VI. Formes de Pfaff adjointes — Opérateurs et invariants — $d\sigma^2$ CANONIQUE A UNE FORME.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **30 (1931)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

que jusqu'à l'ordre n inclus, on doit *régulièrement*[1] prévoir $n(n-2)$ invariants, dont $2(n-1)$ nouveaux d'ordre n; si un ds^2 est adjoint, le nombre des invariants du système s'élève à $\frac{n(3n-1)}{2}$, dont $3n-2$ nouveaux d'ordre n; par suite les seminvariants sont au nombre de $3n$, dont 3 nouveaux pour chaque ordre. Cette régularité n'est d'ailleurs pas acquise pour les premiers ordres; c'est ainsi que pour l'ordre *un* existe le seul seminvariant $S = \frac{4P}{W^2}$, que nous avons réduit à l'unité pour les formes semi-normales.

VI. Formes de Pfaff adjointes — Opérateurs et invariants — $d\sigma^2$ canonique a une forme.

15. Dans le réseau angulaire attaché à un faisceau simple de courbes, nous avons déjà eu à considérer le faisceau simple des trajectoires orthogonales des courbes de la première famille. Entre les invariants et les opérateurs appartenant à ces deux faisceaux, des rapprochements intéressants sont à faire. Pour simplifier le langage, nous dirons que des formes de Pfaff ϖ et χ sont *orthogonales* si les courbes intégrales des deux équations $\varpi = 0$ et $\chi = 0$ sont deux faisceaux de trajectoires orthogonales; en outre, à toute forme ϖ nous associerons plus particulièrement une des formes orthogonales ϖ_i, que nous dirons *adjointe positive* de ϖ (ϖ étant l'*adjointe négative* de ϖ_i), telle que

$$\left\{\begin{aligned} \varpi &= x\,df = A\,du + B\,dv \\ \varpi_i &= y\,dg = i(-A\,du + B\,dv) = A_i\,du + B_i\,dv \end{aligned}\right. \tag{67}$$

et nous affecterons de l'indice i les expressions relatives à cette forme ϖ_i; on aura les relations

$$P_i = P \qquad Q_i = -Q$$

et comme

$$A = xf_u = iyg_u \qquad B = xf_v = -iyg_v$$

on voit, en posant

$$p = xy \qquad q = \frac{x}{y} \tag{68}$$

[1] Quand il y a k équations de conditions pour exprimer la conservation d'un système par les transformations (3), le nombre des invariants à prévoir jusqu'à l'ordre n inclus est $k\frac{n(n+1)}{2} - 2n$. (Cf. la note du n° 4).

que les fonctions f, g, q satisfont aux relations établies aux n^os 2 et 3 par les formules (11), (11′), (12) et (13). On a aussi

$$\left\{\begin{aligned} 2\mathrm{A}du &= x\,df + iy\,dg = \varpi + i\varpi_i \\ 2\mathrm{B}dv &= x\,df - iy\,dg = \varpi - i\varpi_i \end{aligned}\right. \tag{69}$$

ce qui établit une symétrie intéressante entre les variables u, v et f, g et entre les formes $\mathrm{A}du$, $\mathrm{B}dv$ et ϖ, ϖ_i.

16. Les formules

$$\vartheta_{ui} = i\vartheta_u \qquad \vartheta_{vi} = -i\vartheta_v$$

donnent aussitôt pour les opérateurs du 1^er ordre et les invariants du 2^e ordre

$$\mathcal{D}_i = \mathcal{T} \qquad \mathcal{T}_i = -\mathcal{D} \tag{70}$$

$$\mathrm{D}_i = \mathrm{T} \qquad \mathrm{T}_i = -\mathrm{D}\,. \tag{71}$$

On a ensuite, pour les opérateurs du 2^e ordre et la parenthèse du 1^er ordre.

$$\left\{\begin{aligned} &\mathcal{L}_i = \mathcal{L} \qquad \mathcal{M}_i = -\mathcal{M} \qquad \mathcal{N}_i = -\mathcal{N} \\ &\qquad (\mathcal{D}_i\mathcal{T}_i) = (\mathcal{D}\mathcal{T}) \end{aligned}\right. \tag{72}$$

puis pour les invariants du 3^e ordre

$$\mathrm{I}_i = \mathrm{I} \qquad k_i = k \qquad h_i = -h \qquad j_i = -j\,. \tag{73}$$

Les relations intimes qui se poursuivent entre les opérateurs et les invariants de formes adjointes ϖ et ϖ_i — et se généraliseraient pour des formes $\varpi_\theta = \cos\theta\,.\,\varpi + \sin\theta\,.\,\varpi_i$ — ont leur origine dans les expressions vectorielles, invariantes ou comitantes, du réseau angulaire attaché à ces formes. Cela était déjà apparent pour les formes semi-normales, et nous reviendrons sur le point de vue vectoriel. Mais nous remarquerons d'abord qu'à toute forme ϖ est attachée une forme quadratique comitante $d\sigma^2$, que nous dirons *canonique* pour ϖ, et liée à cette forme ϖ comme le ds^2 l'est à une forme semi-normale; en posant en effet

$$d\sigma^2 = 4\mathrm{P}\,du\,dv = \varpi^2 + \varpi_i^2 \tag{74}$$

et considérant $d\sigma^2$ comme un ds^2 donné, le seminvariant S d'ordre un de ϖ par rapport à ce ds^2 est réduit à l'unité; entre autres conséquences, l'invariant du 3^e ordre k de ϖ est la courbure totale de la forme $d\sigma^2$. Si une forme ϖ est d'abord considérée en liaison avec un ds^2 donné, on pourra, par des transformations conformes appropriées, conserver cette forme et ramener le ds^2 à la forme $d\sigma^2$, pour laquelle ϖ est canonique. Les expressions vectorielles interprétées pour une forme semi-normale, par rapport au ds^2, donneront donc lieu à une interprétation analogue pour une forme quelconque, par rapport au $d\sigma^2$ canonique.

17. Reprenons le cas d'un ds^2 donné, c'est-à-dire d'un étalon de longueur invariant fixé en tout point $\mathbf{m}$ d'une surface. Soient

$$\varpi = \mathbf{a} \times d\mathbf{m} \qquad ds^2 = (d\mathbf{m})^{\overset{2}{\times}} \tag{75}$$

la forme ϖ et le ds^2 donnés, et la forme adjointe

$$\varpi_i = \mathbf{b} \times d\mathbf{m} \qquad \mathbf{b} = \mathrm{J}\mathbf{a} \ . \tag{76}$$

En se reportant aux formes (67), ou encore

$$\mathbf{a} = x\nabla f \qquad \mathbf{b} = x\nabla g \tag{67'}$$

et aux formules (32) et (39), les opérateurs de ϖ et ϖ_i fourniront les paramètres différentiels d'une fonction z, que nous écrirons, avec les vecteurs *inverses* de $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{a}^{\overset{2}{\times}}} \qquad \bar{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{b}^{\overset{2}{\times}}} \tag{77}$$

sous les formes

$$\mathcal{D}z = \frac{\mathbf{a} \times \nabla z}{\mathbf{a}^{\overset{2}{\times}}} = \bar{\mathbf{a}} \times \nabla z \qquad \mathcal{G}z = \frac{\mathbf{b} \times \nabla z}{\mathbf{b}^{\overset{2}{\times}}} = \bar{\mathbf{b}} \times \nabla z \ . \tag{78}$$

Par l'effet de la parenthèse

$$(\mathcal{D}\mathcal{G})z = \bar{\mathbf{a}} \times \nabla(\bar{\mathbf{b}} \times \nabla z) - \bar{\mathbf{b}} \times \nabla(\bar{\mathbf{a}} \times \nabla z)$$

$$= (\nabla\bar{\mathbf{b}} \times \bar{\mathbf{a}} - \nabla\bar{\mathbf{a}} \times \bar{\mathbf{b}}) \times \nabla z$$

le vecteur comitant

$$-\mathbf{f} = \nabla\bar{\mathbf{b}} \times \bar{\mathbf{a}} - \nabla\bar{\mathbf{a}} \times \bar{\mathbf{b}} \tag{79}$$

et la forme de Pfaff correspondante $-\mathbf{f} \times d\mathbf{m}$ sont mis en évidence.

18. Pour une forme semi-normale ϖ_1 et les vecteurs

$$\mathbf{a}_1 = \bar{\mathbf{a}} = \mathbf{d} = \frac{\nabla f}{\sqrt{\Delta f}} \qquad \mathbf{b}_1 = \bar{\mathbf{b}}_1 = \mathbf{t} = \mathrm{J}\mathbf{d}$$

$$-\mathbf{f}_1 = \nabla\mathbf{t} \times \mathbf{d} - \nabla\mathbf{d} \times \mathbf{t} \tag{79'}$$

$\mathbf{f}_1$ est le vecteur de la formule (61) et l'on a aussi

$$\mathcal{D}_1 f = \sqrt{\Delta f} \qquad \mathcal{T}_1 f = 0$$

$$\mathcal{D}_1 g = -\mathcal{T}_{1i} g = 0 \qquad \mathcal{T}_1 g = \mathcal{D}_{1i} g = \sqrt{\Delta g}$$

$$-\mathbf{f}_1 \times \nabla f = (\mathcal{D}_1 \mathcal{T}_1) f = \mathrm{T}_1 \sqrt{\Delta f} \qquad \mathrm{T}_1 = -\mathbf{f}_1 \times \mathbf{d} = -\mathbf{g}_1 \times \mathbf{t}$$

$$-\mathbf{f}_1 \times \nabla g = (\mathcal{D}_1 \mathcal{T}_1) g = -\mathrm{D}_1 \sqrt{\Delta g} \qquad \mathrm{D}_1 = \mathbf{f}_1 \times \mathbf{t} = -\mathbf{g}_1 \times \mathbf{d}$$

comme cela a été établi; par suite, puisque

$$\mathbf{d} \times \nabla \mathbf{d} = \mathbf{t} \times \nabla \mathbf{t} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{lll} \nabla \mathbf{d} = \mathbf{t}\mathbf{f}_1 & \nabla \mathbf{t} = -\mathbf{d}\mathbf{f}_1 & \\ \mathrm{D}_1 = \operatorname{div} \mathbf{d} & \mathrm{T}_1 = \operatorname{div} \mathbf{t} & -\mathbf{g}_1 = (\operatorname{div} \mathbf{d})\mathbf{d} + (\operatorname{div} \mathbf{t})\mathbf{t}\,. \end{array} \right. \tag{80}$$

Les formules (78) montrent bien que les opérateurs $\mathcal{D}$ et $\mathcal{T}$ sont indépendants du ds^2, utilisé seulement comme intermédiaire, et les formules (80) donneront, pour une forme ϖ, des expressions analogues à celles obtenues pour une forme semi-normale si au ds^2 est substitué le $d\sigma^2$ canonique à cette forme, et si les opérations (multiplication intérieure, gradient, divergence, etc.) sont effectuées vis-à-vis de ce $d\sigma^2$. On peut alors, aux symboles $\frac{d}{ds_d}$, $\frac{d}{ds_t}$ utilisés aux n^os 11 et suivants, substituer des symboles $\frac{d}{d\sigma_a}$, $\frac{d}{d\sigma_b}$, bien qu'ils n'aient pas une signification absolue comme les précédents, la forme $d\sigma^2$ étant attachée à la forme ϖ.

On obtient une autre notation convenable pour les opérateurs $\mathcal{D}$ et $\mathcal{T}$ en portant des formes différentielles exactes df et dg; d'après les formules (32) du n^o 6 et (39) du n^o 9, en tenant compte de

$$\nabla z = z_f \nabla f + z_g \nabla g \qquad \nabla g = \frac{x}{y} \mathrm{J} \nabla f$$

il vient

$$\mathcal{D}_0 z = z_f$$

$$\mathcal{T}_0 z = \frac{x}{y} z_g \qquad \text{ou} \qquad (\mathcal{D}_i)_0 z = z_g$$

et par suite

$$\mathcal{D} z = \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial f} \qquad \mathcal{T} z = \mathcal{D}_i z = \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial g} \tag{81}$$

d'où la notation symbolique

$$\mathcal{D} = \frac{\partial}{\varpi} \qquad \mathcal{T} = \mathcal{D}_i = \frac{\partial}{\varpi_i} \tag{82}$$

les ∂ rappelant l'accouplement des formes de Pfaff ϖ et ϖ_i.

Une notation voisine est atteinte en partant de la relation identique entre trois formes de Pfaff à deux variables (analogue à celle entre trois vecteurs du plan), et choisissent pour une de ces formes une différentielle exacte dz

$$[\varpi\chi]\,dz = -[\chi\,dz]\varpi + [\varpi\,dz]\chi \tag{83}$$

$$dz = \frac{[\chi\,dz]}{[\chi\varpi]}\varpi + \frac{[\varpi\,dz]}{[\varpi\chi]}\chi$$

puis convenant de l'écriture symbolique

$$dz = \left[\frac{dz}{\varpi}\right]\varpi + \left[\frac{dz}{\chi}\right]\chi \tag{84}$$

de sorte qu'une réduction au dénominateur commun $[\varpi\,\chi]$, effectuée suivant les règles de la multiplication extérieure, rétablisse la signification de l'expression; la notation $\left[\frac{dz}{\varpi}\right]$ a l'avantage d'une analogie avec celle du quotient entier. Dans le cas particulier $\chi = \varpi_i$, on trouve ainsi

$$\mathcal{D}z = \left[\frac{dz}{\varpi}\right] \qquad \mathcal{T}z = \mathcal{D}_i z = \left[\frac{dz}{\varpi_i}\right] \tag{85}$$

notation voisine de (82).

19. Nous allons étendre l'analogie, déjà signalée à la fin du n° 15, entre les variables u, v et f, g, entre les formes Adu, Bdv et ϖ, ϖ_i, commencée par les formules (67) et (69) entre autres. Nous rapprochons pour cela les formules (19) et (81)

$$\mathcal{D}z = \frac{z_f}{x} \qquad \mathcal{T}z = \frac{z_g}{y} \tag{81}$$

$$\vartheta_u z = \frac{z_u}{\mathrm{A}} \qquad \vartheta_v z = \frac{z_v}{\mathrm{B}} \tag{19}$$

puis les invariants du 1er ordre obtenus par l'emploi de ces paramètres différentiels; en appliquant en effet les formules (33) à partir de $\varpi_0 = df$ et $(\varpi_i)_0 = dg$, on obtient

$$\mathrm{D} = -\,\mathrm{T}_i = -\,\mathcal{T}_i \log y = \mathcal{D} \log y \qquad \mathrm{T} = \mathcal{T} \log x \tag{86}$$

$$\alpha = \vartheta_u \log \mathrm{B} \qquad \beta = \vartheta_v \log \mathrm{A} \tag{20}$$

et on complète les formules déjà obtenues par

$$\left\{\begin{aligned} D &= \frac{1}{2}(\mathcal{D}\log P + i\mathcal{T}\log Q) = \frac{1}{2}(\mathcal{D}\log p - \mathcal{D}\log q) \\ T &= \frac{1}{2}(\mathcal{T}\log P - i\mathcal{D}\log Q) = \frac{1}{2}(\mathcal{T}\log p + \mathcal{T}\log q) \end{aligned}\right. \tag{87}$$

$$\left\{\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2}(\vartheta_u \log p - \vartheta_v \log q) = \frac{1}{2}(\vartheta_u \log P - \vartheta_u \log Q) \\ \beta &= \frac{1}{2}(\vartheta_v \log p - \vartheta_u \log q) = \frac{1}{2}(\vartheta_v \log P + \vartheta_v \log Q)\ . \end{aligned}\right. \tag{88}$$

Les relations entre opérateurs du 2e ordre et parenthèses ont été données par les formules (24′) et (25), mais en remarquant l'analogie des formes

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\vartheta_u\vartheta_v + \vartheta_v\vartheta_u + \beta\vartheta_u + \alpha\vartheta_v)$$

$$\mathcal{N} = \mathcal{D}\mathcal{T} + \mathcal{T}\mathcal{D} + T\mathcal{D} + D\mathcal{T}$$

on voit en particulier qu'à

$$\mathcal{L}z = \vartheta_{uv}z = \frac{z_{uv}}{P}$$

correspond

$$\mathcal{N}z = \frac{2z_{fg}}{p}\ . \tag{89}$$

Pour les invariants du 3e ordre, on complète les formules (30) par

$$\left\{\begin{aligned} -I &= -\frac{i}{2}\mathcal{L}\log Q = \frac{1}{2}\mathcal{N}\log q \\ -k &= \frac{1}{2}\mathcal{L}\log P = \frac{1}{2}(\mathcal{L}\log p - \mathcal{M}\log q) \\ -h &= \frac{1}{2}(\mathcal{M}\log P + i\mathcal{N}\log Q) = \frac{1}{2}(\mathcal{M}\log p - \mathcal{L}\log q) \\ -j &= \frac{1}{2}(\mathcal{N}\log P - i\mathcal{M}\log Q) = \frac{1}{2}\mathcal{N}\log p\ . \end{aligned}\right. \tag{90}$$

20. Revenons encore sur certaines expressions vectorielles intéressantes; les trajectoires orthogonales $g =$ const. des courbes $f =$ const. correspondant à la relation

$$\nabla g = qJ\nabla f \tag{11'}$$

on en déduit, comme nous l'avons vu

$$\Delta f = -\nabla f \times \nabla \log q \qquad \Delta g = \nabla g \times \nabla \log q \tag{12'}$$

d'où le vecteur

$$\nabla \log q = -\Omega f . \nabla f + \Omega g . \nabla g \tag{91}$$

et en prenant les rotationnels (condition d'intégrabilité), on obtient

$$[\nabla f . \nabla \Omega f] = [\nabla g . \nabla \Omega g] \tag{92}$$

$$\mathrm{I}_1 = \Theta'(f, \Omega f) = \Theta'(g, \Omega g) \; ; \qquad (64) \; (92')$$

on vérifie encore que le seminvariant I_1 n'est pas altéré si on substitue à f, par exemple, une fonction quelconque F (f) de cette variable [1].

Mais, à partir des formules (80), on obtient aussi

$$\Delta \mathbf{d} = \mathrm{I}_1 \mathbf{t} - (\mathrm{D}_1^2 + \mathrm{T}_1^2)\mathbf{d} \qquad \Delta \mathbf{t} = -\mathrm{I}_1 \mathbf{d} - (\mathrm{D}_1^2 + \mathrm{T}_1^2)\mathbf{t} \tag{93}$$

$$\mathrm{I}_1 = \mathbf{t} \times \Delta \mathbf{d} = -\mathbf{d} \times \Delta \mathbf{t} = [\mathbf{d} . \Delta \mathbf{d}] = [\mathbf{t} . \Delta \mathbf{t}] \tag{94}$$

autre expression de ce seminvariant fondamental.

Nous allons montrer la relation entre les formes $[\nabla f . \nabla \Omega f]$ et $[\mathbf{d} . \Delta \mathbf{d}]$ en supposant la forme $\varpi_0 = df$ réalisée *sur un* ds^2 *égal à son* $d\sigma_0^2$ *canonique;* on a alors

$$\mathbf{d} = \nabla f \qquad \Delta f = 1 \qquad \bar{\omega}_0 = \bar{\omega}_1$$

$$\nabla \mathbf{d} = \mathbf{t}\mathbf{f}_1 = \nabla^2 f \qquad [\mathbf{t}\mathbf{f}_1] = 0 \qquad \operatorname{div} \mathbf{d} = \mathbf{t} \times \mathbf{f}_1 = \Delta f = \Omega f$$

donc

$$\mathbf{f}_1 = \Omega f . \mathbf{t} \qquad \nabla \mathbf{d} = \Omega f . \mathbf{t}^2$$

$$\nabla^2 \mathbf{d} = \mathbf{t}^2 \nabla \Omega f - \overline{\Omega f}^2 (\mathbf{d}\mathbf{t} + \mathbf{t}\mathbf{d})\mathbf{t}$$

$$\Delta \mathbf{d} = (\mathbf{t} \times \nabla \Omega f)\mathbf{t} - \overline{\Omega f}^2 \mathbf{d} = \nabla \Omega f - (\mathbf{d} \times \nabla \Omega f + \overline{\Omega f}^2)\mathbf{d}$$

le coefficient de $\mathbf{d}$ dans la dernière expression étant la courbure totale du ds^2, d'où enfin

$$[\mathbf{d} . \Delta \mathbf{d}] = \mathbf{t} \times \nabla \Omega f = [\nabla f . \nabla \Omega f] \, .$$

---

[1] Nous rappelons les relations

$$\nabla \mathrm{F} = \mathrm{F}' \nabla f \qquad \Delta \mathrm{F} = \mathrm{F}'^2 \Delta f \qquad \nabla^2 \mathrm{F} = \mathrm{F}'' \overline{\nabla f}^2 + \mathrm{F}' \nabla^2 f \qquad \Delta \mathrm{F} = \mathrm{F}'' \Delta f + \mathrm{F}' \Delta f$$

$$\Omega \mathrm{F} = \frac{\mathrm{F}''}{\mathrm{F}'^2} + \frac{1}{\mathrm{F}'} \Omega f \qquad \nabla \Omega \mathrm{F} = \left\{ -\left(\frac{1}{\mathrm{F}'}\right)'' + \left(\frac{1}{\mathrm{F}'}\right)' \Omega f \right\} \nabla f + \frac{1}{\mathrm{F}'} \nabla \Omega f$$

les accents indiquant les dérivées par rapport à f.

C'est là l'invariant I_0 de ϖ_0; c'est aussi le seminvariant I_1 pour $ds^2 = d\sigma_0^2$, mais pour un autre ds^2, soit ds'^2, pour lequel les symboles seraient accentués, on aurait

$$I_0 = \frac{[\nabla' f . \nabla' \Omega f]}{\Delta' f} = \frac{I'_1}{\Delta' f}$$

21. Résumons, en modifiant un peu leur forme, certains des résultats précédemment obtenus; si l'on part d'une forme de Pfaff quelconque ϖ, on peut lui associer, au moyen d'un facteur intégrant ν_0, la forme intégrable

$$\varpi_0 = \nu_0 \varpi = df$$

à laquelle est associée le $d\sigma_0^2$ canonique

$$d\sigma_0^2 = 4 f_u f_v \, du \, dv = \varpi_0^2 + (\varpi_i)_0^2 = df^2 + \frac{1}{q^2} dg^2$$

avec

$$g_u = -iqf_u \qquad g_v = iqf_v .$$

Sur ce $d\sigma_0^2$, les intégrales $f = $ const. sont des courbes parallèles et l'on a, pour les premiers invariants de ϖ_0

$$\left\{\begin{aligned} & D_0 = \Omega f = -\mathcal{D}_0 \log q = q \frac{\partial}{\partial f}\left(\frac{1}{q}\right) \\ & -k_0 = \mathcal{D}_0 D_0 + D_0^2 = q^2 \frac{\partial^2}{\partial f^2}\left(\frac{1}{q}\right) \\ & -I_0 = -\mathcal{C}_0 D_0 = q \frac{\partial^2 \log q}{\partial f \partial g} \end{aligned}\right. \tag{95}$$

en accord avec les formules (87) et (90), où $p = \frac{1}{q}$. Différentes conséquences, d'ailleurs connues, peuvent en être déduites, suivant la nature de la fonction q de f, g.

Dans le cas où, à côté de la forme ϖ, est donné un ds^2, on peut associer à ϖ, au moyen d'un facteur semi-normant ν_1, la forme semi-normale

$$\varpi_1 = \nu_1 \varpi \qquad \nu_1 = \frac{W}{2\sqrt{P}}$$

pour laquelle le $d\sigma_1^2$ canonique se confond avec le ds^2

$$d\sigma_1^2 = ds^2 = \varpi_1^2 + \varpi_{1i}^2 .$$

Comme nous l'avons établi, les invariants de la forme ϖ_1 sont les invariants euclidiens (géodésiques) de l'équation $\varpi = 0$. Avec les notations

$$\frac{f_u}{f_v} = Q = e^{-2i\varphi} \qquad \frac{W}{2} = e^{w} \tag{49'}$$

on peut écrire une forme semi-normale

$$\varpi_1 = \frac{W}{2}\left(\sqrt{\frac{f_u}{f_v}}\, du + \sqrt{\frac{f_v}{f_u}}\, dv\right) = e^{w-i\varphi} du + e^{w+i\varphi} dv \,. \tag{96}$$

VII. Faisceaux isothermes.

22. Il est bien connu, dans la représentation conforme des surfaces, qu'à côté des deux faisceaux formés par les deux séries de lignes minima, $du = 0$ et $dv = 0$, les faisceaux isothermes de courbes sont aussi conservés; l'équation différentielle $\varpi = 0$ d'un tel faisceau du premier ordre est en effet caractérisée par la condition invariante

$$I = 0$$

et l'équation $\varpi = 0$ n'a alors aucun invariant conforme. Nous avons donné bien des formes à l'invariant I de ϖ; considérons en particulier une forme semi-normale ϖ_1 sur un ds^2 et rappelons diverses interprétations de l'équation $I_1 = 0$. D'après

$$I_1 = \frac{i}{2} \Lambda \log Q = 0 \tag{97}$$

$$\frac{\partial^2 \log Q}{\partial u\, \partial v} = 0 \qquad Q = \frac{A}{B} = \frac{a(u)}{b(v)}$$

le rapport $\frac{A}{B}$ des coefficients de l'équation $\varpi = 0$ est le quotient de deux fonctions arbitraires, l'une de u, l'autre de v; le facteur intégrant $\frac{a}{2A} = \frac{b}{2B}$ ramène alors à l'équation intégrable

$$\varpi_0 = \frac{1}{2}\left\{ a(u)\, du + b(v)\, dv \right\} = 0$$

et les courbes intégrales sont données par

$$f = \frac{1}{2}\left\{ U(u)\, du + V(v)\, dv \right\} = \text{const.} \qquad U' = a \,, \quad V' = b \,,$$