditions plus générales mentionnées dans le texte. La Thèse de M. Rabaté a égalemement été publiée dans les *Annales de la Fac. des Sc. de Toulouse*, 1931.

Et la réunion de tous ces arcs est un arc simple, en vertu de l'étude faite pour les environs de chaque point.

Pour résumer tout cela, nous dirons:

Les continus soumis à la condition de l'angle obtus (c'est-à-dire tel que tout triangle assez petit ayant ses sommets sur le continu ait un angle au moins égal à un angle obtus donné) sont des arcs simples rectifiables.[1]

3. — Considérons plus spécialement un continu borné, tel qu'un triangle ayant pour sommets trois points infiniment voisins sur ce continu ait son plus grand angle qui tende vers deux droits. Les sinus des angles d'un tel triangle tendent alors vers zéro en même temps que la longueur de ses côtés. Cela posé, soient PQ et RS deux cordes du continu infiniment voisines d'un point M (lui appartenant). Dans le triangle PQR, tous les angles ont leurs sinus infiniment petits; et de même dans le triangle PRS. De la considération d'un trièdre dont les arêtes sont respectivement parallèles à PQ, PR, RS et dont deux faces sont des angles infiniment petits (l'une provenant du couple PQ, PR et l'autre du couple PR, RS), on déduit que la troisième face (provenant du couple PQ, RS) est un angle infiniment petit. Il ne peut donc y avoir au point M plus d'une paratingente. Et, par suite, d'après le théorème *b*), notre continu est une courbe à tangente continue.

D'où ce théorème:

Les continus tels qu'un triangle ayant ses sommets sur le continu et ses côtés infiniment petits offre un angle tendant vers deux droits, sont des lignes à tangente continue (sans rebroussement).

Tel est notamment le cas des continus satisfaisant à la condition suivante: le rayon du cercle circonscrit à un triangle quelconque ayant ses sommets sur le continu surpasse toujours une longueur fixe [2].

---

[1] Cf. A. Marchaud. — Sur certaines courbes rectifiables (*Bull. des Sciences Math.* 2e série, 52, 1928, p 304).

[2] Cf. A. Roussel. — Sur l'existence des dérivées de certaines fonctions (*Bull. des Sciences Math.*, décembre 1926).