Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 31 (1932)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Buchbesprechung: A. E. Ingham. — The Distribution of Prime Numbers. (Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physies, No. 30). — Un vol. in-8° de viii-114 pages. Prix: 7s. 6d net. Cambridge University Press. Londres, 1932.

Autor: Buhl, A.

Oswald VEBLEN and J. H. C. WHITEHEAD. — **The Foundations of Differential Geometry.** (Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 29). — Un vol. in-8° de x-98 pages. Prix: 6*s*. 6*d*. net. Cambridge University Press. Londres, 1932.

Maintenant, difficultés moyennes, bien que les auteurs voient en ce tract comme une suite du n° 24: *Invariants of Quadratic Differential Forms.* Et encore, est-ce bien une suite ? Non. C'est un « companion ». Le problème essentiel ici traité est: Choisir un système de coordonnées tel que...; il est permis d'avoir une *préférence* parmi divers systèmes *admissibles*, mais quant à faire de l'espace quelque notion première extérieure à nous et qui imposerait une géométrie, quelle baliverne ! Il semble que l'esprit du livre serait encore mieux respecté si le mot « Geometry » du titre était mis au pluriel. Mais peu importe.

On commence toujours par les transformations linéaires et les matrices; les conceptions quadratiques apparaissent avec la *distance*. Les géométries les plus importantes sont groupales; elles se précisent en devenant coordonnées ou, plus exactement, les groupes les fondent et les coordonnées leur donnent le maximum de maniabilité. Sur ce, quelques pages remarquables qui partent de Riemann, de Klein et du Programme d'Erlangen, pour aboutir à Cartan et à Schouten. Les coordonnées permises, admissibles, ne vont point sans considérations fonctionnelles qui peuvent ne jouer qu'en certaines *cellules* ou sur certaines *variétés* ou encore de cellule à cellule, de variété à variété. Les *fonctions de points* ou *scalaires* sont précisément ce qui donne une réalité au point.

Le procédé qui s'est révélé le plus puissant, quant à l'analyse élémentaire de toutes ces notions est, très probablement, celui qui consiste à procéder, de proche en proche, par variétés tangentes; sa forme mathématique est celle du Calcul différentiel absolu.

La structure de l'étendue, au fond, est toujours dans la dépendance du Nombre. On pourrait encore rappeler ici la phrase de Kronecker citée plus haut à propos des Œuvres de M. Hilbert. Pratiquement, tenus comme nous le sommes de sérier les questions, il nous faut faire de l'Arithmétique, de l'Analysis Situs, du Calcul infinitésimal, des Groupes, ... et, avec cela, satisfaire notre intuition tout en nous habituant à l'élargir beaucoup. Le résultat de ces efforts peut donner une sensation géométrique de grande envergure; c'est ainsi, du moins, que naissent les Espaces.

A. BUHL (Toulouse).

A. E. INGHAM. — **The Distribution of Prime Numbers.** (Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 30). — Un vol. in-8° de VIII-114 pages. Prix: 7*s*. 6*d*. net. Cambridge University Press. Londres, 1932.

Nous retombons dans les difficultés, mais combien tentantes pour peu qu'on les aime. Et ce petit volume est encore un « companion » pour celui publié, dans les mêmes *Tracts*, sous le n° 26, par le Prof. E. C. Titchmarsh, sur « The Zeta-function of Riemann ». Voir *L'Enseignement mathématique*, t. 29, 1930, p. 355.

Le présent exposé devrait plutôt être étudié avant celui du Prof. Titchmarsh; il serait plus élémentaire ou, du moins, n'introduirait la fonction

Zeta qu'après avoir dûment expliqué comment la question des nombres premiers conduit à cette fonction.

La question remonte à Euclide qui prouva que les nombres premiers formaient une suite illimitée. Elle intéressa Euler, Tchebychef à peu près en même temps que Riemann, puis la Vallée-Poussin, Hadamard, Littlewood. La comparaison entre $\pi(x)$, nombre des nombres premiers contenus dans les x premiers entiers, et li x est vraiment étonnante, encore qu'il ne s'agisse que d'un résultat approché. Quant à la fonction Zeta, elle peut apparaître très simplement après un théorème d'Euler bâti lui-même sur la propriété fonctionnelle $f(m)\, f(n) = f(mn)$. Elle admet une célèbre équation fonctionnelle dépendant d'un cosinus et de la fonction Γ. Il y a là des considérations à la Cauchy, des emplois de lacets, puis des recours à la théorie des fonctions entières qui ne semblent pas inférieurs à ce que donnent les plus modernes travaux concernant ces fonctions. De nombreuses transcendantes associées ont de curieuses représentations intégrales, notamment par intégrales définies qui deviennent ainsi comme des centres d'investigations analytiques profondes faites pour des raisons arithmétiques initiales qu'on ne perd jamais de vue. C'est dans un ordre d'idées analogue qu'interviennent les séries et les intégrales de Dirichlet.

Citons encore Landau, Bachmann, Maillet, Hardy, Riesz, H. Bohr, et comme auteurs de travaux tout-à-fait récents, R.-J. Backlund, Breusch, Cramer, Hoheisel, Ikehara, Karamata, Mordell, Pólya, Schnirelmann, Schur, Siegel, Wiener. C'est encore une liste qui n'est pas très française et cependant M. Jacques Hadamard avait magnifiquement ouvert le chemin.

A. Buhl (Toulouse).

Gaston Julia. — **Exercices d'Analyse.** Tome II. Fonctions analytiques. Développements en série. Résidus. Transformations analytiques. Représentation conforme. — Un vol. gr. in-8° de IV-344 pages et 86 figures. Prix: 70 francs. Gauthier-Villars et Cie. Paris, 1933.

Le tome premier de ces *Exercices* a déjà été analysé, ici-même, par M. Fehr (t. 27, 1928, p. 346). C'est toujours le même esprit, profond et original, apprenant beaucoup de choses, d'allure moderne, d'abord à propos de classiques énoncés de licence ou d'agrégation. Les questions plus ardues, professées dans les livres de M. Goursat et de M. Hadamard, élèvent bientôt le niveau. Les exercices ajoutés par M. Painlevé au *Recueil* de Tisserand, se trouvent eux-mêmes prolongés ainsi que bien des choses exposées sommairement par M. Emile Picard dans son prodigieux *Traité d'Analyse*. Telle est, par exemple, la conception des fonctions analytiques sur une surface, d'après Beltrami.

La représentation conforme, annoncée en dernier lieu parmi les sous-titres du volume, intervient élégamment dès les premières pages. Il s'agit même de ce que M. Carathéodory appelle « transformation de Möbius » dans sa *Conformal Representation* (voir plus haut). C'est l'homographie à variable imaginaire avec toutes ses belles conséquences non-euclidiennes. Je ne cite pas M. Carathéodory au hasard. Je crois que la comparaison des deux ouvrages serait des plus suggestives. Mais je crois aussi que des élèves français, qui jugeraient incommode ou trop onéreux de se documenter ainsi, trouveront auprès de M. Julia une érudition valant celle des meilleurs ouvrages étrangers. D'ailleurs, dans le chapitre suivant, M. Julia établit