

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 30 (1931)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** APPLICATION A LA REPRÉSENTATION CONFORME DES TRANSFORMATIONS A VARIABLES SÉPARÉES

**Autor:** Delens, P. C.

**Kapitel:** X. Invariants des formes et équations quadratiques.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-23887>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 13.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

D'autre part, dans (111), si  $\chi$  a même covariant bilinéaire que  $\omega_{12}$

$$\gamma' = \omega'_{12} \equiv -K[\omega_1 \omega_2] \quad \text{ou} \quad \operatorname{div} \mathbf{w} = \operatorname{div} \mathbf{g} \equiv K \quad (113)$$

$K$  étant la courbure totale du  $ds^2$ , on a

$$\chi = \omega_{12} + d\Psi$$

et l'équation du réseau cerclé se réduit à

$$\frac{d(\Phi - \Psi)}{ds} = 0 \quad \text{ou} \quad ds^2 \cdot d(\Phi - \Psi) = 0 ; \quad (114)$$

par suite ce réseau est alors un réseau *angulaire* (celui défini par les lignes coordonnées dans le cas  $\Psi = \text{const.}$ ); cette forme de l'équation suffit à montrer que la condition (113) est invariante par transformation conforme. On peut évidemment établir une classification des réseaux cerclés au point de vue des transformations conformes superficielles, mais la théorie de ces réseaux peut aussi se baser sur la géométrie conforme spatiale (géométrie des sphères), ce qui en facilite l'étude; aussi nous ne donnons pas d'autres applications<sup>1</sup>.

## X. INVARIANTS DES FORMES ET ÉQUATIONS QUADRATIQUES.

34. Soit une forme quadratique

$$\alpha^{(2)} = L du^2 + 2M du dv + N dv^2 \quad (115)$$

qu'on peut considérer comme décomposable d'une infinité de façons en un produit de deux formes linéaires

$$\varpi_1 = x(A_1 du + B_1 dv) \quad \varpi_2 = \frac{1}{x} (A_2 du + B_2 dv)$$

$x$  étant un facteur arbitraire,  $A_1, B_1, A_2, B_2$  solutions des équations

$$A_1 A_2 = L \quad A_1 B_2 + A_2 B_1 = 2M \quad B_1 B_2 = N .$$

Nous avons indiqué (*Equivalences*) la formation régulière des invariants de la forme  $\alpha^{(2)}$  et les relations de ceux-ci avec les invariants des formes  $\varpi_1$  et  $\varpi_2$ , et nous avons vu alors qu'on se trouvait amené, en posant

$$L = A^2 \quad N = B^2 \quad (116)$$

<sup>1</sup> Il est, d'autre part, intéressant de rapprocher cette théorie de celle des changements de connexion (avec torsion) des surfaces. Cf. *Thèse, Note terminale*.

à introduire la forme de Pfaff

$$\varpi = A du + B d\varphi \quad (117)$$

à laquelle nous joindrons son adjointe positive

$$\varpi_i = i(-A du + B d\varphi) .$$

La forme quadratique

$$\beta^{(2)} = -i(L du^2 - N d\varphi^2) = \varpi \varpi_i \quad (118)$$

peut être appelée, comme on s'en rend aisément compte, *forme bissectrice* de la forme  $\alpha^{(2)}$ , et les formes linéaires dont elle est le produit seront aussi considérées comme des formes de Pfaff bissectrices (1<sup>re</sup> ou 2<sup>me</sup>) de  $\alpha^{(2)}$ . Sans reprendre, pour les formes quadratiques, les calculs faits pour les formes de Pfaff des invariants de formes proportionnelles, nous allons nous contenter de mettre en évidence l'interprétation géométrique des invariants. Les indices 1 et 2 étant affectés respectivement aux formes  $\varpi_1$  et  $\varpi_2$ , en posant

$$Q_1 = \frac{A_1}{B_1} = e^{-2i\varphi_1} \quad Q_2 = \frac{A_2}{B_2} = e^{-2i\varphi_2}$$

nous prendrons pour les formes  $\varpi$  et  $\varpi_i$

$$\varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \quad \varphi_1 = \varphi + \frac{\pi}{2}$$

et ceci justifie les noms donnés aux formes  $\varpi$ ,  $\varpi_i$ ,  $\beta^{(2)}$ .

32. La forme  $\alpha^{(2)}$  possède un invariant du 1<sup>er</sup> ordre

$$\mu = \frac{M^2}{LN} = \frac{1}{4} \left( \sqrt{\frac{Q_1}{Q_2}} + \sqrt{\frac{Q_2}{Q_1}} \right)^2 = \cos^2(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (119)$$

qui est aussi invariant de l'équation  $\alpha^{(2)} = 0$ , et ne s'annule que si  $\alpha^{(2)}$  est un produit de formes de Pfaff orthogonales; il sera commode de poser

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \quad M = AB \cos 2\omega \quad \mu = \cos^2 2\omega \\ \alpha^{(2)} = A^2 du^2 + 2AB \cos 2\omega \cdot du d\varphi + B^2 d\varphi^2 \\ \qquad = P \left\{ e^{-2i\varphi} du^2 + (e^{2i\omega} + e^{-2i\omega}) du d\varphi + e^{2i\varphi} d\varphi^2 \right\} . \end{array} \right. \quad (120)$$

Le cas des formes quadratiques  $\alpha^{(2)}$  à invariant  $\mu$  constant présente peu d'intérêt, l'étude de telles formes se ramenant aussitôt à celle

d'une seule forme de Pfaff,  $\varpi$  ou  $\varpi_i$  par exemple, et les facteurs linéaires des formes  $\alpha^{(2)}$  et  $\beta^{(2)}$  entrant dans un même réseau angulaire. Cependant l'introduction de la forme bissectrice  $\beta^{(2)}$  attache à une forme quadratique quelconque une forme de l'espèce précédente, dont l'invariant du 1<sup>er</sup> ordre est nul.

A partir d'un  $ds^2$  arbitraire

$$ds^2 = W^2 du dv$$

on pourra comme précédemment traduire les invariants et les opérateurs de la forme  $\alpha^{(2)}$  avec les paramètres différentiels de ce  $ds^2$  par le moyen de seminvariants. La forme  $\alpha^{(2)}$  sera *semi-normale* pour le  $ds^2$  si  $4P = W^2$ ; autrement dit on pourra lui attacher un  $d\sigma^2$  *canonique*:  $d\sigma^2 = 4P du dv$ .

Les opérateurs différentiels les plus simples de la forme  $\alpha^{(2)}$  sont ceux de sa forme bissectrice  $\varpi$ , soit  $\mathcal{D}_u$ ,  $\mathcal{D}_v$  ou ceux que nous en avons déduit  $\mathcal{O}$ ,  $\mathcal{T}$ ; les quatre invariants du 2<sup>me</sup> ordre ainsi formés sont D, T, et

$$\left\{ \begin{array}{l} R = \mathcal{D}_\mu = \frac{1}{2}(\rho + \sigma) \\ S = \mathcal{T}_\mu = \frac{i}{2}(\rho - \sigma) \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho = \mathcal{D}_u \mu \\ \sigma = \mathcal{D}_v \mu \end{array} \right. \quad (121)$$

composantes de la forme invariante

$$d\mu = \mathcal{D}_\mu \cdot \varpi + \mathcal{T}_\mu \cdot \varpi_i. \quad (122)$$

Nous ne poussons pas plus loin le calcul des invariants, et ne revenons pas sur le cas particulier des formes  $\alpha_0^{(2)} = 2M du dv$ .

33. Nous avons vu qu'on peut ramener le cas d'une équation invariante  $\alpha^{(2)} = 0$  à celui d'une forme invariante normée. En nous tenant au cas général, nous prenons pour facteur normant

$$Q = R^2 + S^2 = \rho \sigma \quad (123)$$

ou, par l'intermédiaire d'un  $ds^2$

$$Q = \frac{\mu_u \mu_v}{P} = \frac{W^2}{4P} \cdot \Delta \mu \quad (123')$$

d'où la forme *normale*

$$*\alpha^{(2)} = Q \alpha^{(2)} \quad (124)$$

qu'accompagne la forme de Pfaff *pseudo-normale*  $*\varpi = \sqrt{Q} \varpi$ , le facteur normant n'étant pas défini à partir de la forme  $\varpi$  seulement. Considérons alors les formes

$$\left\{ \begin{array}{l} d\mu = \sqrt{\mu_u \mu_v} (e^{-i\psi} du + e^{i\psi} dv) \\ * \varpi = \sqrt{\mu_u \mu_v} (e^{-i\varphi} du + e^{i\varphi} dv) \end{array} \right. \quad (125)$$

et les opérateurs  $*\mathfrak{D}_u$ ,  $*\mathfrak{D}_v$  ou  $*\mathcal{O}$ ,  $*\mathcal{C}$  attachés à  $*\varpi$ , et de même  $\delta_u$ ,  $\delta_v$  ou  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{Y}$  attachés à  $d\mu$ , de sorte que

$$\mathcal{X}_z = \frac{\Delta'(\mu, z)}{\Delta \mu} \quad \mathcal{Y}_z = \frac{\Theta'(\mu, z)}{\Delta \mu}$$

d'après les formules (39). On peut alors, pour former les invariants de  $*\alpha^{(2)}$ , suivre deux voies légèrement divergentes (*Equivalences*, nos 26 et 28). Dans le premier cas, on emploie les opérateurs attachés à  $d\mu$ ; on rencontre d'abord l'invariant du 2<sup>me</sup> ordre

$$\tau = \frac{\mu_u}{\mu_v} \cdot \frac{B}{A} = e^{2i(\varphi - \psi)} = \frac{\sigma}{\sigma} \quad (126)$$

qu'on retrouve de même avec les opérateurs attachés à  $*\varpi$ ; puis l'on obtient les invariants du 4<sup>me</sup> ordre

$$\varepsilon = \Omega \mu = \frac{\Lambda \mu}{\Delta \mu} \quad \eta = \frac{\Lambda(\varphi - \psi)}{\Delta \mu} \quad \Phi = \mathcal{X}_\tau \quad \Theta = \mathcal{Y}_\tau \quad (127)$$

et l'on poursuit de même le calcul pour les invariants d'ordre supérieur. Dans le second cas, on utilise les opérateurs de la forme  $*\varpi$ ; pour la forme normale  $*\alpha^{(2)}$ , on a

$$*Q = *\rho *\sigma = *R^2 + *S^2 = 1 \quad *\rho = \sqrt{\tau} \quad *\sigma = \frac{1}{\sqrt{\tau}}$$

et en posant

$$*R = \cos \theta \quad *S = \sin \theta$$

on retrouve l'invariant

$$\theta = \psi - \varphi \quad (126')$$

d'où les invariants suivants, qui s'expriment aussitôt avec ceux précédemment calculés. Entre les opérateurs de  $d\mu$  et  $*\varpi$ , on a d'ailleurs les relations

$$\left\{ \begin{array}{l} *\mathfrak{D}_u = e^{-i\theta} \delta_u \\ *\mathfrak{D}_v = e^{i\theta} \delta_v \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} *\mathcal{O} = \cos \theta \cdot \mathcal{X} - \sin \theta \cdot \mathcal{Y} \\ *\mathcal{C} = \sin \theta \cdot \mathcal{X} + \cos \theta \cdot \mathcal{Y} \end{array} \right. \quad (128)$$

Pour une forme  $*\alpha^{(2)}$  générale, pour laquelle  $\Theta \neq 0$ , ou  $\Theta'(\mu, \tau) \neq 0$ , nous avons montré que les invariants  $\mu$ ,  $\tau$ ,  $\Phi$ ,  $\Theta$  sont suffisants pour la conservation de l'équation  $\alpha^{(2)} = 0$ .

34. Au point de vue géométrique, nous considérons que l'équation  $\alpha^{(2)} = 0$  définit un double faisceau, ou faisceau du second ordre, de lignes tracées sur une surface; l'équation  $\beta^{(2)} = 0$  définit le double faisceau bissecteur du précédent, et  $\varpi = 0$  est l'équation d'un faisceau simple, considéré comme premier bissecteur. Le faisceau d'équation  $d\mu = 0$  est celui le long duquel l'angle d'ouverture  $2\omega$  du faisceau initial est permanent:  $\theta$  est l'inclinaison du faisceau  $d\mu = 0$  sur le faisceau bissecteur  $\varpi = 0$ ; dans le cas général  $\Theta \neq 0$ , les lignes  $\omega = \text{const.}$  et les lignes  $\theta = \text{const.}$  forment des faisceaux différents.

Il sera d'autre part naturel d'utiliser la représentation sur un  $d^*\sigma^2$  canonique défini par

$$*W^2 = 4\mu_u\mu_v = 4^*P \quad (129)$$

sur lequel les formes  $*\varpi$  et  $d\mu$  sont semi-normales, donc le faisceau  $d\mu = 0$  un faisceau de courbes parallèles, avec  $\Delta\mu = 1$ .

Au point de vue de l'isothermie, on pourra distinguer les cas suivants:

1° L'invariant I de la forme  $\varpi$  est nul, ou  $\Lambda\varphi = 0$ ; le double faisceau bissecteur est alors isotherme, et nous pourrons dire que le double faisceau  $\alpha^{(2)} = 0$  est *hémi-isotherme*.

2°  $\Lambda\omega = 0$ ; avec  $\mu = \cos^2 2\omega$ ,  $\varepsilon = \Omega\mu$ , on traduit facilement cette condition avec les invariants de l'équation  $\alpha^{(2)} = 0$ . Ceci exprime que les deux faisceaux simples appartenant à  $\alpha^{(2)} = 0$  font partie d'un même ensemble ( $I_1$ ).

3° On a simultanément

$$\Lambda\varphi = 0 \quad \Lambda\omega = 0 ; \quad (130)$$

alors les faisceaux simples de l'équation  $\alpha^{(2)} = 0$  font partie d'un même ensemble isotherme, comprenant aussi les faisceaux de  $\beta^{(2)} = 0$ ; nous dirons que ces conditions (130) sont celles d'*holo-isothermie* de  $\alpha^{(2)} = 0$ .

## XI. DEUX FAISCEAUX QUADRATIQUES DE LIGNES.

35. Nous avons, au Chapitre VI, considéré implicitement un double faisceau orthogonal avec les formes adjointes  $\varpi$  et  $\varpi_i$ , et montré les