

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 30 (1931)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** APPLICATION A LA REPRÉSENTATION CONFORME DES TRANSFORMATIONS A VARIABLES SÉPARÉES

**Autor:** Delens, P. C.

**Kapitel:** V. Formes de Pfaff semi-normales.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-23887>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 08.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

formule très générale à laquelle on peut donner bien des formes, par exemple<sup>1</sup>

$$K = \frac{\Lambda \Delta f - 2 \overline{\Delta f}^2 - 2 \Delta'(f, \Lambda f) - 4 \Sigma f}{2 \Delta f}.$$

## V. FORMES DE PFAFF SEMI-NORMALES.

11. Dans la géométrie euclidienne des surfaces (c'est-à-dire la géométrie des surfaces pourvues de la connexion euclidienne induite de l'espace ambiant, soit l'ordinaire géométrie riemannienne sur la surface), on a avantage à considérer, plutôt que la forme  $\omega_0 = df$ , la forme

$$\overline{\omega}_1 = \frac{df}{\sqrt{\Delta f}} = x_1 \overline{\omega}_0 \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{\Delta f}} \quad (53)$$

Le système formé d'une équation  $\omega = 0$  et du  $ds^2$  est en effet équivalent, pour les transformations conformes, à cette seule forme  $\overline{\omega}_1$ , normée vis-à-vis du  $ds^2$ , de sorte que les invariants de cette forme soient ceux du système indiqué. Nous dirons que la forme  $\overline{\omega}_1$  est *canonique* pour le  $ds^2$ , ou *semi-normale* (on pourrait encore dire *unitaire*); le facteur  $x_1$ , la normant ainsi à partir de la forme  $\omega_0$ , a pour effet de ramener à l'unité le seminvariant du 1<sup>er</sup> ordre  $S_1$  de la forme  $\overline{\omega}_1$ . Les invariants de  $\overline{\omega}_1$  indépendants de  $x_1$  sont les invariants de l'équation  $\omega = 0$ ; les autres invariants de  $\overline{\omega}_1$  sont des semi-invariants ou des invariants gaussiens.

Les opérateurs différentiels du 1<sup>er</sup> ordre de  $\overline{\omega}_1$  sont

$$\mathcal{O}_1 = \sqrt{\Delta f} \mathcal{O}_0 \quad \mathcal{V}_1 = \sqrt{\Delta f} \mathcal{V}_0 \quad (54)$$

et pour l'opérateur  $\mathcal{L}_1$  du 2<sup>me</sup> ordre, on a

$$\mathcal{L}_1 = \Delta f \cdot \mathcal{L}_0. \quad (55)$$

<sup>1</sup> Au moyen des formules

$$\Delta'(f, \Omega f) = \frac{\Delta'(f, \Lambda f)}{\Delta f} - \frac{\Delta'' f \cdot \Lambda f}{\Delta f^2} \quad \Lambda \log \Delta f = \frac{\Lambda \Delta f}{\Delta f} - \frac{\Delta^2 f}{\Delta f^2} \quad \Sigma f = \frac{\Delta^2 f - 2 \Delta'' f \cdot \Lambda f}{4 \Delta f}$$

Pour un faisceau de lignes parallèles, avec  $\Delta f = 1$ , on retrouve la formule connue

$$K = -\overline{\Delta f}^2 - \Delta'(f, \Lambda f).$$

Pour un faisceau isotherme, avec  $\Lambda f = \Omega f = 0$

$$K = \Lambda \log \sqrt{\Delta f}.$$

Par suite, si on introduit les vecteurs unitaires

$$\mathbf{d} = \frac{\nabla f}{\sqrt{\Delta f}} \quad \mathbf{t} = \mathbf{J} \mathbf{d} \quad (56)$$

on obtient pour les paramètres différentiels les expressions suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D}_1 z = \frac{\Delta'(f, z)}{\sqrt{\Delta f}} = \frac{dz}{ds_d} = \mathbf{d} \times \nabla z \\ \mathcal{G}_1 z = \frac{\Theta'(f, z)}{\sqrt{\Delta f}} = \frac{dz}{ds_t} = [\mathbf{d} \cdot \nabla z] = \mathbf{t} \times \nabla z \\ \mathcal{L}_1 z = \Lambda z = \left( \frac{d^2}{ds_d^2} + \frac{d^2}{ds_t^2} + D_1 \frac{d}{ds_d} + T_1 \frac{d}{ds_t} \right) z = \operatorname{div} \nabla z \end{array} \right. \quad (57)$$

et aussi

$$(\mathcal{D}_1 \mathcal{G}_1) z = \left( \frac{d^2}{ds_t ds_d} - \frac{d^2}{ds_d ds_t} \right) z = \left( T_1 \frac{d}{ds_d} - D_1 \frac{d}{ds_t} \right) z$$

$$\frac{d^2}{ds_i ds_j} = \frac{d}{ds_j} \frac{d}{ds_i} .$$

12. L'on a en particulier

$$\mathcal{D}_1 f = \sqrt{\Delta f} = \frac{df}{ds_d} \quad \mathcal{G}_1 f = \frac{df}{ds_t} = 0$$

et les invariants du 2<sup>me</sup> ordre,  $D_1$  et  $T_1$ , de la forme semi-normale, sont donnés par les formules (24) ou (33) suivant

$$-\frac{d^2 f}{ds_d ds_t} = T_1 \frac{df}{ds_d} \quad \Lambda f = \frac{d^2 f}{ds_d^2} + D_1 \frac{df}{ds_d}$$

soit

$$D_1 = \sqrt{\Delta f} \cdot \Omega f - \frac{\Delta'(f, \sqrt{\Delta f})}{\Delta f} \quad T_1 = -\frac{\Theta'(f, \sqrt{\Delta f})}{\Delta f} \quad (58)$$

ou encore

$$D_1 = -\frac{\Delta'' f - 2 \Delta f \cdot \Lambda f}{2 \frac{\Delta f^3}{\Delta f^2}} = -\frac{\Gamma f}{2 \frac{\Delta f^3}{\Delta f^2}} \quad T_1 = -\frac{\Theta'' f}{2 \frac{\Delta f^3}{\Delta f^2}} . \quad (58')$$

On reconnaît en  $D_1$  et  $T_1$  les courbures géodésiques des courbes  $\omega = 0$  et de leurs trajectoires orthogonales, mesurées respectivement suivant les normales ( $-\mathbf{d}$ ) et ( $-\mathbf{t}$ ) à ces courbes; en considérant au

contraire  $\mathbf{t}$  et  $\mathbf{d}$  comme les tangentes positives à ces courbes,  $g_t$  et  $g_d$  étant les courbures mesurées suivant les normales ( $-\mathbf{d}$ ) et  $\mathbf{t}$ , on aurait

$$D_1 = g_t \quad T_1 = -g_d. \quad (59)$$

Par les formules (27), on obtenait, en utilisant (49) et (38')

$$\left. \begin{array}{l} D_1 = \mathcal{D}_1 \log W + \mathfrak{D}_1 \varphi = \frac{\Delta'(f, \log W) + \Theta'(f, \varphi)}{\sqrt{\Delta f}} \\ \quad = \frac{d \log W}{ds_d} + \frac{d \varphi}{ds_t} = \mathbf{d} \times \nabla \log W + \mathbf{t} \times \nabla \varphi \\ \\ T_1 = \mathfrak{D}_1 \log W - \mathcal{D}_1 \varphi = \frac{\Theta'(f, \log W) - \Delta'(f, \varphi)}{\sqrt{\Delta f}} \\ \quad = \frac{d \log W}{ds_t} - \frac{d \varphi}{ds_d} = \mathbf{t} \times \nabla \log W - \mathbf{d} \times \nabla \varphi. \end{array} \right\} \quad (60)$$

On reconnaît dans ces formules le rôle des deux vecteurs (formant simili-repère).

$$\mathbf{f}_1 = \nabla \varphi + J \nabla \log W \quad \mathbf{g}_1 = J \mathbf{f}_1 = -\nabla \log W + J \nabla \varphi \quad (61)$$

qui permettent d'écrire

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{f}_1 = -T_1 \mathbf{d} + D_1 \mathbf{t} \quad \mathbf{g}_1 = -D_1 \mathbf{d} - T_1 \mathbf{t} \\ D_1 = -\mathbf{d} \times \mathbf{g}_1 \quad T_1 = -\mathbf{t} \times \mathbf{g}_1; \end{array} \right\} \quad (62)$$

en particulier

$$\mathbf{g}_1 = -\Omega f \cdot \nabla f + \frac{1}{2} \nabla \log \Delta f. \quad (63)$$

13. Nous avons en effet indiqué (*Thèse*) qu'à un faisceau simple de courbes est associé le *réseau angulaire* des courbes coupant celles du faisceau sous des angles constants et montré que les propriétés de courbure géodésique de ce réseau sont résumées en ces vecteurs;  $\varphi$  est, comme le montre la formule (49), l'angle de la normale  $\mathbf{d}$  d'une courbe du faisceau  $\omega = 0$  avec la courbe du faisceau isotherme  $dY = 0$  qui la coupe au point considéré, donc avec la normale au même point à la courbe du faisceau isotherme  $dX = 0$ .

Les formules (61) mettent bien en évidence deux éléments géométriques importants: d'une part, le module  $W$  de la représentation conforme entre le ( $ds^2$  euclidien)  $dl^2 = dX^2 + dY^2$  suivant lequel on peut représenter le  $ds^2$  considéré, et ce  $ds^2$ ; d'autre part, l'angle  $\varphi$  qui caractérise le faisceau en question, et par suite aussi le réseau angulaire associé.

Sans insister pour le moment sur les opérateurs du 2<sup>e</sup> ordre  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{N}_1$ , nous donnons, en tenant compte de

$$P_1 = \frac{P_0}{\Delta f} = \frac{W^2}{4}$$

les expressions des invariants du 3<sup>e</sup> ordre de la forme semi-normale  $\omega_1$

$$I_1 = \Theta'(f, \Omega f) = \Lambda \varphi = \operatorname{div} \mathbf{f}_1 = \operatorname{rot} \mathbf{g}_1 \quad (64)$$

$$k_1 = K = -\Lambda \log W = -\operatorname{rot} \mathbf{f}_1 = \operatorname{div} \mathbf{g}_1 \quad (65)$$

ce qui correspond aux formules (50) et (51) ou à l'expression (52) de K au moyen des paramètres différentiels de  $f$ ; puis

$$-h_1 = \mathcal{M}_1 \log W + \mathcal{N}_1 \varphi \quad -j_1 = \mathcal{N}_1 \log W - \mathcal{M}_1 \varphi \quad (66)$$

Nous avons donc retrouvé la courbure totale K du  $ds^2$  comme invariant du 3<sup>e</sup> ordre d'une forme semi-normale, et l'application des formules (29) avec les opérateurs différentiels  $\frac{d}{ds_d}$  et  $\frac{d}{ds_t}$  donne encore, pour  $I_1$  et  $K$ , des résultats connus.

14. A côté des formes déjà étudiées  $\omega_0$  et  $\omega_1$ , on pourrait considérer la forme

$$\omega_2 = \frac{df}{\Delta f} = x_2 \omega_2 \quad x_2 = \frac{1}{\Delta f}$$

pour laquelle les paramètres différentiels du 1<sup>er</sup> ordre d'une fonction  $z$  sont

$$\mathcal{D}_2 z = \Delta'(f, z) \quad \mathcal{C}_2 z = \Theta'(f, z)$$

et qui est telle que

$$\omega_0 \omega_2 = \omega_1^2$$

$$\mathcal{D}_0 z \cdot \mathcal{D}_2 z = \overline{\mathcal{D}_1 z}^2 \quad \mathcal{C}_0 z \cdot \mathcal{C}_2 z = \overline{\mathcal{C}_1 z}^2 \quad \mathcal{L}_0 z \cdot \mathcal{L}_2 z = \overline{\mathcal{L}_1 z}^2 \quad \text{etc.}$$

Plus généralement on peut associer à toute forme  $\omega$  une forme *inverse*  $\bar{\omega}$  telle que  $\bar{\omega} \omega = \omega_1^2$ , les paramètres différentiels attachés à ces formes satisfaisant aux dernières des relations précédentes.

Dans le cas d'une forme  $\omega$  quelconque, la théorie générale montre

<sup>1</sup> Les invariants  $I_1$ ,  $k_1$ ,  $h_1$ ,  $j_1$  sont les composantes du tenseur  $\nabla g$ ,  $+ \mathbf{f}_1^2 - \mathbf{g}_1^2$ , de sorte que

$$\nabla g_1 + \mathbf{f}_1^2 - \mathbf{g}_1^2 = I_1 \frac{td - dt}{2} + k_1 \frac{d^2 + t^2}{2} + h_1 \frac{d^2 - t^2}{2} + j_1 \frac{td + dt}{2}.$$

que jusqu'à l'ordre  $n$  inclus, on doit régulièrement<sup>1</sup> prévoir  $n(n-2)$  invariants, dont 2 ( $n-1$ ) nouveaux d'ordre  $n$ ; si un  $ds^2$  est adjoint, le nombre des invariants du système s'élève à  $\frac{n(3n-1)}{2}$ , dont  $3n-2$  nouveaux d'ordre  $n$ ; par suite les seminvariants sont au nombre de  $3n$ , dont 3 nouveaux pour chaque ordre. Cette régularité n'est d'ailleurs pas acquise pour les premiers ordres; c'est ainsi que pour l'ordre  $un$  existe le seul seminvariant  $S = \frac{4P}{W^2}$ , que nous avons réduit à l'unité pour les formes semi-normales.

## VI. FORMES DE PFAFF ADJOINTES — OPÉRATEURS ET INVARIANTS — $d\sigma^2$ CANONIQUE A UNE FORME.

15. Dans le réseau angulaire attaché à un faisceau simple de courbes, nous avons déjà eu à considérer le faisceau simple des trajectoires orthogonales des courbes de la première famille. Entre les invariants et les opérateurs appartenant à ces deux faisceaux, des rapprochements intéressants sont à faire. Pour simplifier le langage, nous dirons que des formes de Pfaff  $\omega$  et  $\chi$  sont *orthogonales* si les courbes intégrales des deux équations  $\omega = 0$  et  $\chi = 0$  sont deux faisceaux de trajectoires orthogonales; en outre, à toute forme  $\omega$  nous associerons plus particulièrement une des formes orthogonales  $\omega_i$ , que nous dirons *adjointe positive* de  $\omega$  ( $\omega$  étant l'*adjointe négative* de  $\omega_i$ ), telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega = xdf = Adu + Bdv \\ \omega_i = ydg = i(-Adu + Bdv) = A_i du + B_i dv \end{array} \right. \quad (67)$$

et nous affecterons de l'indice  $i$  les expressions relatives à cette forme  $\omega_i$ ; on aura les relations

$$P_i = P \quad Q_i = -Q$$

et comme

$$A = xf_u = iyg_u \quad B = xf_v = -iyg_v$$

on voit, en posant

$$p = xy \quad q = \frac{x}{y} \quad (68)$$

<sup>1</sup> Quand il y a  $k$  équations de conditions pour exprimer la conservation d'un système par les transformations (3), le nombre des invariants à prévoir jusqu'à l'ordre  $n$  inclus est  $k \frac{n(n+1)}{2} - 2n$ . (Cf. la note du n° 4).