Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 31 (1932)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LA MESURE DES GRANDEURS
Autor: Lebesgue, Henri
Kapitel: II. — Longueurs; Nombres.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-24619

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 14.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

II. — Longueurs; Nombres.

7. — Je vais encore commencer par un bref résumé d'un exposé. Je le choisis en accord avec la manière traditionnelle de présenter la géométrie dans laquelle les mouvements sont utilisés pour explorer l'espace. Cette manière est, à coup sûr, celle qui s'écarte le moins des démarches qu'ont dû faire nos ancêtres pour conquérir les vérités expérimentales qui sont à la base de la géométrie.

Dans cet exposé, après avoir indiqué des besoins qui ont pu conduire les hommes à comparer des distances, à définir les mots distances égales ou inégales, je décrirais le procédé de comparaison: soit à comparer AB et le segment U, appelé l'unité. Portons U sur la demi-droite AB, à partir de A en $A\alpha$, puis à la suite en $\alpha\beta$, etc. Et soit A_1 la dernière extrémité ainsi atteinte avant de dépasser B. Si on a atteint A_1 en portant 3 fois U on dira que la longueur de AB (sous-entendu avec l'unité U) est 3 si A_1 est en B; dans le cas contraire, on dira que la longueur de AB est supérieure à 3 et inférieure à 4. Exprimant par là que B est toujours l'un des points du segment A_1B_1 d'origine A_1 et égal à U, mais n'est jamais le point B_1.

Divisons U en 10 parties égales[1]; c'est-à-dire prenons un segment U_1 avec lequel la mesure de U soit 10 et recommençons les opérations; nous arriverons à un segment A_2B_2 contenu dans A_1B_1 et la longueur de AA_2 avec l'unité U_1 sera comprise entre 30 et 39; soit, par exemple, 37. La longueur de AB avec l'unité U_1 sera dite au moins égale à 37 et inférieure à 38.

En passant de même de U_1 à un segment U_2, on arrivera par exemple à 376 et 377; puis à 3760 et 3761; puis à 37602 et 37603, etc.

Il s'agit maintenant d'imaginer un symbole, qu'on appellera *nombre et qui, étant le compte rendu complet de cette suite indéfinie d'opérations, en pourra être dit le résultat.* On y arrive très facilement par les remarques suivantes: A chaque stade de la mesure, on obtient deux entiers 37 et 38, ou 37602 et 37603,

[1] Relativement à l'existence de U_1, voir la note du § 27.

qui diffèrent exactement d'une unité; donc il suffit de connaître la suite des entiers inférieurs obtenus à chaque stade.

Or cette suite, 3, 37, 376, 3760, 37602, ... est telle que chaque nombre est obtenu en écrivant un chiffre à la droite du nombre précédent. Dès lors la connaissance d'un des nombres de la suite fournit tous ceux qui le précèdent. Si, du moins, on sait à quel stade le nombre connu a été obtenu; puisque, sans cela, connaître 37 nous laisserait dans les alternatives suivantes: 1°, 37 a été obtenu au 1er stade; 2°, 37 a été obtenu au 2me stade, et 3 au 1er; 3°, 37 a été obtenu au 3me stade, 3 au 2me, 0 au 1er; 4°, 37 a été obtenu au 4me stade, 3 au 3me, 0 au 2me, 0 au 1er; etc.

On aboutirait ainsi à la notation ordinaire des nombres. Dans cette notation, les zéros placés à la gauche de l'entier obtenu au 1er stade (lequel peut être zéro) n'ont aucune importance; par analogie, lorsqu'il arrive que tous les chiffres de droite sont des zéros à partir de l'un d'eux, on convient volontiers de les omettre en conservant toutefois ceux de ces zéros qui seraient avant la virgule. On dit alors qu'il s'agit d'un nombre décimal exact.

8. — On notera, pour plus tard, que nous sommes passés directement de la notion d'entier à celle du nombre le plus général sans avoir à utiliser ou, si l'on veut, à dégager ni celle de nombre décimal exact, ni celle de nombre rationnel. Le terme de nombre décimal exact vient d'être donné ici pour bien marquer qu'il n'avait pas encore été employé. De même, on va passer directement des opérations sur les entiers aux opérations sur les nombres généraux; mais, auparavant, il faut se demander *si toute suite de chiffres indéfinie vers la droite, et comportant une virgule, est un nombre.* C'est-à-dire si cette suite provient de la comparaison d'un segment AB à l'unité U. Si, connaissant cette suite, on cherche à construire AB à partir de A sur une demi-droite AX, on obtient de suite les segments A_1B_1, A_2B_2, ... emboîtés les uns dans les autres. Des axiomes, énoncés ou sous-entendus, de la géométrie, il résulte qu'il y a un point B commun à tous ces segments (axiome de continuité) et qu'il n'y en a qu'un (axiome d'Archimède). On a donc un segment AB bien déterminé, mais la longueur de AB ne sera la suite de chiffres d'où l'on est parti

que si B ne coïncide avec aucun des points B_i. On voit immédiatement que ce cas se présente si, et seulement si, tous les chiffres de la suite sont des 9 à partir d'un certain rang. De telles suites sont donc à exclure, toutes les autres sont des nombres.

Le raisonnement précédent donne ce résultat plus général: un segment AB, porté par une droite AX connue, dont l'origine A est connue, est déterminé lorsque l'on sait que son extrémité B appartient à une suite infinie de segments $\alpha_i \beta_i$ portés par AX et emboités les uns dans les autres pourvu que, quel que soit n, la longueur d'un segment fixe U soit supérieure à n dès que l'on prend pour unité un segment $\alpha_i \beta_i$ d'indice assez grand.

Quand ces conditions sont réalisées, on dit que la longueur de $A\alpha_i$ (ou $A\beta_i$) est une valeur approchée par défaut (ou par excès) de la longueur AB et que ces deux suites de valeurs sont indéfiniment approchées. Un nombre est donc déterminé quand on connaît pour lui deux telles suites de valeurs approchées; *on verrait d'ailleurs facilement que le $p^{\text{ième}}$ chiffre décimal de ce nombre est le $p^{\text{ième}}$ chiffre décimal de celles de ces valeurs approchées par excès dont l'indice est assez grand.*

Ceci va nous permettre de généraliser le procédé de mesure. Tout d'abord, remarquons que si nous appliquons le procédé décrit de comparaison de AB et de U en portant des segments à partir de B, et non de A, on obtiendra le même résultat parce qu'il existe un déplacement transformant AB en BA. Plus généralement, les segments U et U_i peuvent être portés à partir d'un point quelconque ω de la droite AB.

Portons, indéfiniment dans les deux sens, le segment U à partir de ω, puis le segment U_1, puis le segment U_2, etc.; nous obtenons une graduation totale T qui va servir à mesurer AB. Pour cela, soit $a_i b_i$ le plus grand segment formé de segments U_i de T qui soit contenu dans AB, soit $a'_i b'_i$ le segment contenant un U_i de plus à chaque extrémité.

La translation qui amène a_i en A, amène b_i en β_i situé sur Ab_i donc sur AB; la translation qui amène a'_i en A, amène b'_i en β'_i au delà de b'_i, donc de B. Les longueurs de $a_i\ b_i$ et $a'_i\ b'_i$ connues sont donc deux valeurs approchées de AB respectivement par défaut et par excès.

Mais, de plus, $\beta_i \beta'_i$ est formé de $2U_i$; avec $\beta_i \beta'_i$ pour unité

la longueur de U_{i-1} est 5, celle de U est $5 \times 10^{i-1}$. Donc les valeurs approchées trouvées sont indéfiniment approchées.

Opérations. — Ici, comme pour les entiers, les opérations sur les nombres dispensent de certaines expériences parce qu'elles permettent de déduire quels seraient les résultats de ces expériences des résultats d'expériences antérieures.

9. — *Addition. — On sait ce qu'on appelle un segment somme de deux autres ; on se propose, étant connues les longueurs de deux segments, de trouver celle du segment somme.* Soit AB, somme des segments $A\omega$, ωB; soient (AB), (ωA), (ωB) les 3 longueurs. Pour évaluer (AB) opérons à partir du point ω, comme il vient d'être dit. Le segment $a_i\omega$ contient U_i un nombre entier de fois, ce nombre $(\omega A)_i$ est celui que l'on déduit de (ωA) en supprimant dans celui-ci et la virgule et les chiffres décimaux au delà du $i^{\text{ième}}$. De même pour ωb_i. Donc $a_i b_i$ contient $d_i = (\omega A)_i + (\omega B)_i$ fois U_i et $a'_i b'_i$ le contient $e_i = (\omega A_i) + (\omega B)_i + 2$ fois. De sorte que les longueurs de $a_i b_i$ et $a'_i b'_i$, avec l'unité U, sont les nombres que l'on obtient en séparant par des virgules i chiffres à la droite de d_i et e_i.

D'où la règle qui donne (AB), c'est-à-dire la règle d'addition de deux nombres, et en particulier de deux nombres décimaux.

Des propriétés de l'addition, notons seulement celle qu'exprime l'égalité $x + y = y + x$; on la déduira soit de la définition géométrique, soit de la règle de calcul.

10. — *Multiplication.*[1] — *On connait la longueur, soit par exemple* 37,425 ..., *d'un segment* AB *avec l'unité* U, *et la longueur de* U *par rapport à une unité* V, *soit* 4,632 ..., *quelle est la longueur de* AB *avec l'unité* V ?

Remarquons que 4,632 ... est aussi la longueur du segment V_i contenu 10^i fois dans V par rapport à l'unité U_i contenue 10^i fois dans U.

Or AB contient 3742 fois le segment U_2 et est contenu dans un segment formé de 3743 fois U_2. U_2 lui même contient 463 segments

[1] La multiplication des entiers est supposée avoir été définie en termes analogues à ceux que l'on va lire. Toute question qui conduit à une multiplication est un problème de changement d'unité, ou d'objet: 5 sacs de 300 pommes; 2 m. 75 d'étoffe à 28 fr. 45 le mètre.

V_4 et est contenu dans un segment formé de 464 tels segments. Donc AB contient un segment AB_2 formé de 3742×463 fois V_4 et est contenu dans un segment AB'_2 formé de 3743×464 fois V_4. Les longueurs de AB_2 et AB'_2 avec l'unité V_4 étant ainsi connues, celles avec l'unité V s'en déduisent en séparant 4 chiffres vers la droite. On a ainsi des valeurs approchées par défaut et par excès de la longueur de AB avec l'unité V.

Il reste à prouver que cette méthode donne des valeurs indéfiniment approchées. Or le segment $B_2B'_2$ contient, d'après les propositions sur la multiplication des entiers, $3742 + 463 + 1$ segments V_4; c'est-à-dire que sa longueur avec l'unité V_2 est

$$37{,}42 + 4{,}63 + 0{,}01 < 37{,}425 \ldots + 4{,}632 \ldots + 0{,}01 \ .$$

Donc elle est inférieure à

$$N = (37 + 1) + (4 + 1) + 1 \ .$$

En utilisant de même les 3 premiers chiffres décimaux des deux nombres donnés, on aurait été conduit à un intervalle $B_3B'_3$ dont la longueur, avec l'unité V_3, eut été inférieure au même nombre N, etc.

Quel que soit ce nombre N il existe une puissance entière de 10, soit 10^h, supérieure à N; ici $h = 2$. Alors $B_iB'_i$ contenant moins de N segments V_i en contient a fortiori moins de 10^h; en d'autres termes, V contient, pour $i > h$, plus de 10^{i-h} segments égaux à $B_iB'_i$ et les valeurs approchées trouvées pour la longueur de AB avec l'unité V sont donc indéfiniment approchées.

D'où la règle: le nombre cherché, qu'on *appelle le produit des deux nombres donnés, a pour chiffres successifs les chiffres de même rang du nombre qu'on obtient, pour* i *assez grand, en supprimant dans les deux nombres donnés la virgule et les chiffres au delà du* $i^{\text{ième}}$ *chiffre décimal, en augmentant chacun des deux entiers ainsi obtenus d'une unité, en faisant le produit des entiers ainsi augmentés, puis en séparant par une virgule* 2i *chiffres à la droite de ce produit*[1].

Les propriétés de la multiplication se réduisent essentiellement

[1] Je crois devoir rappeler que cet exposé s'adresse à des Professeurs; sur les précautions qu'il conviendrait de prendre pour les élèves, voir § 17.

à celles qui s'expriment par les égalités $xy = yx$; $(x + y)z = xz + yz$; elles se déduisent toutes deux immédiatement de la règle précédente. La deuxième résulte d'ailleurs, sans aucun raisonnement peut-on dire, de la définition géométrique de la multiplication, tandis qu'il n'en est pas de même pour la première.

Naturellement on posera $x \times 0 = 0 \times x = 0$.

11. — *Soustraction; Division.* — On définira ces opérations soit géométriquement, — ce qui a l'avantage de montrer de suite qu'elles sont possibles, pour $a - b$, si $b < a$; pour $\frac{a}{b}$, si $b \neq 0$, et n'ont qu'une solution — soit algébriquement, comme opérations inverses. On aboutira à la règle donnant les chiffres successifs du résultat; règles tout à fait analogues à celles donnant les chiffres d'une somme ou d'un produit mais qui utilisent maintenant, au lieu de deux valeurs approchées par excès, une valeur approchée par excès pour a, par défaut pour b.

Quant aux propriétés de la soustraction et de la division, il suffira de s'arrêter à celle qu'exprime l'égalité : $a \times \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}$, d'où dérivent

$$\frac{a}{\frac{c}{b}} = \frac{ab}{c} \qquad \text{et} \qquad \frac{\frac{c}{a}}{b} = \frac{c}{ab}.$$

Représentons par S_T la longueur d'un segment S avec l'unité T ; on déterminera successivement T, U et S, à partir de V et de a, b, c par

$$a = S_U, \quad b = U_V, \quad c = T_V ;$$

$$S_T = S_U \times U_T = S_U \times \frac{U_V}{T_V} = a \times \frac{b}{c}$$

et

$$S_T = \frac{S_V}{T_V} = \frac{S_U \times U_V}{T_V} = \frac{ab}{c},$$

ce qui démontre l'égalité étudiée.

Les règles concernant le calcul des nombres les plus généraux sont ainsi toutes légitimées ; celles relatives aux nombres décimaux exacts ou aux fractions en sont des cas particuliers.

12. — Avant de fixer exactement la portée de cette observation, je veux dire que l'exposé que je viens d'esquisser devrait comporter la remarque fondamentale suivante:

Un nombre n'a une signification concrète que si le segment unité U est fixé; il est alors le résultat de la comparaison à U d'un segment que l'on peut reconstituer, en grandeur, à partir du nombre donné. Il résulte de là qu'il n'était nullement évident à priori que si, de deux nombres x et y, x était le plus grand avec l'unité U, il était aussi le plus grand avec toute autre unité; que si des nombres $z_1, z_2, \ldots, z'_1, z'_2 \ldots$ formaient deux suites de valeurs indéfiniment approchées d'un nombre z avec l'unité U, il en était de même avec toute autre unité; que si l'on avait la relation $u = s + t$ avec une unité U, il en était de même avec toute autre unité; etc. Ce n'est que parce que la comparaison des chiffres de x et de y permet de reconnaître quel est le plus grand, que parce que les chiffres de z sont déterminés par ceux des z_i et z'_i, que parce que les chiffres de s et de t déterminent ceux de u, etc., que tous ces faits sont indépendants du choix de U et que l'on peut parler, par exemple, *du produit de deux nombres* et non pas seulement *du produit de deux nombres quand* U *est l'unité.*

On peut donc traiter des opérations sur les nombres sans pour cela se référer à une utilisation concrète précise de ces nombres.

Ce fait capital, qui est la base de l'analyse, est en parenté avec le fait géométrique suivant: s'il existe une relation homogène entre les longueurs de plusieurs segments par rapport à l'unité U, cette relation subsiste entre les longueurs par rapport à toute autre unité. C'est de là que dérive ce que l'on peut appeler l'homogénéité des formules de la géométrie à une dimension. Je me borne à cette indication car il s'agit d'une question en dehors de mon sujet et je reviens à celui-ci en discutant le mode d'exposition proposé.

13. — En me lisant, certains diront: mais c'est ce que l'on fait toujours! Je conviendrai tout à l'heure et je tirerai argument du fait qu'en effet c'est ce que l'on fait toujours pratiquement; mais, dans la théorie, on a de tout autres prétentions et, à ce point de vue, l'exposé précédent est résolument révolutionnaire.

Voici, par exemple, ce que l'on fait dans l'enseignement français, peu différent à cet égard de celui donné dans les autres pays.

Dans l'enseignement primaire, et dans les premières classes de l'enseignement secondaire, on apprend aux enfants ce que sont les nombres, sans définitions savantes ou prétentieuses, en leur faisant manier des nombres. D'abord les entiers d'un seul chiffre, puis ceux de deux chiffres, puis les entiers quelconques. A l'occasion, par exemple, du système métrique ils apprennent l'usage de la virgule et s'habituent au maniement des nombres décimaux. Dans cette partie de l'enseignement les nombres sont bien les comptes rendus d'expériences de dénombrement ou de mesure dont j'ai parlé; à aucun moment on ne les entortille dans la métaphysique.

D'autre part, on apprend aux élèves à manier les fractions; soit à l'occasion des fractions, soit à l'occasion de divisions, comme celle de 1 par 3, ou à l'occasion d'extractions de racines carrées, les enfants rencontrent des nombres qui ne pourraient être écrits qu'à l'aide d'une suite infinie de chiffres. On se garde bien d'attirer trop leur attention sur ce fait, de leur dire que c'est effrayant et déconcertant et les enfants ne sont ni effrayés, ni déconcertés.

Si bien qu'on admet dans la suite de l'enseignement que la notion de nombre est acquise, et que l'on peut parler des opérations sur les nombres quelconques. On arrive alors au carré de l'hypoténuse, on calcule la diagonale $a\sqrt{2}$ d'un carré, en géométrie; en algèbre, on introduit les règles relatives aux signes dans les opérations [1], mais on suppose connues les opérations sur les nombres positifs.

On va ainsi jusqu'à la première partie du baccalauréat, jusqu'à la fin de la classe de Première, en utilisant des notions un peu imprécises d'origine nettement expérimentale. Mais dans la classe suivante, celle de Mathématiques, réservée aux élèves voulant pousser davantage leur culture scientifique, on va réviser les notions et leur donner une base plus solide. Mes

---

[1] En passant, je fais remarquer que si l'on définit les opérations sur les nombres positifs et négatifs comme nous venons de le faire pour les nombres, mais en remplaçant l'emploi des segments non dirigés par l'emploi des vecteurs, les règles relatives aux signes perdent tout caractère artificiel.

critiques et mes observations portent uniquement sur les exposés que l'on fait à cette occasion.

14. — En Mathématiques on reprend la notion d'entier, puis celle de fraction, puis celle de nombre décimal exact considéré comme fraction particulière. Les définitions des opérations, suggérées par l'expérience, sont posées de façon purement logique. Tout cela est logiquement cohérent et je n'ai qu'à répéter cette remarque en somme déjà faite: s'il ne s'agit que de légitimer les modes de calcul sur les entiers et les nombres décimaux, c'est là un bien long détour et qui a l'inconvénient pédagogique d'être trop différent de forme des premiers enseignements reçus pour que les élèves reconnaissent bien qu'il s'agit tout simplement d'élucider définitivement ce qu'ils savent depuis l'enseignement primaire. Mais ma principale critique porte sur ce que l'on dit, ou plutôt sur ce que l'on ne dit pas, au sujet des nombres irrationnels.

Dans la plus haute des classes de l'enseignement secondaire, comme dans la plus basse, on ne parle des nombres irrationnels que par prétérition. On reprend ce qui est déjà clair dans l'esprit pour enseigner aux élèves à le formuler en mots; on n'essaie pas de leur préciser ce qui est resté plus que vague, bien que ce soit ce qui leur a le plus servi depuis quatre années et dont, cependant, on ne leur a jamais parlé: le nombre rationnel ou irrationnel. On le rencontre partout; partout on évite d'en parler nettement. En arithmétique, à l'occasion de la mesure des grandeurs on reprend la comparaison des longueurs, mais on ne s'étend que sur les cas de commensurabilité. Les autres, on les omet où on les escamote avec plus ou moins d'habileté. On se livre aussi à un véritable tour de passe-passe à l'occasion des valeurs approchées. On ne peut parler que des valeurs approchées des nombres rationnels, puisque c'est des nombres rationnels seuls que l'on a parlé; or, pour eux, ces valeurs approchées sont infiniment moins intéressantes que pour les autres nombres. Mais ceux-ci n'existent pas en quelque sorte; c'est bien simple, *on va parler de valeurs approchées qui ne seront approchées de rien.*

Je rappelle comment on y réussit. D'abord on crée une confusion, pas très grave mais ici très utile, entre deux sens de l'ex-

pression « valeur approchée ». Dans tout le reste des mathématiques *valeur approchée* à ε près par défaut signifiera valeur différant du nombre dont on s'occupe d'au plus ε et inférieure à lui. Ici, valeur approchée à $\frac{1}{10}$ près par défaut signifie le plus grand nombre entier de $10^{\text{ièmes}}$ contenu dans le nombre exact. Or, comme pour ce début de l'arithmétique, ce nombre exact ξ est toujours en réalité racine d'une équation algébrique simple $f(\xi) = 0$ on va pouvoir définir la valeur approchée $\frac{x}{10}$ à $\frac{1}{10}$ près par une différence de signe entre $f\left(\frac{x}{10}\right)$ et $f\left(\frac{x+1}{10}\right)$, sans parler de ξ. On dira donc:

Le quotient à $\frac{1}{10}$ près par défaut de A par B est $\frac{x}{10}$, si x est le plus grand entier tel que $10A - Bx$ soit positif ou nul;

La racine carrée à $\frac{1}{10}$ près par défaut de A est $\frac{x}{10}$, si x est le plus grand entier tel que $10^2A - x^2$ soit positif ou nul.

Qu'on note soigneusement l'énorme différence entre les deux cas examinés: dans le premier, le nombre ξ existe, je veux dire qu'il est rationnel, qu'on a le droit d'en parler; dans le second il n'existe pas. Ainsi $\frac{x}{10}$ est aussi une valeur approchée par défaut à $\frac{1}{10}$ près, au sens général en mathématiques des mots valeurs approchées, du quotient exact ξ de A par B, tandis que, dans le second cas, $\frac{x}{10}$ n'est pas la valeur approchée de $\sqrt{A}$, puisque celle-ci n'existe pas. Comment espérer que les élèves ne feront pas dans l'un et l'autre cas des transformations grammaticales analogues, licites dans un cas, illicites dans l'autre ?

Au reste, si le nombre $\frac{x}{10}$ n'était pas une valeur approchée de ξ, il ne servirait à rien d'autre qu'à être défini: La racine carrée de $\sqrt{2}$ à $\frac{1}{10}$ près par défaut sert parce que, par exemple, elle est ce que l'on obtient au second stade de la mesure de la diagonale du carré construit sur l'unité de longueur. Il est donc *indispensable* que les élèves fassent la transformation, ou si l'on veut la confusion grammaticale que l'on a prétendu éviter par les précautions de langage prises: quotient à $\frac{1}{10}$ près et racine carrée

à $\frac{1}{10}$ près et non valeurs approchées à $\frac{1}{10}$ près du quotient ou de la racine.

Il y a là une véritable hypocrisie, fréquente dans l'enseignement des mathématiques: le professeur prend des précautions verbales, efficaces quand elles ont le sens qu'il leur donne, mais que les élèves ne comprendront *certainement* pas de la même manière. Les examens et les concours incitent malheureusement à commettre souvent cette petite fourberie; les professeurs doivent dresser leurs élèves à bien répondre à de petites questions fragmentaires, ils leur donnent des modèles de réponses, qui sont souvent de véritables chefs-d'œuvre et qui ne donnent prise à aucune critique. Pour y parvenir, les professeurs isolent la question de l'ensemble des mathématiques, ils créent, pour ce qui la concerne, un langage parfait sans s'occuper du raccord avec les autres questions. Les mathématiques cessent d'être un monument, elles ne sont plus qu'un tas. J'insiste sur ce point bien qu'il ne s'agisse que d'un fait parfaitement connu de tous les professeurs, qui disent volontiers avec ironie: « La mode veut qu'à tel endroit du cours on soit précis, qu'à tel autre on ait toutes les libertés », et dont les bons élèves se sont aperçus assez pour être sceptiques, eux aussi, au lieu d'être enthousiastes. On a dépensé infiniment de talent à des perfectionnements de détail, ce sont des réfections d'ensemble qu'il faut maintenant tenter.

Donc, dans la classe de Mathématiques, les calculs à $\frac{1}{10}$ près sembleraient rendre inévitable la définition du nombre comme suite de chiffres et pourtant on ne donne pas cette définition, ni aucune autre d'ailleurs; on se tire d'affaires, à certains moments par des sortes de faux fuyants comme la définition de la racine carrée à $\frac{1}{10}$ près, à d'autres en regardant comme fait ce que l'on n'a pas fait. Le seul progrès dû à la révision de l'arithmétique est le suivant: j'ai dit que dans les basses classes le calcul de certains quotients ou de certaines racines conduisaient à remarquer qu'un nombre pouvait avoir une infinité de chiffres. Cette constatation devient maintenant en quelque sorte officielle; tout à fait quand la suite des chiffres est périodique, car on étudie les nombres décimaux périodiques, et presque tout à fait

pour d'autres suites, car on démontre que la racine carrée d'un entier ne peut être une fraction.

C'est un progrès bien insignifiant; à mon avis, la révision des mathématiques que l'on prétend faire dans la classe de Mathématiques est entièrement ratée parce qu'elle n'élucide pas la notion principale: celle de nombre. Qu'on n'espère d'ailleurs pas trouver ailleurs ce qui n'est pas dans la révision de l'arithmétique: en algèbre et en géométrie, on utilise couramment la notion de nombre incommensurable supposée acquise et les opérations sur ces nombres supposées connues.

15. — La lacune est si choquante que, dans les classes de mathématiques spéciales et dans les facultés, on donne, enfin !, et bien que les programmes ne l'exigent pas, une définition des irrationnelles dans une leçon qu'on est un peu étonné de trouver là, hors de sa place naturelle. Le plus souvent on utilise les coupures; on traite un peu des opérations; pas assez pour aller jusqu'à la détermination des chiffres du résultat. On évite d'ailleurs de parler de l'expression des nombres irrationnels dans le système de numération décimale.

Ainsi, finalement, mais seulement pour ceux qui poursuivent leurs études au delà de l'enseignement secondaire, la notion de nombre est franchement envisagée. Elle ne l'est pas pourtant sous la forme élémentaire de suite de chiffres sous laquelle elle est apparue à tous, tout d'abord, et sous laquelle on la rencontre constamment; elle ne l'est que sous une forme infiniment abstraite: le nombre, c'est le rangement en deux classes, possédant telles et telles propriétés, de tous les nombres rationnels, c'est-à-dire de tous les couples de deux de ces entités métaphysiques qu'on appelle des entiers.

On conçoit que l'on ne donne pas un pareil énoncé dans la classe de Mathématiques; mais, qu'on ne s'y trompe pas, les élèves des Facultés, eux-mêmes, ne comprennent quelque chose à cet énoncé qu'en lui donnant un sens concret, en figurant des points sur une droite en deçà ou au delà les uns des autres. Et, sous cette traduction, la définition des nombres irrationnels, est parfaitement assimilable par les élèves de Mathématiques. Elle revient à montrer qu'à toute coupure correspond un segment

déterminé; or, cela, ce n'est pas une fois qu'on le fait constater aux élèves de Mathématiques, c'est sept ou huit fois. Toutes les fois qu'on compare des grandeurs proportionnelles, le passage du cas de commensurabilité au cas d'incommensurabilité se fait grâce à cette constatation: comparaison des arcs de cercle et des angles au centre, des aires de rectangles de même base et des hauteurs de ces rectangles, des volumes de prismes droits de même base et des hauteurs de ces prismes, des espaces parcourus dans un mouvement uniforme et des temps de parcours, etc. Cette même constatation intervient encore quand on veut parler du rapport de deux grandeurs de même espèce en respectant cette doctrine, que pour ma part je ne comprends pas, d'après laquelle il faut distinguer le rapport du nombre qui le mesure. Alors, il faut donner des définitions de deux rapports égaux ou d'un rapport supérieur à un autre, et, par exemple, on dira: le rapport $\frac{S_1}{S_2}$ de deux segments est égal ou supérieur à celui de $\frac{s_1}{s_2}$ si, quel soit l'entier p, quand on subdivise S_2 en p morceaux égaux et de même s_2 en p morceaux égaux, S_1 contient toujours au moins autant de morceaux provenant de la subdivision de S_2 que s_1 contient de morceaux provenant de la subdivision de s_2. Et cette définition c'est la comparaison de deux coupures. On se sert encore de la même constatation pour la définition de π; bref, on fait un grand nombre de fois l'exposé devant lequel on recule lorsqu'il conviendrait de le faire pour définir les irrationnelles. Il y aurait donc possibilité de le faire, et même économie à le faire.

Cela pourtant ne suffirait pas; il faudrait encore parler des opérations sur les nombres irrationnels. Jadis la possibilité, et même la signification, de ces opérations résultaient de la « généralité de l'analyse »; dans ma jeunesse, nous passions « à la limite ». Je crois que, pour nos élèves de l'enseignement secondaire, il n'y a rien de changé; que tout se réduit encore à l'emploi de quelques paroles magiques quand il s'agit de passer des opérations sur les nombres commensurables aux opérations sur les nombres quelconques. Pour qu'il cesse d'en être ainsi, il faudrait adjoindre à la définition par les coupures un exposé devant lequel on recule en déclarant, non sans raison, qu'il

dépasserait le niveau auquel on peut prétendre en Mathématiques et exigerait trop de temps.

16. — L'exposé que je propose ne laisse prise à aucune de ces objections, ni à aucune autre si l'on a écarté une fois pour toutes celles concernant la métaphysique et l'emploi d'une numération précise. Toujours le même depuis l'enseignement primaire jusqu'au seuil de l'enseignement supérieur, cet exposé serait plus ou moins développé suivant l'âge des élèves; aux jeunes on affirmerait surtout, on ne démontrerait guère, exactement comme on le fait maintenant d'ailleurs; aux plus âgés, on démontrerait davantage; tout ce qui peut être démontré si on le trouvait indispensable, — ce qui n'est d'ailleurs pas mon opinion. En tout cas ce que l'on démontrerait apparaitrait bien aux yeux de tous comme la légitimation logique de faits déjà connus, acceptés, utilisés.

Arrivés dans l'enseignement supérieur, les élèves auraient la maturité voulue pour suivre une analyse plus complète du procédé jusque là employé pour définir les nombres. On leur montrerait ce qu'a de trop particulier, d'inutilement précis ce procédé: puisque, pour déterminer, et par suite pour arriver à définir, un nombre il ne suffit pas de le repérer par rapport à l'échelle trop lâche des entiers, il faut d'abord construire de nouveaux nombres (formant ce que l'on appelle un ensemble partout dense); cet ensemble est celui des nombres décimaux dans mon exposé, ensemble choisi de façon trop précise, aussi, utilisant dans l'exposé classique un procédé constant en mathématiques, noie-t-on cet ensemble particulier dans l'ensemble plus vaste des nombres commensurables; enfin, l'ensemble de comparaison étant ainsi devenu à mailles indéfiniment serrées, on déterminera les nombres qui restent à définir par leurs places par rapport aux nombres déjà définis. Et c'est la méthode des coupures.

17. — A ces avantages il faut en joindre un autre, considérable à ce moment où l'allègement des programmes est une nécessité si pressante, celui de supprimer deux chapitres de l'arithmétique — ceux sur les fractions et sur les nombres décimaux — d'où, par voie de conséquence, divers autres allègements. J'ai insisté

plusieurs fois sur le fait que je passais, sans intermédiaire, du nombre entier au nombre quelconque; le moment est venu de bien préciser ce que j'entends par là. Je ne veux pas dire que je vois un inconvénient quelconque à parler de la multiplication des nombres décimaux, par exemple, quelques minutes avant de parler de la multiplication des nombres quelconques; bien au contraire, j'y vois les avantages que tout le monde aperçoit de pouvoir ainsi donner des énoncés plus concis et plus nets et de les légitimer moins lourdement. Ce que j'ai voulu dire, c'est qu'il est inutile de faire à part une théorie complète relative aux nombres décimaux. Ayant, par exemple, à parler de la multiplication, à des élèves et non à des professeurs, après avoir donné la définition générale de la multiplication qui m'a servie plus haut, je la mettrais en œuvre d'abord pour le cas où les deux nombres sont décimaux, et seulement ensuite pour le cas général. J'aurais ainsi la règle opératoire pour les nombres décimaux exacts quelques minutes avant la règle générale; *je ne démontrerais les propriétés de la multiplication que d'emblée pour le cas général.*

Sauf en ce qui concerne des détails du discours, les nombres décimaux exacts et les nombres commensurables ne se présenteront à nous que comme des cas particuliers. On ne dirait donc pas un mot de la théorie des fractions, car la fraction $\frac{a}{b}$ serait tout simplement le nombre quotient exact de a par b et les opérations sur les fractions

$$a : \frac{c}{b} = \frac{ab}{c}, \qquad \frac{a \,.\, b}{b \,.\, c} = \frac{a}{c}, \ \ldots$$

ne seraient que des cas particuliers d'opérations sur des nombres. Ainsi, on ne dirait plus un mot de la théorie des fractions dans la classe de Mathématiques parce que ce ne serait plus utile à l'élucidation de la notion de nombre, ni des règles des opérations. Bien entendu on ne parlerait plus de la conversion des fractions ordinaires en fraction décimales, ni des nombres décimaux périodiques.

Mais parlerait-on encore des fractions dans l'enseignement primaire, dans les classes de 6me et de 5me de l'enseignement

secondaire ? Non, puisque cela n'est pas indispensable à la théorie et ne sert à rien pratiquement; car on sera bien, je pense, d'accord avec moi pour déclarer que marier des 22^{ièmes} et des 37^{ièmes} est un martyre que nous infligeons aux gosses de douze ans par pur sadisme, sans aucune raison d'utilité comme circonstance atténuante. Je sais bien qu'à force de chercher on découvrirait quelques «applications» des fractions; que certains mécaniciens pour tarauder un pas de vis font des calculs de fractions. Mais pas un sur dix d'entre eux n'a établi une relation quelconque entre la pratique du métier et l'enseignement scolaire et lorsque, par extraordinaire, ce rapport a été établi on peut affirmer que c'est la vis qui a fait comprendre les fractions bien plutôt que les fractions n'ont fait comprendre la vis.

Dans les petites classes, la réforme que je propose peut sembler se réduire au remplacement du mot fraction par un autre: rapport, par exemple. Car il faut bien s'occuper des propriétés

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}, \qquad \frac{ab}{bc} = \frac{a}{c}$$

et énoncer les règles correspondantes relatives au calcul du rapport de deux nombres (quelconques et non plus nécessairement entiers). Pourtant, la réforme serait effective si l'on consentait à ce que les enfants n'étudient plus deux numérations, la numération des $n^{\text{ièmes}}$ pour les nombres commensurables et la numération décimale; si on leur permettait de trouver 0,428 là où la réponse est $\frac{3}{7}$.

Sans doute a divisé par b, a sur b, se lit encore a b-ièmes quand a et b sont entiers, mais cette locution n'oblige pas plus à développer toute la théorie des fractions que la locution quatre-vingt-douze n'oblige à traiter de la numération à base vingt.

18. — J'entends tous les Professeurs protester. Les uns parce que les fractions fournissaient d'innombrables exercices pour leurs jeunes élèves; après un moment d'effroi, ceux-ci s'apercevront qu'ils ne manqueront jamais d'exercices. La plainte des autres m'émeut davantage et, pour dire la vérité, je la formule moi aussi: «Supprimer dans la classe de Mathématiques la

théorie des fractions, c'est supprimer un chapitre admirable. Le seul peut-être, parmi ceux qui nous restent, qui ne soit pas là uniquement pour son utilité immédiate et qui donne le sentiment de la beauté pure. »

Rappelons-nous ce que, dans nos discussions, nous objectons aux Professeurs des autres spécialités: qu'un enseignement n'est pas plus désintéressé parce qu'il est sans intérêt pratique, qu'il risque seulement alors d'être sans intérêt aucun pour les élèves; qu'au contraire, parce que toutes les spécialités peuvent efficacement concourir à la culture, et puisque toutes exigent les longs efforts d'apprentissage de techniques, on choisira si possible celles dont les techniques sont pratiquement les plus utiles; que, certes, le professeur doit profiter des occasions pour mettre les élèves en face de la beauté mais que pourtant la beauté n'est pas matière à enseignement, qu'en prétendant enseigner la beauté on n'arrive qu'à déformer le goût et à former des snobs. Tout cela, qui est valable pour les autres est valable pour nous; c'est pourquoi on a vu, aux différents degrés de notre enseignement, disparaître des programmes des choses très belles mais qui ont dû céder la place à d'autres plus immédiatement utiles à tous. Pour prendre un exemple assez ancien pour que toute discussion soit apaisée, ce n'est pas sans regret que les Professeurs ont vu disparaître l'analyse indéterminée et la théorie des fractions continues. N'est-il pas naturel cependant que ces doctrines, fort intéressantes au point de vue mathématique mais fort spéciales, et n'ayant aucune importance pratique ne soient enseignées qu'à un tout petit cercle d'étudiants triés ?

D'une façon générale, si tous les calculs finis, exacts, les seuls qu'admettaient les Anciens, ont conservé toute leur importance mathématique, s'ils doivent être connus et étudiés par les Mathématiciens actuels, leur importance pratique a considérablement diminué, et est parfois disparue totalement. Partout ces calculs, dits exacts, ont été détrônés par les calculs approchés et souvent les calculs exacts ne sont considérés que parce qu'ils conduisent au mode le plus simple de calcul approché. Dans les cours de licence, on ne cherche plus, comme autrefois, à multiplier indéfiniment les cas où l'on peut intégrer exactement une équation différentielle ou calculer exactement une quadra-

ture; on passe au plus vite sur ces techniques qui ne sont plus en accord avec les autres chapitres où l'on étudie les intégrales et les quadratures sans faire appel à des expressions explicites exactes. De même, dans nos classes de mathématiques spéciales, on ne s'occupe plus de la résolution algébrique des équations.

D'une de ces questions à l'autre la notion de calcul exact se modifie; mais, dans chaque question, le mot exact s'applique à un moyen d'écarter un emploi de l'infini. Or la notion d'infini est admise dans la pratique; la notion de limite n'y est pas mystérieuse puisque là deux états suffisamment voisins sont pratiquement identiques. Le Mathématicien, parce qu'à l'exemple des Grecs, il s'est obligé à éviter l'emploi des limites, a dû créer des méthodes, nouvelles arithmétiques et nouvelles algèbres, où les opérations sont définies seulement pour celles des expressions que l'on y regarde comme exactes, ou pour mieux dire comme existantes. On comprend qu'il y ait divorce entre mathématiques pures et mathématiques appliquées. Plus l'enseignement est élémentaire plus le point de vue de celles-ci doit être pris en considération; mais il serait déplorable pour le progrès des mathématiques qu'il n'y ait pas un enseignement, ne s'adressant qu'à des mathématiciens, dans lequel on adopterait l'autre point de vue.

Lorsque l'on classe par ordre de complication les expressions exactes, avant celles où figurent des quadratures, avant celles où ne figurent que les symboles de fonctions élémentaires, avant même celles où ne figurent que des radicaux algébriques, se trouve l'expression $\frac{a}{b}$; la plus simple des expressions exactes. La seule vraiment exacte pour les Grecs, car, pour eux, les nombres commensurables étaient les seuls qu'on pouvait atteindre ou, si l'on veut, appréhender; la seule débarrassée à leurs yeux de toute idée d'infini.

Il est clair que c'est une survivance de ces idées périmées qui nous fait tant tenir aux nombres commensurables; nous nous cramponnons à eux comme aux seuls vestiges d'un enseignement disparu. Ne vaudrait-il pas mieux reconnaître que la place de l'étude des nombres commensurables n'est plus en Mathématiques; qu'il n'y aurait aucun scandale à supprimer dans cette

classe le chapitre sur les fractions. Le scandale est autre part; il n'est pas à craindre pour l'avenir, il existe déjà: ce qui est scandaleux c'est que, dans certains pays, en France par exemple, on puisse achever ses études de mathématicien sans avoir jamais entendu parler de ces arithmétiques et algèbres nouvelles dont l'étude des fractions, considérées comme ensembles de deux nombres, n'est qu'un tout premier chapitre d'introduction, et qui forment l'une des parties très vivantes des mathématiques actuelles.

19. — La modification que je propose consiste donc à remplacer en arithmétique les chapitres sur les fractions, sur les nombres décimaux, sur les fractions décimales périodiques, sur les calculs approchés par un unique chapitre sur la mesure des longueurs et les opérations sur les nombres.

Ce chapitre serait aussi le premier en quelque sorte de la géométrie et l'on serait donc fondé à parler, en géométrie, de la distance de deux points. Actuellement, on ne parle pas du nombre distance au premier livre de la géométrie; on n'en parle qu'au troisième, après avoir parlé au second, de la mesure des angles et des arcs. Encore en parle-t-on avec quelque réticence à cause de l'emploi du nombre dans toute sa généralité; on parle des rapports de distances bien plus que des distances et le nombre distance n'apparaît de façon avouée que lorsque, dans une proportion entre distances, on fait les produits en croix. A ce moment on suppose connus et les nombres distances et les opérations sur les nombres. D'où vient cet ordre traditionnel ? On en est réduit à des conjectures.

Il est certain que, si la pratique de la mesure des longueurs est très ancienne, on n'a éprouvé le besoin de la faire avec précision que bien après que l'astronomie n'ait exigé la mesure précise des angles. Les graduations circulaires constituent peut-être le premier instrument de précision; les maîtres ont dû parler de bonne heure à leurs élèves de ces instruments merveilleux et la mesure pratique des angles et des arcs a pu prendre ainsi un caractère scientifique bien avant qu'il n'en soit de même pour les longueurs. Il était donc naturel et nécessaire que l'on traite en géométrie de la mesure des arcs et des angles; quant à la distance c'était

une notion première. On en parlait quand on l'utilisait, c'est-à-dire au moment du théorème de Thalès. Mais là se place le scandale de l'incommensurabilité; il fallait tourner la difficulté, éviter le nombre. C'est pourquoi on a parfois fait comme je disais tout à l'heure, posant une définition de ce que l'on appellera l'égalité ou l'inégalité de deux rapports par des moyens qui sont exactement ceux permettant de décider de l'égalité ou de l'inégalité de deux nombres déterminés chacun par une coupure; mais on a soin de ne pas s'en apercevoir et d'éviter de parler de ces nombres que l'on compare. Alors on prétend que l'on ne s'est pas occupé de nombres, qu'un rapport de longueurs est autre chose que le nombre qui le mesure. A moins qu'il ne s'agisse que de ceci: 4 peut aussi bien être un nombre de lapins qu'un rapport de deux longueurs et bien d'autres choses encore, je ne comprends, je l'ai déjà dit, ni la signification, ni l'intérêt de cette distinction. Je n'y peux voir que le souci d'écarter un mot et je pense à celui qui dirait: je n'ai pas besoin de la notion de chapeau pour parler de cette chose ronde que vous avez sur la tête, qui a un cuir à l'intérieur et un ruban à l'extérieur.

Je ne crains pas d'étaler mon incompréhension complète d'une distinction à laquelle certains tiennent fort et qui me paraît comique, car c'est en confrontant franchement nos mentalités que nous découvrirons les meilleurs moyens de nous comprendre et par suite d'enseigner.

20. — Si je ne discerne aucun des avantages du mode d'exposition que je viens de rappeler, je dois dire qu'il me paraît entièrement satisfaisant du point de vue logique et le théorème de Thalès sur l'égalité de deux rapports, qui ne sont pas des nombres, est rigoureusement prouvé. Mais quand, ayant une proportion entre distances, on a chassé les dénominateurs, on est passé brutalement à l'égalité de deux rapports qui sont des nombres. On commettrait donc une faute logique énorme si l'on ne faisait pas, tout au moins, un raccord entre les rapports nombres et ceux qui ne le sont pas. Cette faute, sous la forme crue où je viens de l'imaginer, est rarement commise; on en pourrait citer des exemples pourtant. Mais on la frôle souvent et on ne va pas jusqu'à la conclusion, qui pour moi s'impose, que le rapport ne

servant qu'en tant que nombre, c'est sous cette forme seule qu'il faut le considérer dans l'enseignement. Son autre forme, celle que je ne comprends pas, c'est celle d'entité métaphysique.

La faute n'était jamais commise autrefois où, de l'égalité $\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH}$ entre segments, on concluait l'égalité $AB.GH = CD.EF$ entre aires; ou du moins on aurait pu présenter alors le raisonnement de façon à ne la pas commettre. Mais on a renoncé à interpréter tout produit de nombres longueurs comme une aire, en appliquant le précepte de Descartes; il convient que nous l'appliquions aussi au rapport de deux nombres longueurs: Tous ces nombres, rapports, produits, etc., sont des nombres, rien de plus. Mais, bien entendu, comme je l'ai dit, quand on parle de 4 il faut savoir si 4 est un nombre de lapins, un rapport de longueurs, un produit de longueurs, etc.

Pour nous au reste, puisque, dans un chapitre préliminaire, nous avons défini la mesure de AB par rapport à l'unité CD, nous n'avons plus de définition à donner pour le rapport $\frac{AB}{CD}$. Ce rapport a été défini; c'est un nombre, et écrit dans le système décimal.

21. — Voyons donc comment se présenteront les démonstrations. On prouvera, à la façon ordinaire, le théorème géométrique de Thalès: des droites ou plans parallèles qui déterminent sur une sécante des segments égaux entre eux, déterminent sur toute autre sécante des segments égaux entre eux.

Ceci étant, soient des éléments parallèles déterminant sur une sécante les segments AB et CD et sur une autre A'B' et C'D'. On sait déjà que si AB est une, deux, trois, ... fois CD, A'B' est une, deux, trois ... fois C'D'; comparons plus généralement la mesure de AB avec l'unité $U = CD$ à la mesure de A'B' avec l'unité $U' = C'D'$.

D'après ce qui précède on obtient la même valeur approchée par défaut aux premiers stades des deux opérations de mesure, c'est-à-dire que les deux nombres mesures cherchés ont la même partie entière.

Pour les seconds stades, il faut utiliser des unités U_1 et U'_1 contenues respectivement dix fois dans U et U'. Or, si l'on

suppose U_1 porté dix fois sur AB et si par les 9 points de subdivision on mène des éléments parallèles à ceux donnés, ils divisent $A'B'$ en dix segments égaux entre eux donc à U'_1. Ainsi U_1 et U'_1 se correspondent par éléments parallèles comme U et U' et aux seconds stades des opérations de mesure, on obtient la même valeur approchée par défaut. En d'autres termes, le premier chiffre décimal est le même pour les deux nombres mesures cherchés. En continuant, on arrive donc à $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$.

La démonstration prend la forme la plus naturelle qu'on puisse, semble-t-il, souhaiter: on a à prouver que deux nombres sont égaux; ces deux nombres ont été définis chiffre par chiffre; on constate qu'ils sont identiques chiffre par chiffre en appliquant la définition.

Et le procédé de démonstration sera le même dans tous les cas.

S'agit-il de la proportionnalité des angles au centre et des arcs correspondants ? Après avoir expliqué les procédés de mesure des angles et des arcs [1], après avoir démontré qu'à des angles au centre égaux correspondent des arcs égaux, pour comparer $\frac{\widehat{AOB}}{\widehat{COD}}$ à $\frac{\widehat{AB}}{\widehat{CD}}$, on prendra $\widehat{COD}$ pour unité d'angle, $\widehat{CD}$ pour unité d'arc et l'on mesurera $\widehat{AOB}$ et $\widehat{AB}$. Les valeurs obtenues aux stades correspondants des deux opérations de mesure seront égales, d'où la conclusion.

---

[1] On utilisera encore la numération décimale, même s'il s'agit de degrés, minutes et secondes. On prendrait alors la seconde sexagésimale pour unité principale; les minutes et degrés n'étant que des groupes d'unités.

En ce qui concerne les angles et les arcs, la numération binaire serait à un certain égard plus indiquée; je m'explique.

Une opération de mesure suppose choisie l'unité U; elle postule l'existence des unités auxiliaires U_1, U_2, ... ($U = 10\,U_1$, $U_1 = 10\,U_2$, ...); elle ne prend un aspect un peu concret que si l'on sait construire U_1, U_2, ... J'ai passé outre à ces difficultés car, avec des élèves de Mathématiques, il importe peu d'admettre un axiome de plus ou de moins, on peut donc admettre l'existence des U_i et l'on peut aussi se passer de leur construction car il s'agit d'opérations conçues et non matériellement réalisées.

Si l'on avait eu d'autres exigences, il aurait fallu démontrer le théorème de Thalès sous la forme du texte (à des segments égaux sur une sécante correspondent par éléments parallèles des segments égaux sur une autre sécante), en déduire la construction de U_1 à partir de U (donc l'existence de U_1) et ce serait après cela seulement qu'on pourrait parler de mesure des longueurs.

Pour les angles (ou les arcs) connaissant U on ne sait pas construire U_1, mais on sait contruire v_1, v_2, ... ($U = 2v_1$, $v_1 = 2v_2$, ...) On pourrait donc résumer les opérations de comparaison d'un angle à U, v_1, v_2, ... par un symbole du système binaire. Or à tout symbole de ce système correspond un symbole du système décimal et inversement; U_1 sera donc déterminé par le symbole binaire 0, 000 1100 1100 1100 ... ; ce qui prouve son existence et en donne une construction théorique.

S'agit-il encore de comparer deux espaces parcourus AB, CD, dans un mouvement uniforme, aux temps employés à les parcourir, de l'instant τ_1 à l'instant τ_2, et de τ_3 à τ_4. Avec l'unité de longueur CD on mesurera AB, avec la durée (τ_3, τ_4) comme unité de temps on mesurera la durée (τ_1, τ_2); à chaque stade des opérations de mesure on aura les mêmes résultats d'où la proportionnalité des espaces aux temps.

22. — Dans la suite, on verra que j'utilise constamment des procédés analogues; pour le moment il convient de signaler une opposition, apparente, entre ces façons de faire et celles qui sont apparues dans l'enseignement du second livre de la géométrie, depuis une trentaine d'années, parce que celles-ci tendent à éviter le plus possible l'emploi du nombre.

Quand j'étais enfant, on démontrait qu'à des angles au centre égaux correspondaient des arcs égaux, on passait ensuite à la mesure des angles et des arcs, puis on légitimait des énoncés comme celui-ci: un angle inscrit a pour mesure la moitié de la mesure de l'arc compris entre ses côtés. Maintenant l'ordre des théorèmes et leur formulation sont modifiés. On justifie des énoncés tels que celui-ci: un angle inscrit est la moitié de l'angle au centre correspondant à l'arc intercepté entre les côtés de l'angle donné. On passe à la correspondance entre angles aux centres égaux et arcs égaux. Puis on arrive à la mesure des arcs et des angles.

L'origine de cette transformation est cette remarque, due je crois à M. Hadamard, qu'il n'y a pas plus lieu de faire intervenir des mesures dans les égalités d'angles ou d'arcs étudiés au second livre que dans les égalités de longueurs ou d'angles étudiés au premier livre de la géométrie. Remarque parfaitement exacte et qui vise à réduire les théorèmes à leur véritable contenu, à les démontrer en ne faisant appel qu'à ce qui est strictement indispensable. On a eu raison de corriger la maladresse de langage à cause de laquelle la notion de mesure avait l'air d'intervenir dans les énoncés et les démonstrations où elle n'intervient pas; mais le changement d'ordre ne s'imposait pas et bien des Professeurs ont conservé l'ordre ancien.

Ce changement d'ordre est même nettement mauvais, quand on

écrit, comme je l'ai vu faire: « Maintenant que nous avons vu que l'évaluation des angles inscrits, intérieurs ou extérieurs à une circonférence se déduit de l'évaluation d'angles au centre, nous allons étudier les angles au centre. » Cette transition, qui veut être habile et prétend être naturelle, va contre le bon sens. Les enfants connaissent le rapporteur pratiquement; c'est l'usage du rapporteur qu'on légitime dans ce chapitre. On montre qu'il conduit à la *mesure* des angles au centre, puis à la *mesure* d'autres angles; ce qui explique la forme ancienne, maladroite je le répète, des énoncés. Il est infiniment vraisemblable d'ailleurs qu'historiquement les savants antiques se sont trouvés dans une situation comparable à celle de nos élèves; l'emploi de graduations circulaires a dû précéder toute théorie et c'est la légitimation de cet emploi qui a dû conduire à la théorie de la mesure des divers angles. Quoi qu'il en soit, on voit que le nouvel ordre n'est pour rien dans le progrès réalisé, lequel tient uniquement aux modifications de la forme grammaticale des énoncés; car les démonstrations sont restées les mêmes que jadis. Nous ne perdrons rien de ce progrès puisque nous ne faisons intervenir le nombre dans sa généralité que là où il est indispensable — je l'ai dit et n'y reviens pas — dans la comparaison des arcs ou angles, entre eux.

La faute que l'on commettait consistait à faire intervenir le nombre, conçu dans toute sa généralité, là où le nombre entier suffisait; par exemple, pour évaluer le rapport d'un angle au centre à un angle inscrit correspondant, rapport égal à deux, on utilisait deux nombres généraux: les mesures des 2 angles avec une même unité arbitraire. Non seulement on remplaçait une opération de mesure par deux opérations de mesure, ce qui aurait été une maladresse plutôt qu'une faute, une simple inobservation du principe d'économie, mais ces opérations de mesure sont tout à fait différentes; la première est une opération finie, ne comportant qu'un stade, n'utilisant que la notion d'entier; les deux autres sont des opérations indéfinies, comportant une infinité de stades, nécessitant la notion du nombre le plus général.

23. — Le principe d'économie semblerait d'ailleurs toujours exiger que l'on évalue les rapports directement et non comme

quotients de mesures; pourtant, dans la pratique, on mesure toutes les longueurs en mètres, tous les angles en degrés, etc., c'est-à-dire qu'on emploie des unités auxiliaires et, semble-t-il, pour le seul désavantage d'avoir deux mesures à faire au lieu d'une.

C'est parfois à cause des difficultés expérimentales ou des impossibilités expérimentales que présenterait la confrontation directe des longueurs, ou angles, à comparer; mais c'est aussi pour une autre raison.

Dans une question de géométrie on a à comparer deux longueurs, par exemple, et ces deux là seulement. Au contraire quand, dans le pratique, on rencontre cent longueurs, on doit s'attendre à avoir à les comparer deux à deux de toutes les manières possibles; c'est donc une bonne règle de conduite, conforme au principe d'économie, que de mesurer chaque longueur nouvelle. Une seule mesure pour chaque longueur, faite avec la précision dont on dispose, donne au mieux les rapports de cette longueur à toute autre. Ainsi s'explique qu'en pratique les comparaisons ne soient jamais, ou presque jamais, faites directement mais par l'intermédiaire de comparaisons à une échelle étalon.

Il en va de même en géométrie; là, la précision doit être indéfinie, mais supposer qu'une longueur (L) a été mesurée c'est supposer, je l'ai dit, qu'on l'a comparée à un ensemble partout dense de longueurs l de sorte que la mesure détermine exactement tous les rapports $\frac{L}{l}$ et par suite aussi celui de L à toute autre longueur. Aussi toute comparaison se fait-elle par l'intermédiaire d'une échelle étalon; nous avons vu, par exemple, qu'on compare toutes les collections d'objets à une collection type, la moins intéressante de toutes semble-t-il puisqu'elle n'est qu'une collection de mots conventionnels; qu'on compare les distances à une échelle indéfiniment subdivisée en mètres, décimètres, etc.

Ce procédé se rencontrera constamment, je n'insisterai plus sur ce point.

A suivre.