Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 31 (1932)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LA MESURE DES GRANDEURS
Autor: Lebesgue, Henri
Kapitel: I. — Comparaison des collections; Nombres entiers.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-24619

perai des nombres entiers, puis des nombres en général indispensables pour les mesures de grandeur. Abordant ensuite mon sujet proprement dit, je m'occuperai des aires, des volumes puis des grandeurs en général.

I. — Comparaison des collections; Nombres entiers.

1. — Un tout jeune enfant, invité à prendre un bonbon et à en donner à ses deux sœurs, s'assurera d'abord de sa part, puis portera un bonbon à l'une de ses sœurs et reviendra en chercher un autre pour le porter à son tour. Plus âgé, il évitera ses allées et venues; il prendra les trois bonbons en disant: pour moi, pour Louise, pour Renée.

On imagine volontiers, et les constatations faites chez certaines peuplades primitives semblent confirmer cette hypothèse, que par un mécanisme analogue les hommes en sont arrivés, quand ils veulent comparer deux collections, à *compter;* c'est-à-dire à comparer les deux collections à une même collection type, la collection des mots d'une certaine phrase. Ces mots sont appelés des *nombres.* Pour compter ou dénombrer, on attache mentalement un objet différent de la collection envisagée à chacun des mots successifs de la phrase (ou suite) des nombres; le dernier nombre prononcé est le nombre de la collection.

Ce nombre est considéré comme le résultat de l'opération expérimentale de dénombrement parce qu'il en est le compe-rendu complet. Un résultat expérimental sert à dispenser d'autres expériences: les règles des quatre opérations nous dispensent des opérations de dénombrement pour certaines collections que l'on peut former à partir de collections déjà dénombrées.

A l'occasion de ces règles on constate divers faits que l'on énonce ordinairement comme théorèmes mais dont les prétendues démonstrations sont en réalité des vérifications expérimentales — par exemple, le théorème: un produit est indépendant de l'ordre des facteurs — lesquelles dérivent toutes de cette constatation générale: le nombre attaché à une collection ne dépend pas de l'ordre dans lequel on range, en les comptant, les objets de la collection.

2. — Il n'est peut-être pas inutile de souligner en quoi l'exposé que je viens de résumer diffère de ceux qu'on trouve dans les traités d'arithmétique [1]. J'ouvre celui de J. Tannery; certes, j'y vois décrite l'opération de dénombrement d'une collection, je lis des démonstrations qui se réduisent à des descriptions d'expériences, pourtant il semble bien que le nombre expérimental ne soit là qu'une utilisation, qu'une application d'une entité métaphysique dont le second alinéa du livre nous donne une sorte de définition: « L'idée de nombre entier résulte, par abstraction, de l'idée d'une collection d'objets distincts; elle est indépendante de la nature des objets..... ». On dit souvent « indépendante de la nature et de l'ordre de ces objets. »

On présente ainsi le nombre comme un être bien mystérieux mais, le plus souvent, on s'empresse d'ajouter que rien n'est plus clair et plus simple. « On a beaucoup discuté et l'on discutera longtemps encore », écrit P. Boutroux au § 2 des *Principes de l'Analyse mathématique*, « sur l'origine et la signification logique de la notion de nombre. Fort heureusement cette notion est de celles qui se passent de définitions et de commentaires. Depuis l'époque reculée où l'humanité a appris à compter, le nombre est devenu l'une des données fondamentales sur lesquelles travaille notre pensée, donnée si immédiate, si claire à l'intelligence, qu'en cherchant à l'analyser, nous ne réussirons tout d'abord qu'à l'obscurcir. C'est pourquoi l'Arithmétique a pu s'édifier sur des définitions verbales et incomplètes, et n'en être pas moins tenue dans tous les temps pour la science parfaite par excellence. »

Qu'on ait pu édifier l'Arithmétique s'explique, à mon avis, bien plus clairement qu'en disant, avec P. Boutroux, que c'est inexplicable; c'est parce que nous disposons d'une définition complète du nombre: la description de l'opération qui le fournit. A cette définition expérimentale les hommes s'étaient plus à ajouter une mystique et une métaphysique. L'enseignement ne s'occupe plus de la mystique; il reste neutre vis-à-vis d'elle, laissant chacun libre de considérer que le nombre 13, par exemple, lui est favorable ou néfaste; mais l'enseignement, par tradition,

[1] Je laisse de côté le fait que dans ces exposés le nombre apparait d'abord avec son sens cardinal alors que je pars du nombre ordinal; il ne devient cardinal qu'au moment où on affirme le résultat obtenu indépendant de l'ordre dans lequel on a compté les objets.

par respect, ou par peur d'être qualifié de primaire, fait état de la métaphysique. Seulement, il ne l'utilise pas; et c'est pourquoi il importe peu au succès de l'Arithmétique que les notions métaphysiques soient obscures. Ceci constaté, je salue bien bas la métaphysique, mais comme elle exigerait des loisirs et que c'est du travail que nous avons, je reste neutre vis-à-vis d'elle et je considère l'Arithmétique comme une science expérimentale au même titre que les autres.

3. — Mais que devient alors la « certitude mathématique », qui a fixé de tout temps l'attention des philosophes, s'il n'y a plus que des « mathématiques appliquées » ? Elle déchoit et n'est plus que la moins précaire de nos certitudes; l'Arithmétique, dont les hommes, dans leurs aspirations vers l'absolu, avaient fait « la science parfaite par excellence », n'est plus que la moins imparfaite de nos sciences. Elle est la science humainement parfaite, qui, pratiquement, ne nous trompe jamais; d'où lui vient cette supériorité ?

Et tout d'abord comment se fait-il que nous nous trompions si souvent alors que nous croyons appliquer un résultat expérimental ? C'est que les frontières d'un tel résultat ne sont jamais bien connues; quand nous disons: une baguette de verre, frottée, attire de petits morceaux de papier, ceci suppose remplies bien des conditions sous-entendues et mal connues. Il faudrait pouvoir préciser ce qu'on appelle du verre, du papier, ce qu'on appelle frotter, préciser les temps, les distances, les masses, et aussi les conditions atmosphériques, etc.

L'arithmétique, elle, n'utilise qu'un très petit nombre d'expériences, dont chacune a été répétée un nombre prodigieux de fois par chaque homme, depuis qu'il y a des hommes. Aussi nous savons, sans hésitation, dans quels cas l'arithmétique s'applique, dans quels cas elle ne s'applique pas. Dans ces derniers cas, l'idée d'appliquer l'arithmétique ne nous effleure pas un instant; nous ne pensons à appliquer l'arithmétique que lorsqu'elle s'applique, si bien que nous oublions qu'il y a des cas où elle ne s'applique pas: deux et deux font quatre, affirmons-nous. « Dans un verre je verse deux liquides, dans un autre deux liquides. Je verse le tout dans un vase, contiendra-t-il quatre liquides ? — C'est de la mauvaise foi, dites-vous, ce n'est pas une question d'arithmétique.

— Dans une cage je mets deux animaux, puis encore deux animaux; combien la cage contient-elle d'animaux ? — Votre mauvaise foi, dites-vous, est plus éclatante encore; cela dépend de l'espèce de ces animaux, l'un d'entre eux pourrait dévorer les autres; il faut aussi savoir si le décompte doit avoir lieu immédiatement ou dans un an, alors que des animaux pourraient être morts ou avoir eu des petits. En somme, vous parlez de collections desquelles on ne sait si elles sont immuables, si chaque objet y garde son individualité, s'il n'y a pas des objets qui apparaissent ou disparaissent.

— Qu'est-ce à dire, sinon que certaines conditions doivent être remplies pour que l'arithmétique s'applique ? Quant à la règle, pour reconnaître si elle s'applique, que vous venez de me donner, elle est certes excellente pratiquement, expérimentalement, mais elle n'a aucune valeur logique. Elle est l'aveu que l'arithmétique s'appliqué quand elle s'applique. Et c'est pourquoi on ne peut pas démontrer que deux et deux font quatre, ce qui est pourtant la vérité par excellence, car jamais nous ne nous trompons en l'utilisant. »

Dans les exposés purement logiques, où l'arithmétique s'occupe de symboles vidés de toute signification, c'est grâce seulement à un axiome que deux et deux font quatre. Je n'ai pas à parler ici de ce genre d'exposés, mais je puis bien dire que, si leur importance mathématique est considérable, s'ils nous ont beaucoup appris, ils me paraîtraient voués à un insuccès absolu si on voulait les considérer comme élucidant la notion de nombre sans faire appel à l'expérience. Dans ces jeux logiques il faut, en effet, manier des collections de symboles, réalisés ou pensés peu importe, et c'est alors qu'interviennent toutes nos connaissances, acquises grâce à l'expérience, relatives aux collections, c'est-à-dire aux nombres.

4. — La philosophie a tellement pesé sur l'enseignement des mathématiques que, pour éviter les malentendus, j'ai cru devoir donner ces explications qui m'ont écarté de mon objet uniquement pédagogique: J'y reviens en faisant remarquer que la

recommandation habituelle, « il ne faut pas confondre le nombre et le symbole qui le représente », n'a pour nous aucun sens. Dès lors, immédiatement après avoir expliqué ce que c'est que compter, il conviendrait de donner la suite des nombres c'est-à-dire d'exposer la numération décimale[1]. Peu importe qu'il y ait d'autres manières de nommer les nombres, cela ne doit pas plus nous arrêter que le fait que les mots sont différents en anglais et en français, ce qui n'est pas gênant parce qu'on peut traduire une langue en l'autre, et pourtant là la correspondance n'est pas entièrement déterminée. D'un système de numération à un autre, au contraire, la correspondance est de précision parfaite; il n'y a plus aucun inconvénient à se servir de l'un d'eux. Peu importe que, peut-être, les hommes auraient adopté le système de numération à base 11 s'ils avaient eu onze doigts; *nous avons la chance unique d'avoir à notre disposition une langue universelle, la numération décimale écrite, utilisons-la.*

En somme, je demande qu'on emploie dans les hautes classes de l'enseignement secondaire les mêmes procédés que dans les basses classes et dans l'enseignement primaire; procédés qu'actuellement on se croit tenu de renier, de mépriser. Entre autres avantages, ceci permettrait aux élèves de bien comprendre que le seul but de l'étude de l'arithmétique, faite à la fin de l'enseignement secondaire, est d'élucider complètement, jusqu'à la formulation nette, à la compréhension consciente, ce qui avait été jusque-là senti inconsciemment et sans l'analyser. Actuellement, seuls le comprennent quelques esprits très bien doués, véritables anormaux n'ayant besoin ni de soutien ni de guide et dont l'enseignement n'a pas à s'occuper; pour les autres, cette révision de l'arithmétique est une chose nouvelle, entièrement nouvelle, qu'on apprend pour les examens et qui n'a parfois que de vagues rapports avec les calculs effectifs.

5. — Que peut-on opposer au genre d'exposé proposé ici ? Avant tout nos habitudes métaphysiques: « N'est-ce pas un blasphème d'appeler symbole le nombre qui était jadis l'essence

---

[1] Ce que l'on peut faire sans employer les théorèmes sur les nombres. Qu'on remarque bien d'ailleurs que tous les peuples ou peuplades qui ont l'idée de nombre utilisent une numération décimale plus ou moins rudimentaire.

même des choses ? » voici la crainte qui se fait jour sous les formes les plus variées. Par exemple on dira: on peut certes employer indifféremment le mot anglais *chair* ou le mot français *chaise* parce qu'ils s'appliquent au même objet, quelle est l'analogue de l'objet chaise dans l'emploi des symboles 101 de la numération binaire et 5 de la numération décimale ? Comme il n'y a pas de chaise cachée sous 5, on pourra certes se tirer d'affaire par une pirouette verbale et parler de l'entité métaphysique 5 qui remplacera la réalité physique chaise; ce sera en somme refuser de répondre.

Pour répondre, il faut faire observer que, de langue à langue, la traduction ne se fait mot à mot que pour les substantifs à sens concret, dans les autres cas la traduction se fait de phrase à phrase. Ce n'est pas le mot nombre qu'il faut donc expliquer, mais les phrases où ce mot figure. Par exemple, celles-ci: deux collections ont le même nombre; deux collections n'ont pas le même nombre. Or, c'est précisément ce que l'on a expliqué dès le début en décrivant l'opération de dénombrement d'une collection; enlevant ainsi tout prétexte aux craintes métaphysiques.

En même temps, la description des dénombrements a montré que le choix de la suite des nombres (mots ou symboles) était d'importance théorique accessoire; ce n'est que le choix d'une langue parmi toutes celles qui existent ou qu'on peut imaginer. Mais on ne peut s'exprimer sans en choisir une.

Dans l'enseignement secondaire, où l'un des buts, sinon le but principal, est la légitimation des règles du calcul, je propose de choisir dès le début la numération décimale. Dans un enseignement supérieur, où l'on n'aurait plus à s'occuper des calculs effectifs, ce choix serait mauvais parce qu'alors l'étude de l'arithmétique serait faite en vue de généralisations diverses des opérations, mais non pas de la numération décimale qui, elle, n'a jamais pu être imitée. On se contenterait alors de numérations momentanées comme celles que l'on utilise quand on dit, par exemple, soient a, b, c trois nombres, d le produit de a par le quotient de b par c, ...

Si j'utilise constamment la numération décimale dans l'enseignement secondaire, c'est donc pour de simples raisons pédagogiques: pour une économie de temps, et parce que le nombre, écrit suivant la numération décimale, est un objet concret sur lequel de jeunes cerveaux raisonnent plus facilement. Mais je ne prétends pas du tout exagérer l'importance de cette numération [1]. Et, m'adressant à des élèves sortis de l'enseignement secondaire, j'adopterais volontiers, sans avoir le sentiment de me renier, quelque exposé plus abstrait: Les nombres sont des symboles entre lesquels on a établi deux modes de composition: l'addition et la multiplication... [2].

6. — Je m'excuse d'insister si longuement sur les nombres entiers, mais c'est pour moi l'occasion de bien expliquer mon attitude vis-à-vis de la métaphysique — que je m'efforce d'écarter de l'enseignement, dans la faible mesure permise par tout notre langage et toutes nos habitudes de pensée, laissant d'ailleurs chacun libre d'adjoindre métaphysique et mystique à l'enseignement reçu, — et d'expliquer l'emploi constant que je ferai de la numération décimale.

Cet emploi constant me paraît si naturel, si pédagogiquement indiqué, qu'il faut peut-être plutôt rechercher pourquoi d'ordinaire on se sert si peu de la numération décimale. C'est avant tout parce que les Grecs, nos modèles, ne s'en servaient pas. Ils ne le pouvaient, et à cause de la métaphysique, et surtout parce qu'ils n'avaient qu'une numération imparfaite; voisine de notre numération décimale, mais très bornée. Si bornée qu'Archimède doit la prolonger considérablement par les calculs de cet extraordinaire Arénaire, où l'on voit bien que l'absence d'une numération conçue indéfinie empêchait singulièrement de comprendre la portée exacte de la notion de nombre.

La notation décimale n'est pas un héritage des Grecs; cela a suffi pour que tout ce qui a trait à cette notation soit plaqué sur l'enseignement grec et non incorporé à lui. *Notre enseignement n'utilise pas encore pleinement ce fait historique, le plus important peut-être de l'histoire des sciences: l'invention de la numération décimale.*

---

[1] On pourra, par exemple, se reporter au § IV de la note finale de la 2[e] édition de mes *Leçons sur l'Intégration.*

[2] Au sujet de cet énoncé, je ferai remarquer que si c'est un blasphème que de faire déchoir le nombre du rang d'entité au rang de symbole, *c'est un blasphème que tous les mathématiciens profèrent.* On ne saurait donc le reprocher spécialement à l'exposé que je préconise.