Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 31 (1932)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR CERTAINES COURBES QUI GÉNÉRALISENT LES CONIQUES
Autor: Jonesco, D. V.
Kapitel: I.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-24613

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 14.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

SUR CERTAINES COURBES QUI GÉNÉRALISENT LES CONIQUES

PAR

M. D. V. JONESCO (Cluj).

Je me propose d'examiner quelques problèmes sur le mouvement d'un point qui ont pour trajectoires des courbes qui généralisent les coniques[1].

I.

Cherchons d'abord le mouvement d'un point M *dont la projection de la vitesse sur la perpendiculaire au rayon vecteur est égale à une constante* k, *et dont la projection sur une droite fixe* Δ, *est animée d'un mouvement uniforme de vitesse* a.

1. — En prenant la droite Δ comme axe des y, qu'on peut supposer passant par O, les équations du mouvement du point M sont

$$\frac{dy}{dt} = a \ , \qquad r\frac{d\theta}{dt} = k \ ,$$

r et θ étant les coordonnées polaires du point M.

L'équation différentielle de la trajectoire est

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{a}{k} r \ ;$$

---

[1] Voir aussi D. V. JONESCO, Certaines courbes qui généralisent les coniques. *C. R. de l'Académie des Sciences*, T. 194, 6 juin 1932, p. 2006.

en remplaçant dy en fonction des coordonnées polaires, on a l'équation différentielle

$$\frac{dr}{r} = \left(\frac{a}{k} - \cos\theta\right)\frac{d\theta}{\sin\theta},$$

dont l'intégrale générale est

$$r = \mathrm{A}\,\frac{\operatorname{tg}^{\frac{a}{k}}\frac{\theta}{2}}{\sin\theta}. \tag{1}$$

2. — Calculons maintenant l'accélération du point M, qui est parallèle à Ox, et a pour expression

$$\mathrm{J} = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Si dans les formules

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt}\cos\theta - r\sin\theta\frac{d\theta}{dt}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt}\sin\theta + r\cos\theta\frac{d\theta}{dt},$$

on remplace $\frac{dy}{dt}$ par a et $r\frac{d\theta}{dt}$ par k, on déduit

$$\frac{dr}{dt} = \frac{a - k\cos\theta}{\sin\theta}, \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{a\cos\theta - k}{\sin\theta}.$$

En dérivant la seconde de ces formules, on a

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{k\cos\theta - a}{\sin^2\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{k}{r}\,\frac{k\cos\theta - a}{\sin^2\theta}$$

et en remplaçant r par la formule (1), on déduit

$$\mathrm{J} = \frac{k}{\mathrm{A}}\,\frac{k\cos\theta - a}{\sin\theta}\operatorname{cotg}^{\frac{a}{k}}\frac{\theta}{2}, \tag{2}$$

formule qu'on peut encore écrire sous la forme

$$\mathrm{J} = -\frac{k^2}{\mathrm{A}}\operatorname{cotg}^{\frac{a}{k}-1}\frac{\theta}{2} + \frac{k(k-a)}{\mathrm{A}}\,\frac{\operatorname{cotg}^{\frac{a}{k}}\frac{\theta}{2}}{\sin\theta}. \tag{2'}$$

3. — Traitons maintenant un cas particulier. Supposons $k = a$. La formule (1) montre que l'équation de la trajectoire est

$$r = A \frac{\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\sin \theta} = \frac{A}{1 - \cos \theta},$$

et par suite la trajectoire est une parabole ayant son foyer à l'origine.

La formule (2′) montre que dans ce cas le mobile M décrit la parabole avec une accélération constante et égale à $-\frac{k^2}{A}$.

On connaît la propriété que lorsqu'un point M décrit une parabole avec une accélération constante, parallèle à son axe, la vitesse angulaire du rayon vecteur FM, F étant le foyer de la parabole, est inversement proportionnelle à la distance FM.

Le problème que nous avons traité dans ce paragraphe n'est que la réciproque de cette propriété. En général, la trajectoire que donne la réciproque de cette propriété, est donnée par l'équation (1). Seulement dans le cas $a = k$, cette trajectoire est une parabole. A ce point de vue la courbe représentée par l'équation (1) est une généralisation de la parabole.

4. — Mais les courbes représentées par l'équation (1), jouissent encore d'une propriété géométrique qui montre qu'on peut encore regarder ces courbes comme généralisant la parabole, aussi à un autre point de vue.

Calculons l'angle V que fait la tangente en M à la courbe (1) avec le rayon vecteur OM. On sait que

$$\operatorname{cotg} V = \frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta}.$$

De l'équation (1) on déduit que

$$\frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta} = \left(\frac{a}{k} - \cos \theta\right) \frac{\operatorname{cotg} \frac{\theta}{2}}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{\frac{a}{k} - \cos}{\sin \theta}.$$

On a donc la formule

$$\operatorname{cotg} V = \frac{\frac{a}{k} - \cos \theta}{\sin \theta},$$

qu'on peut encore écrire

$$\frac{\sin V}{k} = \frac{\sin (V + \theta)}{a}. \tag{3}$$

Nous allons interpréter cette formule. Soit Q le point où la tangente en M à la courbe rencontre Ox. Dans le triangle OMQ nous avons

$$\frac{OQ}{\sin V} = \frac{OM}{\sin (V + \theta)}$$

et en tenant compte de la formule (3), nous avons

$$OQ = \frac{k}{a} OM. \tag{4}$$

Cette formule montre que les courbes représentées par l'équation (1) ont la propriété que *la distance du point* O, *au point ou la tangente en* M *rencontre l'axe* Ox, *est proportionnelle au rayon vecteur* OM.

Pour les paraboles de foyer O et d'axe Ox, on a OQ = OM. Les courbes représentées par l'équation (1) généralisent donc cette propriété de la parabole.

On démontre aisément que cette propriété est caractéristique pour les courbes représentées par l'équation (1).

II.

Cherchons maintenant le mouvement d'un point M *dont la projection de la vitesse sur la perpendiculaire au rayon vecteur* OM *est égale à une constante* k, *et dont le mouvement se fait suivant la loi des aires par rapport au point* P.

5. — En prenant la droite OP comme axe des x, et en désignant par c l'abscisse de P par rapport à l'origine O, les équations qui