

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 31 (1932)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LE CONOÏDE DROIT A NOYAU SPHÉRIQUE  
**Autor:** d'Ocagne, M.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-24620>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 03.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# SUR LE CONOÏDE DROIT A NOYAU SPHÉRIQUE

PAR

M. d'OAGNE, Membre de l'Institut (Paris).

L'objet de cette note est de faire connaître un exemple simple d'application de la théorie des intégrales elliptiques, relatif à un problème de cubature.

On sait que le conoïde droit à noyau sphérique est une surface réglée du quatrième ordre, à centre, engendrée par une droite rencontrant à angle droit une directrice rectiligne en restant tangente à une sphère.

Sur la figure ci-contre, la directrice rectiligne est ( $ac, a'c'$ ). Coupons la surface par un plan de trace horizontale  $mm_1$ , normal à la perpendiculaire  $oc$  abaissée du centre de la sphère sur la directrice et cherchons à évaluer le volume  $V$  limité par ce plan, la directrice et le conoïde.

En appelant  $z$  la cote rapportée au plan d'équateur de la sphère (de trace verticale  $o'c'$ ),  $r$  le rayon de cette sphère et  $S$  la surface du triangle  $amm_1$ , nous avons

$$V = \int_{-r}^r S dz = 2 \int_0^r S dz .$$

Or, si nous appelons  $\rho$  le rayon du petit cercle de la sphère, de cote  $z$ , auquel sont tangentes les génératrices  $ab$  et  $ab_1$ , nous avons d'abord, en posant  $ao = l$ ,  $an = h$ ,

$$S = \frac{h^2}{l^2} \cdot l \cdot oe = \frac{h^2}{l} \cdot \frac{oa \cdot ob}{ab} = \frac{h^2 \rho}{\sqrt{l^2 - \rho^2}} = \frac{h^2 r \sin \varphi}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi}}$$

puis

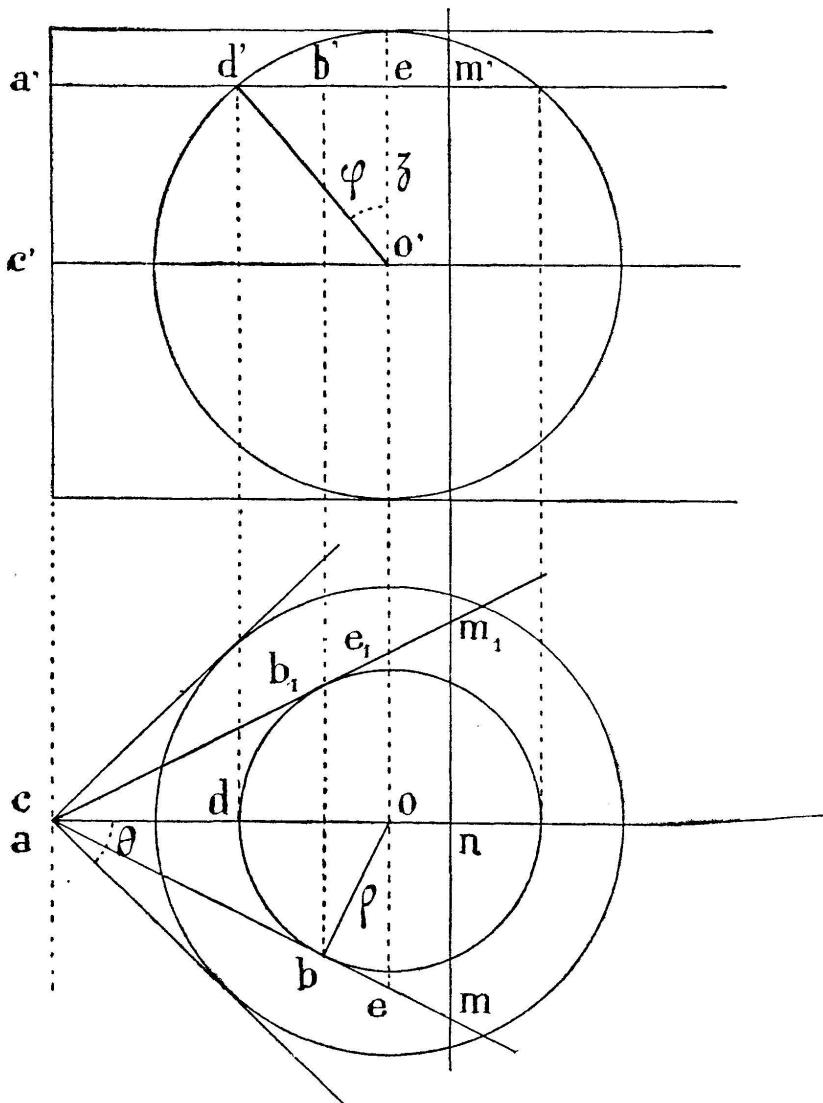
$$z = r \cos \varphi \quad \text{d'où} \quad dz = -r \sin \varphi \, d\varphi ,$$

d'où nous déduisons

$$V = 2 h^2 r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi = 2 \frac{h^2 r^2}{l} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \varphi}} d\varphi .$$

Si nous représentons par

$$F(\varphi, k) = \int_0^{\circ} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad \text{et} \quad E(\varphi, k) = \int_0^{\circ} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$$



les intégrales elliptiques de première et seconde espèce de Legendre, de module  $k < 1$ , où  $k$  peut être pris égal à  $\frac{r}{l}$  nécessaire-

ment  $< 1$ , on voit que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \varphi}} d\varphi = \frac{l^2}{r^2} \left[ F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{r}{l}\right) - E\left(\frac{\pi}{2}, \frac{r}{l}\right) \right]$$

et, par suite, que

$$V = 2h^2 l \left[ F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{r}{l}\right) - E\left(\frac{\pi}{2}, \frac{r}{l}\right) \right]. \quad (1)$$

On peut remarquer que, si pour deux conoïdes  $\frac{r}{l}$  et  $h^2 l$  ont les mêmes valeurs, le volume sera le même pour ces deux conoïdes. D'ailleurs, pour une même valeur de  $\frac{r}{l}$ , les conoïdes sont semblables; en ces conoïdes semblables les volumes seront donc équivalents si la valeur de  $h^2 l$  est la même.

On peut remarquer que si, avec Legendre, on représente le module, ici égal à  $\frac{r}{l}$ , par  $\sin \theta$ , l'angle  $\theta$  est celui que les génératrices du conoïde situées dans le plan d'équateur du noyau sphérique (contour apparent en projection horizontale) font avec le plan de symétrie contenant la directrice et le centre du noyau.

En se servant des tables de Legendre, on trouve, pour le coefficient numérique K qui multiplie  $h^2 l$  dans l'expression (1) de V, les valeurs suivantes:

pour $\theta = 15^\circ$ ,	$K = 0,10798$ ,
$30^\circ$ ,	$0,43658$ ,
$45^\circ$ ,	$1,00686$ ,
$60^\circ$ ,	$1,89092$ ,
$75^\circ$ ,	$3,38332$ .

Mais, avec la limite supérieure  $\frac{\pi}{2}$  de  $\varphi$ , il n'est pas besoin de faire intervenir les intégrales elliptiques si l'on a recours au développement de la fonction hypergéométrique G de Gauss, savoir

$$G(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma} \cdot \frac{x}{1} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} \cdot \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \dots$$

On sait, en effet, que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \varphi}} d\varphi = \frac{\pi}{4} G\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 2, \frac{r^2}{l^2}\right),$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi}{2} G\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 2, \frac{r^2}{l^2}\right) \frac{h^2 r^2}{l} \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{r^2}{l^2} \left(1 + \frac{3}{8} \frac{r^2}{l^2} + \frac{15}{32} \frac{r^4}{l^4} + \dots\right) h^2 l. \end{aligned}$$

Si l'on se borne aux trois premiers termes du développement, on trouve, pour  $\frac{r}{l} = \frac{1}{2}$  (c'est-à-dire  $\theta = 30^\circ$ )

$$V = 0,43527 h^2 l.$$

Le coefficient numérique ne diffère que de 0,00131 de celui obtenu plus haut pour cette même valeur de  $\theta$ .

## SUR LA COURBE D'ARCHYTAS

PAR

M. D'OCAGNE Membre de l'Institut, (Paris).

1. — La courbe d'Archytas est une des rares courbes gauches algébriques qui aient été connues dans l'antiquité, peut-être même celle qui l'a été le plus anciennement. Elle a, comme on sait, été imaginée environ quatre cents ans avant l'ère chrétienne par le géomètre grec dont elle porte le nom pour résoudre le problème déliaque, autrement dit de la duplication du cube.

On peut la définir ainsi: ayant pris, sur l'axe  $Ox$  du trièdre trirectangle  $Oxy$ , le segment  $OA = a$ , on considère les cercles  $\gamma$  et  $\gamma_0$  décrits sur  $OA$  comme diamètre respectivement dans les