

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 30 (1931)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR CERTAINS VOLUMES ALGÉBRIQUES  
**Autor:** Papillon, Pierre  
**Kapitel:** 1. Volumes a parois cylindriques.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-23889>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# SUR CERTAINS VOLUMES ALGÉBRIQUES

PAR

Pierre PAPILLON, Prof. au Lycée (Mulhouse).

§ 1. — A diverses reprises<sup>1</sup>, G. HUMBERT appliquait à la Géométrie le théorème d'Abel, calculant, entre temps<sup>2</sup>, quelques aires sphériques; vingt ans après<sup>3</sup>, M. A. BUHL était amené à reprendre ces questions et les complétait par de fort intéressantes recherches sur les volumes.

Nous nous proposons d'étudier systématiquement ces sommes abéliennes de volumes à parois latérales cylindriques, coniques ou conoïdales; de curieuses associations se découvrent ainsi entre la sphère, par exemple, et des surfaces d'apparences très différentes, voire même entre des courbes planes.

Nombreux sont les développements auxquels se prêtent les formules générales; mais peut-être serait-il fastidieux, et partant maladroit, d'en user indéfiniment.

## 1. VOLUMES A PAROIS CYLINDRIQUES.

§ 2. — *Expression générale.* — Une cloison  $\sigma$  étant prise sur une surface ( $s$ ), un cylindre de base  $\sigma$  découpe sur une surface algébrique ( $S$ ), sans relation nécessaire avec ( $s$ ), un certain nombre de plages  $\Sigma_i$  qui limitent, avec un plan de section droite ( $P$ ), autant de volumes  $V_i$ ; proposons-nous d'évaluer la somme  $\Sigma V_i$ .

<sup>1</sup> *Journal de Mathématiques*, 4<sup>me</sup> série: tomes III (1887), V (1889) et VI (1890).

<sup>2</sup> 1888.

<sup>3</sup> *Annales de la Faculté de Toulouse*, 3<sup>me</sup> série: tomes II, VI et VII.

Soient  $\mu, M_i, m$  les points de (P),  $\Sigma_i$  et  $\sigma$  sur une même normale au plan de base,

$$\varrho_i = \frac{\overline{PM}_i}{\overline{Pm}} ,$$

$\alpha, \beta, \gamma$  les cosinus directeurs de la normale en  $m$  à (s), enfin

$$F(X, Y, Z) = 0$$

l'équation, algébrique, de (S).

1. Rapportons l'espace à un trièdre trirectangle dont la face  $xOy$  coïncide avec (P).

Il est évident que

$$\Sigma V_i = \iint_{\sigma} (\Sigma Z_i) \gamma d\sigma ,$$

avec,  $(x, y, z)$  désignant les coordonnées de  $m$ ,

$$Z_i = \varrho_i \cdot z ,$$

$$F(x, y, \varrho_i z) = 0 .$$

Bref

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma V_i = \iint_{\sigma} (\Sigma \varrho_i) z \gamma d\sigma , \\ \text{avec} \\ F(x, y, \varrho_i z) = 0 . \end{array} \right.$$

Si l'on ordonne d'ailleurs le polynôme entier  $F$  par rapport aux puissances décroissantes de  $Z$ ,

$$F \equiv Z^p \varphi(X, Y) + Z^{p-1} \psi(X, Y) + Z^{p-2} \Theta(X, Y) + \dots$$

il vient

$$\Sigma V_i = \iint_{\sigma} -\frac{\psi(x, y)}{\varphi(x, y)} \gamma d\sigma$$

(1)

2. Dans le cas général où le plan (P) admet pour équation

$$\lambda X + \mu Y + \nu Z - d = 0 ,$$

$\lambda, \mu, \nu$ , désignant des cosinus directeurs,

$$\begin{aligned} V_i &= \iint_{\sigma} \overline{PM}_i (\lambda \alpha + \mu \beta + \nu \gamma) d\sigma, \\ &= \iint_{\sigma} \varphi_i \cdot \overline{Pm} (\lambda \alpha + \mu \beta + \nu \gamma) d\sigma. \end{aligned}$$

Or

$$\overline{Pm} = \lambda x + \mu y + \nu z - d$$

et

$$X_i = x + \lambda (\varphi_i - 1) (\lambda x + \mu y + \nu z - d),$$

$$Y_i = y + \mu (\dots) (\dots) \dots,$$

$$Z_i = z + \nu (\dots) (\dots) \dots,$$

$$F(X_i, Y_i, Z_i) = 0.$$

Bref

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma V_i = \iint_{\sigma} (\Sigma \varphi_i) (\lambda x + \mu y + \nu z - d) (\lambda \alpha + \mu \beta + \nu \gamma) d\sigma \\ \text{avec} \\ F(x + \lambda \dots, y + \mu \dots, z + \nu \dots) = 0 \end{array} \right. \quad (2)$$

§ 3. — Reprenons l'expression (1). Les cloisons  $\Sigma_i$  étant au nombre de  $p$ , si  $\sigma$  se trouve située sur la surface  $(s_0)$  d'équation

$$-\frac{\psi(x, y)}{p \varphi(x, y)} = z,$$

ou

$$pz\varphi(x, y) + \psi(x, y) = 0,$$

il vient

$$\begin{aligned} \Sigma V_i &= \iint_{\sigma} p z \gamma d\sigma \\ &= p \iint_{\sigma} z \gamma d\sigma; \end{aligned}$$

les volumes  $V_i$  ont donc pour moyenne arithmétique le volume cylindrique de même nature que limite la cloison  $\sigma$ .

A (S) se trouve donc associée la surface  $(s_0)$  particulière : lieu du point de coordonnées  $(x, y, \frac{\Sigma Z_i}{p})$ , c'est-à-dire du barycentre des points  $M_i$  isomassifs — centre des moyennes distances —; c'est la surface conjuguée de la direction  $z'z$  relative à la surface donnée. De là ce théorème qui lie simplement celui d'Abel à la théorie des polaires :

*Les volumes que détermine un cylindre sur une surface algébrique ont pour moyenne arithmétique celui que ce même cylindre découpe sur la surface conjuguée de la direction des génératrices relativement à la surface donnée.*

Lorsqu'en particulier le coefficient  $\psi(x, y)$  est nul — il en est ainsi, en particulier, quand  $xOy$  est un plan de symétrie pour (S) — la somme abélienne l'est également : la surface conjuguée est le plan  $xOy$ .

Plus généralement, si

$$\frac{\psi}{\varphi} = \frac{ax + by - h}{c}$$

la surface conjuguée est plane et le volume moyen est celui d'un tronc cylindrique élémentaire ; les surfaces (S) ont pour équation

$$Z^p (aX + bY + cZ - h) \varphi(X, Y) + Z^{p-2} \Theta(X, Y) + \dots = 0.$$

§ 4. — *Cas des quadriques.* — Si, dans l'équation précédente,  $p = 2$ , nous obtenons pour surfaces (S) les quadriques ; directement, à l'aide de

$$AX^2 + \dots + 2BXY + \dots + 2CX + \dots + D = 0,$$

il vient

$$\begin{aligned} \varphi &\equiv A'' , \\ \psi &\equiv 2(B'x + By + C'') : \end{aligned}$$

l'équation de  $(s_0)$ ,

$$B'x + By + A''z + C'' = 0,$$

est celle du plan diamétral conjugué de la direction  $z'z$  :

*Les volumes que détermine un cylindre sur une quadrique ont pour moyenne arithmétique celui que ce même cylindre découpe sur le plan diamétral conjugué de la direction des génératrices.*

§ 5. — *Cas des cyclides.* — Prenons les cyclides d'équation

$$(X^2 + Y^2 + Z^2)^2 - 4h(AX^2 + BY^2 + CZ^2) - 4k^2(ax + by + cz) \pm l^4 = 0.$$

Pour utiliser l'expression (2), formons l'équation en  $\rho$

$$\rho^4(\lambda x + \mu y + \nu z - d) + 4d\rho(\lambda x + \dots - d)^3 + \dots,$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \Sigma V_i &= 4 \int \int -d(\lambda x + \mu \beta + \nu \gamma) d\sigma; \\ &= -4d \int \int (\lambda x + \mu \beta + \nu \gamma) d\sigma; \end{aligned}$$

le volume moyen est celui que le même cylindre découpe sur le plan de base et le plan parallèle mené par l'origine. Ce résultat remarquable est celui que donnerait une sphère centrée à cette origine.

§ 6. — Il est immédiat de constater que la surface ( $s_0$ ) ne dépend pas du plan (P): lui substituer, en effet, un plan (P') revient à ajouter ou à retrancher à  $V_i$  le volume d'un tronc cylindrique, donc à la moyenne  $\frac{\Sigma V_i}{p}$  ce même volume.

§ 7. — *Noyau cylindrique.* — Analogue à la question des sommes abéliennes est celle des noyaux cylindriques, relative aux surfaces (S)

$$Z^2\varphi(X, Y) + Z\psi(X, Y) + \Theta(X, Y) = 0.$$

Le volume de ce noyau, dont les génératrices sont parallèles à  $z'z$ , a pour expression

$$N = \int \int |\varphi_2 - \varphi_1| z\gamma d\sigma.$$

Et comme

$$|\varphi_2 - \varphi_1| = \sqrt{\left(\frac{z\psi}{z^2\varphi}\right)^2 - 4 \cdot \frac{\Theta}{z^2\varphi}},$$

il vient

$$N = \iint_{\sigma} \frac{\sqrt{\psi^2 - 4\varphi\Theta}}{\varphi} \gamma \, d\sigma \quad (3)$$

Si l'on trace  $\sigma$  sur la surface  $(s_1)$  d'équation

$$\frac{\sqrt{\psi^2 - 4\varphi\Theta}}{\varphi} = z \ ,$$

ou

$$z^2\varphi^2(x, y) + 4\varphi\cdot\Theta - \psi^2 = 0 \ ,$$

le volume du noyau est celui du cylindre de même nature que limite  $(s_1)$ . Ici (P) ne joue aucun rôle.

Considérons alors une quadrique à centre ; rapportons-là au diamètre parallèle aux génératrices du cylindre et au plan conjugué <sup>1</sup>, en sorte que son équation s'écrive

$$AX^2 + A'Y^2 + A''Z^2 + \varepsilon = 0 \quad (\varepsilon = \pm 1) \ .$$

Ici

$$\varphi \equiv A'' \ , \quad \psi \equiv 0 \ ,$$

$$\Theta \equiv Ax^2 + A'y^2 + \varepsilon \ ,$$

et  $(s_1)$  a pour équation

$$z^2 \cdot A''^2 + 4A''(Ax^2 + A'y^2 + \varepsilon) = 0 \ ,$$

ou

$$Ax^2 + A'y^2 + \frac{A''}{4}z^2 \frac{A''}{4}z^2 + \varepsilon = 0 \ ;$$

c'est la transformée de la quadrique (S) par la dilatation  $\mathcal{D}(xOy, z'z, 2)$ .

En particulier, à la sphère

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = R^2$$

correspond l'ellipsoïde de révolution allongé

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} + \frac{z^2}{4R^2} - 1 = 0 \ .$$

<sup>1</sup> Les axes de coordonnées ne sont plus rectangulaires ; mais les intégrales donnent des expressions proportionnelles aux volumes.