Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 30 (1931)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Buchbesprechung: Gerhard Kowalewski. — Vorlesungen über allgemeine natürliche Geometrie und Liesehe Transformationsgruppen (Göschens Lehrbücherei, I. Gruppe, Reine und angewandte Mathematik. Band 19). — Un vol. grand in-8° de 280 pages et 16 figures. Prix: broché, RM. 15,50; relié, RM. 17. Walter de Gruyter & Co. Berlin W 10 et Leipzig. 1931.

Autor: Buhl, A.

du livre; toutefois les idées simples n'en sont pas moins faciles à dégager.

Le Chapitre III traite des noyaux symétriques. On se dirige encore vers bien des choses, notamment vers des extensions de l'analyse des formes quadratiques et vers les représentations factorielles des fonctions entières, ce dernier point relevant des questions paramétriques.

Enfin le Chapitre IV se rapporte à quelques applications telles les vibrations transversales des cordes et le problème aux limites relatif aux fonctions harmoniques. Il vaut mieux que celui-ci soit bref. On cherche des applications dans les ouvrages consacrés à la Physique; il ne faut admirer ici qu'une trame mathématique fondamentale très élégamment isolée en une étude propre.

A. Buhl (Toulouse).

Gerhard Kowalewski. — **Vorlesungen über allgemeine natürliche Geometrie und Liesche Transformationsgruppen** (Göschens Lehrbücherei, I. Gruppe, Reine und angewandte Mathematik. Band 19). — Un vol. grand in-8° de 280 pages et 16 figures. Prix: broché, RM. 15,50; relié, RM. 17. Walter de Gruyter & Co. Berlin W 10 et Leipzig. 1931.

Ce livre, dû au même auteur que le précédent, n'obéit certes pas à des préoccupations moins élégantes. Il est dédié à Georg Pick présenté comme fondateur de la Géométrie naturelle. Cette dédicace peut occasionner un léger sursaut. Ne va-t-on pas oublier Cesàro ? Mais les premières pages sont pleinement rassurantes. L'œuvre de Cesàro est admirablement mise en lumière et sert de point de départ pour toutes généralisations. Cesàro prématurément disparu, dans un atroce accident de bains de mer qui coûta également la vie à l'un de ses fils (voir *L'Enseignement mathématique* t. VIII, 1906, p. 485 et, avec portrait de Cesàro, t. IX, 1907, p. 5), était loin d'avoir fourni sa mesure; il devait avoir des disciples et un volume comme celui d'aujourd'hui constitue forcément un monument élevé à son souvenir.

La Géométrie naturelle de Cesàro commence par celle des courbes planes définies en coordonnées intrinsèques ρ et s (ρ rayon de courbure, s arc). Or il se trouve que les courbes qui sont ainsi le plus simplement définies (cercle, droite, spirale logarithmique, chaînette, épicycloïdes, clothoïde, courbes de Ribaucour, développées et développantes diverses, etc., etc...) sont particulièrement riches en propriétés cinématiques; c'est dire qu'elles sont en relation particulièrement remarquable avec le *groupe des déplacements*. D'autre part Cesàro aimait l'image du petit bateau parcourant ces courbes, assimilées à d'étroits cours d'eau, et portant un observateur qui, dans cet état de mouvement, devait juger de la géométrie de la courbe et de celle du paysage. On dirait aujourd'hui que cet observateur fait de la géométrie relativiste. On pressent déjà quelles ouvertures peuvent naître d'un point de départ qui, à coup sûr, était d'une excessive simplicité ! Telles sont les premières idées à dégager du Chapitre I du présent exposé.

Le Chapitre II étend les précédentes considérations aux courbes gauches libres ou tracées sur des surfaces. Le petit bateau est remplacé par un insecte qui grimpe le long de ces lignes. On a ainsi une géométrie spatiale, avec courbure et torsion, précieuse notamment quant à l'étude des hélices et à nombre de généralisations considérées par Gaston Darboux.

Au Chapitre III, on commence à voir comment Georg Pick généralisa Cesàro en se dirigeant même vers les idées de M. Elie Cartan, d'après lesquelles la véritable géométrie d'un groupe est plutôt dans le jeu des paramètres qu'il contient que dans celui des variables transformées. Il s'agit de *prolonger* un groupe, à r paramètres, de manière à ce que ceux-ci et, en somme, toute la géométrie du groupe ne puissent plus dépendre que de paramètres essentiels e et e'. Si ces derniers sont précisément en nombre deux, la géométrie du groupe est analogue à celle d'une variété à deux dimensions. Les opérations de prolongement ont introduit, en celle-ci, des expressions différentielles comparables à la courbure ou à la torsion. On étudie bien *intrinséquement* le pouvoir transformateur du groupe indépendamment de tel ou tel assemblage d'éléments transformés. Il est extrêmement curieux de constater que cette géométrie intrinsèque, de Cesàro, Pick et Cartan, contient des développements fort analogues à ceux de la géométrie cinématique. Elle contient des *roulettes*, des *clothoïdes* attachécs à la fonction gamma comme la clothoïde ordinaire est attachée aux intégrales de Fresnel; son analyse est naturellement plus élevée et exige souvent des fonctions elliptiques là où la question correspondante de géométrie ordinaire s'accomode de fonctions élémentaires.

Un quatrième Chapitre nous montre que ces si curieuses considérations peuvent s'étendre à l'espace à trois dimensions. C'était à prévoir. Elles s'étendent même aux hyperespaces. A signaler particulièrement ici la théorie des « Soma » liée au nom de Study; ce sont des configurations de droites et de plans déterminables par des constantes en nombre fixé.

Le cinquième et dernier Chapitre arrive aux considérations générales de la Théorie des groupes, notamment quant à la détermination de toutes espèces d'invariants différentiels. Il s'agit, on le voit, d'un nouvel esprit de pénétration géométrique en cette Théorie des groupes jugée parfois abstruse par des mathématiciens qui ne manquent cependant ni de valeur ni de finesse d'esprit. Désormais la valeur et la finesse d'esprit ne pourront manquer d'apprécier des exposés tels que celui de M. Gerhard Kowalewski.

A. Buhl (Toulouse).

Kurt Reidemester. — **Vorlesungen über Grundlagen der Geometrie** (Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band XXXII). — Un volume grand in-8° de x-147 pages et 37 figures. Prix: broché, RM.11, relié, RM. 12,60. Julius Springer, Berlin. 1930.

Ce volume pourrait être logiquement placé avec ceux qui, plus haut, s'occupent de Topologie. On y remarque encore que la Géométrie traduit toujours des propositions d'Analyse alors que l'inverse n'est pas vrai. Le présent exposé se propose de discriminer, en les généralités analytiques, ce qui contribue effectivement, à la constitution de la Géométrie, notamment de la géométrie euclidienne. Les idées du fameux programme d'Erlangen, de Félix Klein, sont entièrement respectées. Au concept de construction analytique s'ajoute celui de construction axiomatique. L'idée de groupe est fondamentale et, au point de vue logique, on retrouve promptement des notions, telles celles de coordonnées *naturelles*, qui semblent être les mêmes que celles déjà décrites, à propos de l'ouvrage précédent de M. Gerhard Kowalewski; mais ici on ne recherche plus l'image ni même le calcul. Le lecteur doit être accessible aux pensées abstraites (für abstrakte Gedanken zugänglich sein) comme il est dit à la fin de la Préface.

L'une des premières choses à faire est d'examiner les fondements de