Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 31 (1932)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LA COURBE D'ARCHYTAS

Autor: d'Ocagne, M.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-24621

On sait, en effet, que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi}{\sqrt{1-\frac{r^2}{l^2}\sin^2\varphi}}\,d\varphi = \frac{\pi}{4}\mathrm{G}\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 2, \frac{r^2}{l^2}\right),$$

et, par suite,

$$\mathrm{V} = \frac{\pi}{2}\mathrm{G}\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 2, \frac{r^2}{l^2}\right)\frac{h^2 r^2}{l}$$

$$= \frac{\pi}{2}\frac{r^2}{l^2}\left(1 + \frac{3}{8}\frac{r^2}{l^2} + \frac{15}{32}\frac{r^4}{l^4} + \dots\right)h^2 l\,.$$

Si l'on se borne aux trois premiers termes du développement, on trouve, pour $\frac{r}{l} = \frac{1}{2}$ (c'est-à-dire $\theta = 30°$)

$$\mathrm{V} = 0{,}43527\, h^2 l\,.$$

Le coefficient numérique ne diffère que de 0,00131 de celui obtenu plus haut pour cette même valeur de θ.

SUR LA COURBE D'ARCHYTAS

PAR

M. D'OCAGNE Membre de l'Institut, (Paris).

---

1. — La courbe d'Archytas est une des rares courbes gauches algébriques qui aient été connues dans l'antiquité, peut-être même celle qui l'a été le plus anciennement. Elle a, comme on sait, été imaginée environ quatre cents ans avant l'ère chrétienne par le géomètre grec dont elle porte le nom pour résoudre le problème déliaque, autrement dit de la duplication du cube.

On peut la définir ainsi: ayant pris, sur l'axe Ox du trièdre trirectangle Oxy, le segment $OA = a$, on considère les cercles γ et γ_0 décrits sur OA comme diamètre respectivement dans les plans Oxy et Oxz; la courbe d'Archytas est la courbe d'intersection du cylindre dont γ est la section droite et du tore d'axe Oz dont γ_0 est le méridien.

2. — Les équations de ces surfaces sont

$$x^2 + y^2 - ax = 0$$

et

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 - a^2(x^2 + y^2) = 0 .$$

La projection de cette courbe sur le plan Oxz s'obtient immédiatement par l'élimination de $x^2 + y^2$ entre ces deux équations. Si l'on remplace, dans l'équation ainsi formée, z par y, on a l'équation du rabattement γ_1 de cette projection sur le plan Oxy

$$(y^2 + ax)^2 - a^3 x = 0 . \qquad (1)$$

La relation entre cette quartique γ_1 et le cercle γ est des plus simples: *le point* M_1 *de* γ_1 *qui a même abscisse que le point* M *de* γ *a même ordonnée que le point de* γ *dont l'abscisse est égale à* OM.

On voit immédiatement que la quartique γ_1 est inscrite dans le même carré que le cercle γ, carré dont un côté est placé sur Oz. De plus, si B et B$'$ sont les points de contact de γ avec les côtés de ce carré qui sont parallèles à Ox et coupent Oz en T et T$'$, *les points de contact* D *et* D$'$ *de* γ, *avec ces mêmes côtés sont les milieux de* BT *et* B$'$T$'$.

En O, la courbe γ_1 a quatre points confondus avec Oy, donc un méplat en ce point.

Enfin, si C est le centre du cercle γ, *le centre de courbure de* γ_1 *pour le point* A *est le milieu du rayon* CA, *le centre de courbure pour chacun des points* D *et* D$'$, *le milieu du rayon* OC.

La démonstration de ces diverses propositions peut constituer d'utiles exercices pour des élèves.

3. — Proposons-nous maintenant de trouver l'aire S contenue à l'intérieur de γ_1. On a

$$S = 2 \int_0^a y \, dx ,$$

y étant donné par l'équation (1), c'est-à-dire

$$S = 2\int_0^a \sqrt{\sqrt{ax}\,(a - \sqrt{ax})}\,dx .$$

Pour obtenir la valeur de cette intégrale, effectuons le changement de variable

$$\frac{a - \sqrt{ax}}{\sqrt{ax}} = t^2 ,$$

d'où

$$\sqrt{ax}\,(a - \sqrt{ax}) = \frac{a^2 t^2}{(1 + t^2)^2} , \qquad dx = \frac{-4t\,dt}{(1 + t^2)^3} ,$$

Comme, d'autre part, pour $x = 0$ et $x = a$, on a $t = \infty$ et $t = 0$, il vient, par cette substitution,

$$S = 8a^2 \int_0^\infty \frac{t^2\,dt}{(1 + t^2)^4} .$$

Si l'on pose

$$\int \frac{dt}{(1 + t^2)^n} = T_n ,$$

on voit immédiatement que

$$S = 8a^2 [T_3 - T_4]_0^\infty .$$

Or, par une intégration par parties, on obtient aisément la relation

$$T_n = \frac{t}{(2n - 2)(1 + t^2)^{n-1}} + \frac{2n - 3}{2n - 4} T_{n-1} .$$

Il en résulte, d'une part, que

$$T_3 - T_4 = \frac{-t}{6(1 + t^2)^3} + \frac{T_3}{6}$$

et, d'autre part, que

$$T_3 = \frac{t}{4(1 + t^2)^2} + \frac{3}{4} T_2 ,$$

$$T_2 = \frac{t}{2(1 + t^2)} + \frac{1}{2} T_1 ,$$

d'où, en remarquant que $T_1 = \operatorname{arc\,tg} t$,

$$T_3 = \frac{t}{4(1+t^2)^2} + \frac{3t}{8(1+t^2)} + \frac{3}{8}\operatorname{arc\,tg} t \; .$$

Finalement

$$T_3 - T_4 = \frac{t[3(1+t^2)^2 + 2(1+t^2) - 8]}{48(1+t^2)^3} + \frac{1}{16}\operatorname{arc\,tg} t \; .$$

La fraction constituant le premier terme du second membre s'annulant pour $t = 0$ et $t = \infty$, et arc tg t prenant les valeurs 0 et $\frac{\pi}{2}$ pour $t = 0$ et $t = \infty$, la valeur de S est donc

$$S = \frac{\pi}{4}a^2 \; .$$

C'est l'aire du cercle γ.

La courbe d'Archytas admettant, comme le cylindre et le tore, les plans Oxy et Oxz pour plans de symétrie, ce résultat peut s'enoncer comme suit:

Les projections d'une courbe d'Archytas sur ses deux plans de symétrie ont des aires égales; propriété qui semble n'avoir pas été remarquée jusqu'ici.

UN CAS PARTICULIER DU THÉOREME DE CLIFFORD

PAR

G. Tzitzéica (Bucarest).

---

1. — On connaît le théorème de Clifford, généralisation admirable du théorème de Miquel. Celui-ci se rapporte à un quadrilatère: Les cercles circonscrits aux quatre triangles, obtenus en supprimant successivement chaque côté du quadrilatère, passent tous par un même point, le point de Miquel du quadrilatère.

Si on considère, dans un plan, cinq droites, les points de Miquel des cinq quadrilatères, qu'on obtient en laissant de côté successivement chacune des cinq droites, sont situés sur un même cercle.