

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 30 (1931)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: APPLICATION A LA REPRÉSENTATION CONFORME DES TRANSFORMATIONS A VARIABLES SÉPARÉES

Autor: Delens, P. C.

Kapitel: II. Invariants et opérateurs différentiels d'une forme de Pfaff.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-23887>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 13.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Dans le cas où l'on considère deux vecteurs \mathbf{a} et $\mathbf{b} = \mathbf{J}\mathbf{a}$ d'un *simili-repère*, on a d'ailleurs (les rotationnels étant *superficiels*)

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \operatorname{rot} \mathbf{b} \quad \operatorname{div} \mathbf{b} = -\operatorname{rot} \mathbf{a} , \quad (15)$$

et pour un gradient ∇f on a toujours la condition d'intégrabilité

$$\operatorname{rot} \nabla f = 0 . \quad (16)$$

On connaît d'autre part (*Thèse*) les relations entre les notations vectorielles: produit extérieur de vecteurs, rotationnel — et celles introduites par M. E. Cartan pour les formes de Pfaff: produit extérieur, différentiation extérieure; elles tiennent essentiellement aux formules

$$\begin{cases} df = \nabla f \times d\mathbf{m} \\ \varpi = \mathbf{a} \times d\mathbf{m} = xdf \quad \mathbf{a} = x\nabla f . \end{cases} \quad (17)$$

Aux formules (14) correspond, en calcul vectoriel

$$\nabla g = q \mathbf{J} \nabla f \quad (14')$$

et (12) s'en déduit en prenant les rotationnels des deux membres.

II. INVARIANTS ET OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS D'UNE FORME DE PFAFF.

4. Nous dirons que les courbes intégrales d'une équation de Pfaff $\varpi = o$ forment sur la surface un faisceau (simple); la donnée d'une fonction f de u, v (ou de la variable géométrique \mathbf{m}) est équivalente à celle des intégrales $f = \text{const.}$, prises *individuellement*, de l'équation $df = 0$; au contraire, la donnée d'une équation de Pfaff $\varpi = xdf = 0$, revient seulement à celle de *l'ensemble* des courbes intégrales du faisceau.

Soit à conserver, par les transformations conformes (3), une forme de Pfaff

$$\varpi = A(u, v) du + B(u, v) dv \quad (18)$$

à laquelle nous avons attaché deux opérateurs différentiels du 1^{er} ordre, \mathfrak{D}_u et \mathfrak{D}_v , donnant d'une fonction z les paramètres différentiels

$$\mathfrak{D}_u z = \frac{z_u}{A} \quad \mathfrak{D}_v z = \frac{z_v}{B} . \quad (19)$$

Nous avons montré l'existence, pour ces transformations conformes, de deux invariants *essentiels* d'ordre deux¹

$$\alpha = \frac{B_u}{AB} = \frac{1}{A} (\log B)_u = \mathfrak{S}_u \log B \quad \beta = \frac{A_v}{AB} = \frac{1}{B} (\log A)_v = \mathfrak{S}_v \log A \quad (20)$$

à partir desquels les invariants d'ordre supérieur se forment par le jeu des opérateurs différentiels \mathfrak{S}_u et \mathfrak{S}_v ; l'itération de ceux-ci fournit des opérateurs d'ordre supérieur ou des combinaisons linéaires, à coefficients invariants, des opérateurs précédents; nous avions posé

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathfrak{S}_u \mathfrak{S}_v) = \mathfrak{S}_u \mathfrak{S}_v - \mathfrak{S}_v \mathfrak{S}_u = \beta \mathfrak{S}_u - \alpha \mathfrak{S}_v \\ \mathfrak{S}_{uv} = \frac{1}{2} (\mathfrak{S}_u \mathfrak{S}_v + \mathfrak{S}_v \mathfrak{S}_u + \beta \mathfrak{S}_u + \alpha \mathfrak{S}_v) \end{array} \right. \quad (21)$$

l'opérateur linéaire du 2^e ordre, \mathfrak{S}_{uv} , donnant pour une fonction z

$$\mathfrak{S}_{uv} z = \frac{z_{uv}}{AB} . \quad (21')$$

Les opérateurs \mathfrak{S}_u et \mathfrak{S}_v étaient des symboles de transformations infinitésimales agissant respectivement le long des lignes minima $v = \text{const.}$ et $u = \text{const.}$; nous leur substituerons des symboles de transformations agissant le long des lignes du faisceau $\varpi = 0$ et de leurs trajectoires orthogonales, en posant

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{O} = \frac{1}{2} (\mathfrak{S}_u + \mathfrak{S}_v) \\ \mathfrak{C} = \frac{i}{2} (\mathfrak{S}_u - \mathfrak{S}_v) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{S}_u = \mathcal{O} - i\mathfrak{C} \\ \mathfrak{S}_v = \mathcal{O} + i\mathfrak{C} \end{array} \right. . \quad (22)$$

Nous prendrons aussi pour invariants essentiels du second ordre

$$\left\{ \begin{array}{l} D = \frac{1}{2} (\alpha + \beta) \\ T = \frac{i}{2} (\alpha - \beta) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = D - iT \\ \beta = D + iT \end{array} \right. . \quad (23)$$

¹ Contrairement à ce que nous avons fait précédemment (*Equivalences*), l'ordre attribué aux invariants d'une forme ou équation différentielle du 1^{er} ordre est l'ordre de dérivation, *augmenté d'une unité*; cette modification s'impose ici où nous avons parfois à considérer les invariants de formes finies (d'ordre zéro).

5. Aux formules (21) correspondent

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathcal{O}\mathcal{C}) = \mathcal{O}\mathcal{C} - \mathcal{C}\mathcal{O} = T\mathcal{O} - D\mathcal{C} \\ \mathcal{L} = \mathcal{O}^2 + \mathcal{C}^2 + D\mathcal{O} + T\mathcal{C} \end{array} \right. \quad (24)$$

avec

$$(\mathcal{O}\mathcal{C}) = -\frac{i}{2}(\mathfrak{S}_u \mathfrak{S}_v) \quad \mathcal{L} = \mathfrak{S}_{uv} ; \quad (24')$$

mais nous introduirons trois opérateurs distincts du 2^e ordre, \mathcal{L} , \mathcal{M} , \mathcal{N} et un quatrième opérateur \mathcal{O} identiquement nul, avec les relations

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L} = \mathcal{O}^2 + \mathcal{C}^2 + D\mathcal{O} + T\mathcal{C} = \frac{1}{2}(\mathfrak{S}_u \mathfrak{S}_v + \mathfrak{S}_v \mathfrak{S}_u + \beta \mathfrak{S}_u + \alpha \mathfrak{S}_v) \\ \mathcal{M} = \mathcal{O}^2 - \mathcal{C}^2 + D\mathcal{O} - T\mathcal{C} = \frac{1}{2}(\mathfrak{S}_u^2 + \mathfrak{S}_v^2 + \alpha \mathfrak{S}_u + \beta \mathfrak{S}_v) \\ \mathcal{N} = \mathcal{O}\mathcal{C} + \mathcal{C}\mathcal{O} + T\mathcal{O} + D\mathcal{C} = \frac{i}{2}(\mathfrak{S}_u^2 - \mathfrak{S}_v^2 + \alpha \mathfrak{S}_u - \beta \mathfrak{S}_v) \\ \mathcal{O} = \mathcal{O}\mathcal{C} - \mathcal{C}\mathcal{O} - T\mathcal{O} + D\mathcal{C} = -\frac{i}{2}(\mathfrak{S}_u \mathfrak{S}_v - \mathfrak{S}_v \mathfrak{S}_u - \beta \mathfrak{S}_u + \alpha \mathfrak{S}_v) = 0 \end{array} \right. \quad (25)$$

En posant, pour le produit et le quotient des coefficients de la forme ϖ

$$P = AB \quad Q = \frac{A}{B} \quad (26)$$

les invariants du 2^e ordre s'expriment maintenant par

$$\left\{ \begin{array}{l} D = \frac{1}{2}(\mathcal{O} \log P + i\mathcal{C} \log Q) \\ T = \frac{1}{2}(\mathcal{C} \log P - i\mathcal{O} \log Q) \end{array} \right. \quad (27)$$

Les quatre invariants distincts du 3^e ordre précédemment introduits (et désignés alors par $\omega = \mathfrak{S}_u \alpha$, $\theta = \mathfrak{S}_u \beta$, $\varphi = \mathfrak{S}_v \alpha$, $\psi = \mathfrak{S}_v \beta$) s'expriment par

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{S}_u \alpha = \mathcal{O}D - \mathcal{C}T - i(\mathcal{O}T + \mathcal{C}D) \quad \mathfrak{S}_u \beta = \mathcal{O}D + \mathcal{C}T + i(\mathcal{O}T - \mathcal{C}D) \\ \mathfrak{S}_v \alpha = \mathcal{O}D + \mathcal{C}T - i(\mathcal{O}T - \mathcal{C}D) \quad \mathfrak{S}_v \beta = \mathcal{O}D - \mathcal{C}T + i(\mathcal{O}T + \mathcal{C}D) \end{array} \right. \quad (28)$$

d'où

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{O}D = \frac{1}{4}(\mathfrak{S}_u \beta + \mathfrak{S}_v \alpha + \mathfrak{S}_u \alpha + \mathfrak{S}_v \beta) \quad \mathcal{O}T = -\frac{i}{4}(\mathfrak{S}_u \beta - \mathfrak{S}_v \alpha - \mathfrak{S}_u \alpha + \mathfrak{S}_v \beta) \\ \mathcal{C}D = \frac{i}{4}(\mathfrak{S}_u \beta - \mathfrak{S}_v \alpha + \mathfrak{S}_u \alpha - \mathfrak{S}_v \beta) \quad \mathcal{C}T = \frac{1}{4}(\mathfrak{S}_u \beta + \mathfrak{S}_v \alpha - \mathfrak{S}_u \alpha - \mathfrak{S}_v \beta) \end{array} \right. \quad (28')$$

dont les combinaisons les plus utiles sont

$$\left\{ \begin{array}{l} -I = \mathcal{O}T - \mathcal{C}D = -\frac{i}{2}(\mathfrak{I}_u\beta - \mathfrak{I}_v\alpha) \\ -k = \mathcal{O}D + \mathcal{C}T + D^2 + T^2 = \frac{1}{2}(\mathfrak{I}_u\beta + \mathfrak{I}_v\alpha + 2\alpha\beta) \\ -h = \mathcal{O}D - \mathcal{C}T + D^2 - T^2 = \frac{1}{2}(\mathfrak{I}_u\alpha + \mathfrak{I}_v\beta + \alpha^2 - \beta^2) \\ -j = \mathcal{O}T + \mathcal{C}D + 2DT = \frac{i}{2}(\mathfrak{I}_u\alpha - \mathfrak{I}_v\beta + \alpha^2 - \beta^2) \end{array} \right. \quad (29)$$

soit, en fonction de P et Q et des opérateurs \mathcal{L} , \mathcal{M} , \mathcal{N}

$$\left\{ \begin{array}{l} -I = -\frac{i}{2}\mathcal{L}\log Q \\ -k = \frac{i}{2}\mathcal{L}\log P \\ -h = \frac{1}{2}(\mathcal{M}\log P + i\mathcal{N}\log Q) \\ -j = \frac{1}{2}(\mathcal{N}\log P - i\mathcal{M}\log Q) \end{array} \right. \quad (30)$$

Les deux premiers de ces invariants, I et k , sont particulièrement intéressants; nous ne formerons pas ici les invariants et opérateurs d'ordre supérieur.

III. FORMES DE PFAFF PROPORTIONNELLES. — EQUATION DE PFAFF. — ADJONCTION D'UN ds^2 .

6. Si au lieu d'une forme ϖ on veut conserver, par les transformations conformes, une équation de Pfaff $\varpi = 0$, les invariants de cette équation sont compris dans ceux de la forme ϖ , et on peut les considérer comme communs à toutes les formes proportionnelles $\varpi = x\varpi_0$, c'est-à-dire indépendants du facteur arbitraire x . On pourra choisir pour ϖ_0 une forme ϖ particulière, et nous le ferons dans la suite; pour l'instant, laissant aux formes ϖ et ϖ_0 toute leur généralité, nous allons établir les relations entre les opérateurs différentiels de ces formes ϖ et ϖ_0 , puis entre les invariants de ces formes.

Soient donc les formes de Pfaff

$$\begin{aligned} \varpi_0 &= A_0 du + B_0 dv & \varpi &= A du + B dv = x\varpi_0 \\ A &= xA_0 & B &= xB_0 & P &= x^2 P_0 & Q &= Q_0 \end{aligned} \quad (31)$$