

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 30 (1931)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** APPLICATION A LA REPRÉSENTATION CONFORME DES TRANSFORMATIONS A VARIABLES SÉPARÉES  
**Autor:** Delens, P. C.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-23887>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 18.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# APPLICATION A LA PRÉSENTATION CONFORME DES TRANSFORMATIONS A VARIABLES SÉPARÉES

PAR

P. C. DELENS (Le Havre).

## SOMMAIRE.

I. Nous avons, dans un précédent mémoire<sup>1</sup>, étudié systématiquement les procédés de formation des invariants de formes et d'équations différentielles du 1<sup>er</sup> ordre pour les transformations à variables séparées

$$\bar{u} = U(u) \quad \bar{v} = V(v) \quad (3)$$

et nous avons indiqué, dans les cas les plus simples, comment se posaient, au moyen de ces invariants, les problèmes d'équivalence des systèmes considérés. Nous faisons ici une application des résultats obtenus à la représentation conforme des surfaces (ou du plan), les variables  $u, v$  jouant le rôle de coordonnées symétriques; dans ce but nous modifions d'abord les procédés exposés pour montrer l'emploi et le rôle des paramètres différentiels de la théorie des surfaces. Bien qu'il apparaisse nettement que les invariants d'un même ordre sont les coefficients de formes ou d'équations différentielles invariantes, nous n'avons usé qu'avec modération des méthodes vectorielles ou tensorielles dont ceci permettait l'introduction: pour un exposé plus complet, nous renvoyons le lecteur à notre thèse<sup>2</sup>.

II. En considérant d'abord une forme de Pfaff  $\varpi$ , celle-ci est évidemment liée au faisceau des courbes intégrales de l'équation  $\varpi = 0$ ; aux opérateurs invariants  $\mathfrak{I}_u, \mathfrak{I}_v$  attachés à cette forme et définissant des transformations infinitésimales le long des lignes

<sup>1</sup> Equivalences de formes et d'équations différentielles par les transformations à variables séparées: *L'Enseignement Mathématique*, XXVII, nos 4-5-6. Référence: (*Equivalences*).

<sup>2</sup> Méthodes et problèmes des géométries différentielles euclidienne et conforme (Paris, Gauthier-Villars, 1927). Référence: (*Thèse*).

minima, nous substituons d'abord des opérateurs agissant le long des courbes du faisceau  $\varpi = 0$  et de leurs trajectoires orthogonales: il s'ensuit une modification correspondante des invariants obtenus par le jeu de ces opérateurs à partir des coefficients de la forme.

III. Nous montrons ensuite comment se modifient les opérateurs et les invariants d'une forme  $\varpi$  quand on remplace celle-ci par une forme proportionnelle. Cette méthode, que nous avions laissée de côté dans notre premier mémoire, trouve dans la suite diverses applications et mène en particulier à un nouveau procédé d'étude pour une équation de Pfaff invariante.

Un  $ds^2$  adjoint est-il à conserver par les transformations (3) en même temps qu'une forme  $\varpi$ , on retrouve un problème d'applicabilité des surfaces; les invariants du système  $\varpi$ ,  $ds^2$  comprennent alors des *invariants conformes* de  $\varpi$ , des *invariants gaussiens* (invariants conformes du  $ds^2$ ) et des invariants mixtes ou *seminvariants* de  $\varpi$ .

IV. Pour une forme  $\varpi_0$  différentielle exacte, les invariants des premiers ordres sont ainsi calculés au moyen des symboles  $\Delta$ ,  $\Theta$ ,  $\Delta_2$ , etc. de la théorie des surfaces (symboles que nous modifions légèrement dans le texte); on reconnaît déjà les combinaisons de ces symboles qui fournissent les invariants conformes. Nous trouvons des relations utiles (formules (44), (44')) entre les paramètres différentiels d'ordre supérieur. Nous donnons aussi pour la courbure totale la formule très générale

$$K = \Delta_2 \log \sqrt{\Delta f} - \frac{\overline{\Delta_2 f}^2}{\Delta f} - \Delta \left( f, \frac{\Delta_2 f}{\Delta f} \right) \quad (52)$$

où la fonction  $f$  des coordonnées curvilignes est *arbitraire*<sup>1</sup> (mais non constante).

V. Les invariants de déformation d'une équation  $\varpi = 0$  sont ceux d'une forme de Pfaff *semi-normale*  $\varpi_1$  proportionnelle à  $\varpi$  et normée vis-à-vis du  $ds^2$ ; les invariants du 1<sup>er</sup> ordre de cette forme sont des courbures géodésiques. Nous revenons ici sur la notion de *réseau angulaire* de courbes (*Thèse*) et du vecteur de courbure géodésique de ce réseau, les formules vectorielles

$$\mathbf{g}_1 = -\frac{\Delta_2 f}{\Delta f} \nabla f + \frac{1}{2} \nabla \log \Delta f \quad (63) \qquad K = \operatorname{div} \mathbf{g}_1 \quad (65')$$

conduisant aussitôt à la formule précédente (52).

---

<sup>1</sup> L'apparence paradoxale de ce résultat disparaît si on remarque que les opérateurs  $\Delta$  et  $\Delta_2$  dépendent des coefficients du  $ds^2$ .

Signalons encore la formule

$$\mathbf{g}_1 = -\nabla \log W + J \nabla \varphi \quad (61)$$

où les éléments géométriques de la courbure géodésique sont particulièrement en évidence.

VI. A la forme  $\varpi$  d'une équation  $\varpi = 0$  nous rattachons la forme *adjointe*  $\varpi_i$  des trajectoires orthogonales  $\varpi_i = 0$  du premier faisceau de courbes; les opérateurs et invariants des deux formes sont liés très simplement. Aux deux formes est attaché un  $d\sigma^2$  canonique sur lequel les deux formes sont semi-normales. Nous ne pouvons manquer de revenir ici sur les éléments vectoriels, et étudions également les notations convenables pour les opérateurs différentiels attachés aux formes de Pfaff, en liaison avec le  $d\sigma^2$  canonique. Nous donnons différentes expressions d'un seminvariant  $I_1 = \Delta_2 \varphi$  qui présente un intérêt particulier dans la représentation conforme.

VII. Un faisceau isotherme de courbes  $\vartheta = 0$  est caractérisé par la condition invariante  $I = 0$ , ou  $I_1 = 0$ , c'est-à-dire  $\Delta_2 \varphi = 0$ ; à un tel faisceau se rattache un réseau angulaire isotherme et plus généralement un *ensemble* ( $I = 0$ ) isotherme; nous rappelons rapidement les propriétés d'un tel faisceau, qui ne possède aucun invariant conforme.

VIII. Si un faisceau  $\varpi = 0$  n'est pas isotherme, il existe une forme *normale*

$$\varpi^* = \sqrt{I} \varpi \quad (99)$$

dont les invariants conformes sont ceux de l'équation  $\varpi = 0$ ; sur un  $d\sigma^{*2}$  canonique à  $\varpi^*$ , cette forme est en même temps semi-normale; pour les courbes d'un même *ensemble* ( $I_1$ ) on peut introduire la notion d'arc conforme. Le  $d\sigma^{*2}$  canonique peut être utilisé pour la classification des faisceaux de courbes vis-à-vis des transformations conformes, problème qui se formule comme un problème d'équivalence avec conservation du  $d\sigma^{*2}$ .

IX. L'interprétation géométrique des éléments introduits jusqu'ici introduit la notion d'*isoclines conformes* d'un faisceau de courbes par rapport à un faisceau isotherme; mais les problèmes de représentation conforme ne se ramènent pas toujours aussitôt à des égalités d'angles, et la manière dont se modifient des quantités non invariantes offre aussi de l'intérêt. C'est ainsi qu'on reconnaît qu'un faisceau arbitraire  $\varpi = 0$  peut être représenté conformément suivant un faisceau de géodésiques: nous montrons comme application qu'on peut compléter, au moyen d'une représentation conforme, la solution du problème

des congruences de normales attachées aux points d'une surface (je ne dis pas les normales de la surface).

Il est connu que les *réseaux cerclés* de courbes d'une surface se transforment les uns dans les autres par les représentations conformes de la surface: nous nous contenterons de quelques indications sur cette théorie récente.

X. Comme nous l'avons fait dans notre première Etude, nous montrons comment les invariants et opérateurs des formes et équations quadratiques se rattachent à ceux de formes et d'équations linéaires; au double faisceau de courbes défini par une équation quadratique, on doit, au point de vue géométrique, joindre d'abord la considération des faisceaux bissecteurs et du faisceau formé par les courbes le long desquelles l'angle  $2\omega$  du faisceau initial est constant. Ici encore, on retrouve des formes normales et un  $d^*\sigma^2$  canonique. Pour l'isothermie, on peut considérer une *hémi-isothermie* et une *holo-isothermie*.

XI. Nous sommes maintenant en présence de deux faisceaux du 2<sup>me</sup> ordre, celui des lignes minima et le faisceau  $\alpha^{(2)} = 0$  à conserver; pour les formes correspondantes  $ds^2 = W^2 du dv$  et  $\alpha^{(2)} = C^2 d\xi d\eta$ , il est intéressant de montrer les relations entre les invariants calculés à partir des changements de variables portant soit sur  $u, v$ , soit sur  $\xi, \eta$ . Cette symétrie du problème a déjà été préparée dans les numéros précédents: elle prépare son extension à des questions analogues, où ne figureraient plus nécessairement les lignes minima.

Les méthodes exposées peuvent aussi se prolonger pour l'étude de formes et d'équations différentielles de degré supérieur.

## I. NOTATIONS — PRÉLIMINAIRES.

1. Le  $ds^2$  d'une surface étant pris sous la forme

$$ds^2 = W^2 du dv = W^2(dX^2 + dY^2) \quad (1)$$

les paramètres  $u, v$  sont ceux des lignes minima de la surface, et les variables  $X, Y$  telles que

$$\left\{ \begin{array}{l} u = X + iY \\ v = X - iY \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} X = \frac{1}{2}(u + v) \\ Y = -\frac{i}{2}(u - v) \end{array} \right. \quad (2)$$

sont des paramètres isothermiques (ou isométriques). Un changement de variables

$$\bar{u} = U(u) \quad \bar{v} = V(v) \quad (3)$$

réalise une représentation conforme (directe) de la surface, autrement dit une transformation conforme *superficie*; de telles transformations constituent une application importante de la théorie des transformations à variables séparées, dont nous avons commencé l'étude dans un précédent Mémoire (*Equivalences*).

Nous considérons en général des variables  $X, Y$  réelles, donc des variables  $u, v$  imaginaires conjuguées (coordonnées symétriques); pour les courbes réelles tracées sur une surface réelle, ou du moins celles données, avec des variables réelles, par des équations à coefficients réels, il y a lieu de modifier les notations et les résultats déjà acquis pour mettre en évidence, autant que possible, des invariants réels. Nous sommes ainsi amené à faire usage des paramètres différentiels de la théorie des surfaces.

D'autre part, il est parfois préférable d'établir entre les variables,  $\bar{u}, \bar{v}, X, iY$  des relations plus symétriques que celles des formules (2), soit

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} (X + iY) \\ \bar{v} = \frac{1}{\sqrt{2}} (X - iY) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} X = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{u} + \bar{v}) \\ iY = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{u} - \bar{v}) \end{array} \right. . \quad (2')$$

Pour ne pas charger les formules de coefficients  $\varepsilon$  auxquels on pourrait donner ensuite, suivant les cas, les valeurs 1 ou  $\sqrt{2}$ , nous en resterons aux notations (2), en remarquant qu'on passerait aux formules (2') par la transformation

$$\bar{u} = \frac{u}{\sqrt{2}} \quad \bar{v} = \frac{v}{\sqrt{2}} \quad (3')$$

ne modifiant pas les invariants que nous allons calculer, et introduisant pour les comitants (covariants, contrevariants, etc.) des changements simples.

2. Les dérivées partielles par rapport à des variables  $u, v, X, Y, f, g$ , seront indiquées par des indices inférieurs, par exemple

$$f_u = \frac{\partial f}{\partial u}, \quad f_{uv} = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}, \quad f_x = \frac{\partial f}{\partial X}, \quad z_{fg} = \frac{\partial^2 z}{\partial f \partial g}, \quad \text{etc.}$$

et nous écrirons sous les formes suivantes les principaux paramètres différentiels employés<sup>1</sup>

$$\Delta f = \frac{4f_u f_v}{W^2} \quad \Delta'(f, z) = \frac{2(f_u z_v + f_v z_u)}{W^2} \quad \Theta'(f, z) = \frac{-2i(f_u z_v - f_v z_u)}{W^2} \quad (4)$$

paramètres du 1<sup>er</sup> ordre, donnant la relation connue

$$\overline{\Delta'(f, z)^2} + \overline{\Theta'(f, z)^2} = \Delta f \cdot \Delta z . \quad (5)$$

Les paramètres du 2<sup>e</sup> ordre d'une fonction  $f$  sont ensuite

$$\Lambda f = \frac{4f_{uv}}{W^2} \quad \Delta^2 f = \Delta \Delta f \quad \Delta'' f = \Delta'(f, \Delta f) \quad \Theta'' f = \Theta'(f, \Delta f) \quad (6)$$

liés par la relation

$$\overline{\Delta'' f^2} + \overline{\Theta'' f^2} = \Delta f \cdot \Delta^2 f . \quad (7)$$

On a d'ailleurs, dans le cas  $W^2 = 1$ , pour les numérateurs de certaines des expressions précédentes

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_0 f = 4f_u f_v = f_x^2 + f_y^2 \quad \Lambda_0 f = 4f_{uv} = f_{x^2} + f_{y^2} \\ \Delta'_0(f, z) = 2(f_u z_v + f_v z_u) = f_x z_x + f_y z_y \\ \Theta'_0(f, z) = -2i(f_u z_v - f_v z_u) = f_x z_y - f_y z_x = -2i \frac{D(f, z)}{D(u, v)} = \frac{D(f, z)}{D(X, Y)} \end{array} \right. \quad (8)$$

formules qui permettent le développement des calculs et leur vérification, pour les expressions indépendantes de  $W^2$  obtenues dans la géométrie de la représentation conforme.

A côté des expressions précédentes, citons encore les suivantes, également entières par rapport aux dérivées partielles des fonctions auxquelles elles se rapportent

$$\Gamma f = \Delta'' f - 2\Delta f \cdot \Lambda f \quad \Sigma f = \frac{\Delta^2 f - 2\Delta'' f \cdot \Lambda f}{4\Delta f} \quad (9)$$

et, pour  $W^2 = 1$ , les développements

$$\left\{ \begin{array}{l} \Theta''_0 f = -8i(f_{u^2} f_v^2 - f_{v^2} f_u^2) \quad \Gamma_0 f = 8(f_{u^2} f_v^2 + f_{v^2} f_u^2 - 2f_{uv} f_u f_v) \\ \Sigma_0 f = 2i\Theta'_0(f_u, f_v) = -\Theta'_0(f_x, f_y) \end{array} \right. \quad (10)$$

<sup>1</sup> A nos notations  $\Delta f$ ,  $\Delta'(f, z)$ ,  $\Theta'(f, z)$ ,  $\Lambda f$ ,  $\Sigma f$  correspondent les notations de Darboux  $\Delta f$ ,  $\Delta(f, z)$ ,  $\Theta(f, z)$ ,  $\Delta_2 f$ ,  $\sigma(f)$  ce dernier paramètre étant écrit  $-\Delta_{22} f$  par L. Bianchi.

En introduisant une fonction  $g$  telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} g_x = -qf_y \\ g_y = qf_x \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} g_u = -iqf_u \\ g_v = iqf_v \end{array} \right. \quad (11)$$

la fonction  $q$  est astreinte à vérifier l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta f + \Delta'(f, \log q) = 0 \quad (12)$$

et l'on a, entre autres relations

$$\Theta'' g = q^3 \Gamma f. \quad (13)$$

Nous introduirons, chemin faisant, les expressions utiles pour la géométrie conforme, c'est-à-dire *la géométrie de la représentation conforme*, que nous désignerons dans la suite sous ce nom.

3. Sans développer ici les méthodes de calcul géométrique (calcul vectoriel), nous rappellerons que si la surface considérée est décrite par le point variable  $\mathbf{m}$ , de masse unité, fonction des variables  $u, v$  ou  $X, Y$ , une fonction géométrique (scalaire ou vectorielle) de ce point donne naissance aux fonctions dérivées *superficielles*

$$\nabla \Phi = \frac{d\Phi}{d\mathbf{m}} \quad \nabla^2 \Phi = \frac{d^2 \Phi}{d\mathbf{m}^2} \quad \text{etc.}$$

Pour des vecteurs  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ , de la surface (à  $ds^2$  donné), on peut considérer les produit et carré intérieurs  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{a}^2$ , le produit extérieur  $[\mathbf{ab}]$ ; les relations entre les produits intérieur et extérieur sont mises en évidence au moyen du verseur  $J$ , produisant la rotation directe d'un angle droit du vecteur qui lui est soumis.

Pour l'exploration de la surface au moyen d'un *repère* associé au point  $\mathbf{m}$ , et formé avec deux vecteurs *unitaires*  $\mathbf{d}$  et  $\mathbf{t} = J\mathbf{d}$ , considérons le cas où le vecteur  $\mathbf{d}$  a la direction et le sens du gradient  $\nabla f$  d'une fonction scalaire  $f$ <sup>1</sup>; alors

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla f = \sqrt{\Delta f} \cdot \mathbf{d} = \frac{df}{ds_d} \cdot \mathbf{d} & \\ \Delta'(f, z) = \nabla f \times \nabla z & \text{produit intérieur de gradients} \\ \Theta'(f, z) = [\nabla f, \nabla z] & \text{produit extérieur de gradients} \\ \Delta f = \operatorname{div} \nabla f & \text{divergence de gradient.} \end{array} \right. \quad (14)$$

<sup>1</sup> Si  $\mathbf{d}$  a le sens opposé de  $\Delta f$ , la détermination du radical  $\sqrt{\Delta f}$  est à changer.

Dans le cas où l'on considère deux vecteurs  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b} = \mathbf{J}\mathbf{a}$  d'un *simili-repère*, on a d'ailleurs (les rotationnels étant *superficiels*)

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \operatorname{rot} \mathbf{b} \quad \operatorname{div} \mathbf{b} = -\operatorname{rot} \mathbf{a}, \quad (15)$$

et pour un gradient  $\nabla f$  on a toujours la condition d'intégrabilité

$$\operatorname{rot} \nabla f = 0. \quad (16)$$

On connaît d'autre part (*Thèse*) les relations entre les notations vectorielles: produit extérieur de vecteurs, rotationnel — et celles introduites par M. E. Cartan pour les formes de Pfaff: produit extérieur, différentiation extérieure; elles tiennent essentiellement aux formules

$$\begin{cases} df = \nabla f \times d\mathbf{m} \\ \varpi = \mathbf{a} \times d\mathbf{m} = xdf \quad \mathbf{a} = x\nabla f. \end{cases} \quad (17)$$

Aux formules (14) correspond, en calcul vectoriel

$$\nabla g = q \mathbf{J} \nabla f \quad (14')$$

et (12) s'en déduit en prenant les rotationnels des deux membres.

## II. INVARIANTS ET OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS D'UNE FORME DE PFAFF.

4. Nous dirons que les courbes intégrales d'une équation de Pfaff  $\varpi = o$  forment sur la surface un faisceau (simple); la donnée d'une fonction  $f$  de  $u, v$  (ou de la variable géométrique  $\mathbf{m}$ ) est équivalente à celle des intégrales  $f = \text{const.}$ , prises *individuellement*, de l'équation  $df = 0$ ; au contraire, la donnée d'une équation de Pfaff  $\varpi = xdf = 0$ , revient seulement à celle de *l'ensemble* des courbes intégrales du faisceau.

Soit à conserver, par les transformations conformes (3), une forme de Pfaff

$$\varpi = A(u, v) du + B(u, v) dv \quad (18)$$

à laquelle nous avons attaché deux opérateurs différentiels du 1<sup>er</sup> ordre,  $\mathfrak{D}_u$  et  $\mathfrak{D}_v$ , donnant d'une fonction  $z$  les paramètres différentiels

$$\mathfrak{D}_u z = \frac{z_u}{A} \quad \mathfrak{D}_v z = \frac{z_v}{B}. \quad (19)$$

Nous avons montré l'existence, pour ces transformations conformes, de deux invariants *essentiels* d'ordre deux<sup>1</sup>

$$\alpha = \frac{B_u}{AB} = \frac{1}{A} (\log B)_u = \mathfrak{S}_u \log B \quad \beta = \frac{A_v}{AB} = \frac{1}{B} (\log A)_v = \mathfrak{S}_v \log A \quad (20)$$

à partir desquels les invariants d'ordre supérieur se forment par le jeu des opérateurs différentiels  $\mathfrak{S}_u$  et  $\mathfrak{S}_v$ ; l'itération de ceux-ci fournit des opérateurs d'ordre supérieur ou des combinaisons linéaires, à coefficients invariants, des opérateurs précédents; nous avions posé

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathfrak{S}_u \mathfrak{S}_v) = \mathfrak{S}_u \mathfrak{S}_v - \mathfrak{S}_v \mathfrak{S}_u = \beta \mathfrak{S}_u - \alpha \mathfrak{S}_v \\ \mathfrak{S}_{uv} = \frac{1}{2} (\mathfrak{S}_u \mathfrak{S}_v + \mathfrak{S}_v \mathfrak{S}_u + \beta \mathfrak{S}_u + \alpha \mathfrak{S}_v) \end{array} \right. \quad (21)$$

l'opérateur linéaire du 2<sup>e</sup> ordre,  $\mathfrak{S}_{uv}$ , donnant pour une fonction  $z$

$$\mathfrak{S}_{uv} z = \frac{z_{uv}}{AB} . \quad (21')$$

Les opérateurs  $\mathfrak{S}_u$  et  $\mathfrak{S}_v$  étaient des symboles de transformations infinitésimales agissant respectivement le long des lignes minima  $v = \text{const.}$  et  $u = \text{const.}$ ; nous leur substituerons des symboles de transformations agissant le long des lignes du faisceau  $\varpi = 0$  et de leurs trajectoires orthogonales, en posant

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{O} = \frac{1}{2} (\mathfrak{S}_u + \mathfrak{S}_v) \\ \mathfrak{C} = \frac{i}{2} (\mathfrak{S}_u - \mathfrak{S}_v) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{S}_u = \mathcal{O} - i\mathfrak{C} \\ \mathfrak{S}_v = \mathcal{O} + i\mathfrak{C} \end{array} \right. . \quad (22)$$

Nous prendrons aussi pour invariants essentiels du second ordre

$$\left\{ \begin{array}{l} D = \frac{1}{2} (\alpha + \beta) \\ T = \frac{i}{2} (\alpha - \beta) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = D - iT \\ \beta = D + iT \end{array} \right. . \quad (23)$$

<sup>1</sup> Contrairement à ce que nous avons fait précédemment (*Equivalences*), l'ordre attribué aux invariants d'une forme ou équation différentielle du 1<sup>er</sup> ordre est l'ordre de dérivation, *augmenté d'une unité*; cette modification s'impose ici où nous avons parfois à considérer les invariants de formes finies (d'ordre zéro).

5. Aux formules (21) correspondent

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathcal{O}\mathcal{C}) = \mathcal{O}\mathcal{C} - \mathcal{C}\mathcal{O} = T\mathcal{O} - D\mathcal{C} \\ \mathcal{L} = \mathcal{O}^2 + \mathcal{C}^2 + D\mathcal{O} + T\mathcal{C} \end{array} \right. \quad (24)$$

avec

$$(\mathcal{O}\mathcal{C}) = -\frac{i}{2}(\mathfrak{S}_u \mathfrak{S}_v) \quad \mathcal{L} = \mathfrak{S}_{uv}; \quad (24')$$

mais nous introduirons trois opérateurs distincts du 2<sup>e</sup> ordre,  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{N}$  et un quatrième opérateur  $\mathcal{O}$  identiquement nul, avec les relations

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L} = \mathcal{O}^2 + \mathcal{C}^2 + D\mathcal{O} + T\mathcal{C} = \frac{1}{2}(\mathfrak{S}_u \mathfrak{S}_v + \mathfrak{S}_v \mathfrak{S}_u + \beta \mathfrak{S}_u + \alpha \mathfrak{S}_v) \\ \mathcal{M} = \mathcal{O}^2 - \mathcal{C}^2 + D\mathcal{O} - T\mathcal{C} = \frac{1}{2}(\mathfrak{S}_u^2 + \mathfrak{S}_v^2 + \alpha \mathfrak{S}_u + \beta \mathfrak{S}_v) \\ \mathcal{N} = \mathcal{O}\mathcal{C} + \mathcal{C}\mathcal{O} + T\mathcal{O} + D\mathcal{C} = \frac{i}{2}(\mathfrak{S}_u^2 - \mathfrak{S}_v^2 + \alpha \mathfrak{S}_u - \beta \mathfrak{S}_v) \\ \mathcal{O} = \mathcal{O}\mathcal{C} - \mathcal{C}\mathcal{O} - T\mathcal{O} + D\mathcal{C} = -\frac{i}{2}(\mathfrak{S}_u \mathfrak{S}_v - \mathfrak{S}_v \mathfrak{S}_u - \beta \mathfrak{S}_u + \alpha \mathfrak{S}_v) = 0 \end{array} \right. \quad (25)$$

En posant, pour le produit et le quotient des coefficients de la forme  $\varpi$

$$P = AB \quad Q = \frac{A}{B} \quad (26)$$

les invariants du 2<sup>e</sup> ordre s'expriment maintenant par

$$\left\{ \begin{array}{l} D = \frac{1}{2}(\mathcal{O} \log P + i\mathcal{C} \log Q) \\ T = \frac{1}{2}(\mathcal{C} \log P - i\mathcal{O} \log Q) \end{array} \right. \quad (27)$$

Les quatre invariants distincts du 3<sup>e</sup> ordre précédemment introduits (et désignés alors par  $\omega = \mathfrak{S}_u \alpha$ ,  $\theta = \mathfrak{S}_u \beta$ ,  $\varphi = \mathfrak{S}_v \alpha$ ,  $\psi = \mathfrak{S}_v \beta$ ) s'expriment par

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{S}_u \alpha = \mathcal{O}D - \mathcal{C}T - i(\mathcal{O}T + \mathcal{C}D) \quad \mathfrak{S}_u \beta = \mathcal{O}D + \mathcal{C}T + i(\mathcal{O}T - \mathcal{C}D) \\ \mathfrak{S}_v \alpha = \mathcal{O}D + \mathcal{C}T - i(\mathcal{O}T - \mathcal{C}D) \quad \mathfrak{S}_v \beta = \mathcal{O}D - \mathcal{C}T + i(\mathcal{O}T + \mathcal{C}D) \end{array} \right. \quad (28)$$

d'où

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{O}D = \frac{1}{4}(\mathfrak{S}_u \beta + \mathfrak{S}_v \alpha + \mathfrak{S}_u \alpha + \mathfrak{S}_v \beta) \quad \mathcal{O}T = -\frac{i}{4}(\mathfrak{S}_u \beta - \mathfrak{S}_v \alpha - \mathfrak{S}_u \alpha + \mathfrak{S}_v \beta) \\ \mathcal{C}D = \frac{i}{4}(\mathfrak{S}_u \beta - \mathfrak{S}_v \alpha + \mathfrak{S}_u \alpha - \mathfrak{S}_v \beta) \quad \mathcal{C}T = \frac{1}{4}(\mathfrak{S}_u \beta + \mathfrak{S}_v \alpha - \mathfrak{S}_u \alpha - \mathfrak{S}_v \beta) \end{array} \right. \quad (28')$$

dont les combinaisons les plus utiles sont

$$\left\{ \begin{array}{l} -I = \mathcal{O}T - \mathcal{C}D = -\frac{i}{2}(\mathfrak{Z}_u\beta - \mathfrak{Z}_v\alpha) \\ -k = \mathcal{O}D + \mathcal{C}T + D^2 + T^2 = \frac{1}{2}(\mathfrak{Z}_u\beta + \mathfrak{Z}_v\alpha + 2\alpha\beta) \\ -h = \mathcal{O}D - \mathcal{C}T + D^2 - T^2 = \frac{1}{2}(\mathfrak{Z}_u\alpha + \mathfrak{Z}_v\beta + \alpha^2 - \beta^2) \\ -j = \mathcal{O}T + \mathcal{C}D + 2DT = \frac{i}{2}(\mathfrak{Z}_u\alpha - \mathfrak{Z}_v\beta + \alpha^2 - \beta^2) \end{array} \right. \quad (29)$$

soit, en fonction de P et Q et des opérateurs  $\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$

$$\left\{ \begin{array}{l} -I = -\frac{i}{2}\mathcal{L}\log Q \\ -k = \frac{1}{2}\mathcal{L}\log P \\ -h = \frac{1}{2}(\mathcal{M}\log P + i\mathcal{N}\log Q) \\ -j = \frac{1}{2}(\mathcal{N}\log P - i\mathcal{M}\log Q) . \end{array} \right. \quad (30)$$

Les deux premiers de ces invariants, I et k, sont particulièrement intéressants; nous ne formerons pas ici les invariants et opérateurs d'ordre supérieur.

### III. FORMES DE PFAFF PROPORTIONNELLES. — EQUATION DE PFAFF. — ADJONCTION D'UN $ds^2$ .

6. Si au lieu d'une forme  $\varpi$  on veut conserver, par les transformations conformes, une équation de Pfaff  $\varpi = 0$ , les invariants de cette équation sont compris dans ceux de la forme  $\varpi$ , et on peut les considérer comme communs à toutes les formes proportionnelles  $\varpi = x\varpi_0$ , c'est-à-dire indépendants du facteur arbitraire  $x$ . On pourra choisir pour  $\varpi_0$  une forme  $\varpi$  particulière, et nous le ferons dans la suite; pour l'instant, laissant aux formes  $\varpi$  et  $\varpi_0$  toute leur généralité, nous allons établir les relations entre les opérateurs différentiels de ces formes  $\varpi$  et  $\varpi_0$ , puis entre les invariants de ces formes.

Soient donc les formes de Pfaff

$$\begin{aligned} \varpi_0 &= A_0 du + B_0 dv & \varpi &= Adu + Bdv = x\varpi_0 \\ A &= xA_0 & B &= xB_0 & P &= x^2P_0 & Q &= Q_0 . \end{aligned} \quad (31)$$

Les expressions relatives à  $\mathcal{O}_0$  étant affectées de l'indice 0, on a évidemment, d'après (19) et (22)

$$\mathcal{O} = \frac{1}{x} \mathcal{O}_0 \quad \mathfrak{C} = \frac{1}{x} \mathfrak{C}_0 \quad (32)$$

et les formules (27) donnent, pour les invariants du 2<sup>me</sup> ordre

$$\left\{ \begin{array}{l} D = \frac{D_0}{x} + \mathcal{O} \log x = \frac{D_0}{x} - \mathcal{O}_0 \left( \frac{1}{x} \right) \\ T = \frac{T_0}{x} + T \log x = \frac{T_0}{x} - \mathfrak{C}_0 \left( \frac{1}{x} \right) \end{array} \right. \quad (33)$$

De même, pour les opérateurs du 2<sup>me</sup> ordre, on obtient

$$\mathcal{L} = \frac{1}{x^2} \mathcal{L}_0 \quad \mathfrak{M} = \frac{1}{x^2} \mathfrak{M}_0 \quad \mathfrak{N} = \frac{1}{x^2} \mathfrak{N}_0 \quad (34)$$

tandis que

$$\begin{aligned} (\mathcal{O}\mathfrak{C}) &= \frac{1}{x^2} (\mathcal{O}_0 \mathfrak{C}_0) + \mathfrak{C} \log x \cdot \mathcal{O} - \mathcal{O} \log x \cdot \mathfrak{C} = \\ &= \frac{1}{x^2} (\mathcal{O}_0 \mathfrak{C}_0) - \frac{1}{x} \left\{ \mathfrak{C}_0 \left( \frac{1}{x} \right) \cdot \mathcal{O}_0 - \mathcal{O}_0 \left( \frac{1}{x} \right) \cdot \mathfrak{C}_0 \right\}; \end{aligned} \quad (35)$$

on remarquera qu'en particulier

$$(\mathcal{O}\mathfrak{C}) \log x = \frac{1}{x^2} (\mathcal{O}_0 \mathfrak{C}_0) \log x \quad (35')$$

et que la formule (34) pour  $\mathcal{L}$  résulte aussitôt, d'après (21') et (24'), de

$$\mathcal{L}z = \mathfrak{Z}_{uv} z = \frac{z_{uv}}{p}.$$

En tenant compte des relations précédentes, les invariants du 3<sup>me</sup> ordre sont donnés par

$$\left\{ \begin{array}{l} I = \frac{I_0}{x^2} \\ k = \frac{k_0}{x^2} - \mathcal{L} \log x = \frac{k_0}{x^2} + \frac{1}{x} \mathcal{L}_0 \left( \frac{1}{x} \right) \\ h = \frac{h_0}{x^2} - \mathfrak{M} \log x = \frac{h_0}{x^2} + \frac{1}{x} \mathfrak{M}_0 \left( \frac{1}{x} \right) \\ j = \frac{j_0}{x^2} - \mathfrak{N} \log x = \frac{j_0}{x^2} + \frac{1}{x} \mathfrak{N}_0 \left( \frac{1}{x} \right) \end{array} \right. \quad (36)$$

La première des formules (36), qui dérive immédiatement de (30) et (34), donne ce résultat important: *le facteur  $x$  s'exprime au moyen des invariants du 3<sup>me</sup> ordre I et  $I_0$  de  $\varpi$  et  $\varpi_0$ .* Ceci est conforme aux prévisions qu'on pouvait faire; pour obtenir les invariants de l'équation  $\varpi = 0$ , on devait éliminer  $x$  et ses dérivées partielles entre les expressions des invariants de la forme  $\varpi$  en fonction de ceux de  $\varpi_0$ , afin d'arriver aux invariants indépendants de  $x$ . Jusqu'à l'ordre 3 inclus existaient 6 invariants distincts de la forme  $\varpi$ , contenant les 6 quantités  $x, x_u, x_v, x_{u^2}, x_{uv}, x_{v^2}$ : l'élimination des dérivées de  $x$  donne donc  $x$  en fonction des invariants de  $\varpi$  et  $\varpi_0$ ; les invariants de l'équation  $\varpi = 0$  n'apparaissent qu'ensuite, et le nombre de ces invariants distincts des différents ordres, ainsi calculés, coïncide bien avec celui que nous avons déjà obtenu autrement.

7. Si les transformations (3) doivent conserver, en même temps qu'une forme  $\varpi$ , le  $ds^2$  de la surface, on retombe sur un problème d'applicabilité (sans déformation superficielle). Les invariants se partagent alors en trois catégories: 1<sup>o</sup> les invariants conformes de  $\varpi$ , indépendants du  $ds^2$ , que nous appellerons simplement ses *invariants*; 2<sup>o</sup> les invariants conformes du  $ds^2$ , qui ne sont autres que les *invariants gaussiens* de ce  $ds^2$ ; 3<sup>o</sup> les invariants mixtes de  $\varpi$  et du  $ds^2$ , que nous appellerons *seminvariants* (conformes) de  $\varpi$ . De même, si l'on adjoint aux précédentes de nouvelles formes différentielles  $\chi$ , de Pfaff ou non, à côté des invariants propres de ces formes figureront des invariants mixtes, entre  $\varpi$  et  $\chi$  par exemple. Une fois obtenus les invariants essentiels du système considéré, les invariants d'ordre supérieur s'obtiendront par le jeu de deux opérateurs différentiels, pour lesquels on pourra choisir les opérateurs  $\mathcal{D}$  et  $\mathfrak{T}$  attachés à la forme  $\varpi$ ; un changement d'opérateurs se ferait ensuite facilement. Nous venons en outre d'indiquer un procédé pour passer des formes  $\varpi$  à des équations  $\varpi = 0$ .

#### IV. INVARIANTS D'UNE DIFFÉRENTIELLE TOTALE ET DU $ds^2$ .

8. Nous envisageons d'abord le cas d'une forme  $\varpi_0$  différentielle exacte et considérons le système

$$\left\{ \begin{array}{l} ds^2 = W^2 du dv \\ \varpi_0 = df = f_u du + f_v dv \quad A_0 = f_u \quad B_0 = f_v . \end{array} \right. \quad (37)$$

La forme  $\varpi_0$  n'étant pas générale, les règles relatives à une forme  $\varpi$  quelconque ne permettent pas de prévoir le nombre des invariants distincts des différents ordres du système et leur répartition en invariants gaussiens, invariants et seminvariants de  $\varpi_0$  (ou  $f$ ). Mais

on doit considérer  $f$  comme un invariant donné d'ordre zéro, et reprendre le calcul pour ce cas; on trouve ainsi qu'on doit prévoir, *en général*, jusqu'à l'ordre  $n$  inclus:

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 2n = \frac{n(n-1)}{2} + 1 \text{ invariants de } f, \text{ dont } n-1 \text{ nouveaux pour l'ordre } n;$$

$$\frac{n(n+1)}{2} - 2n = \frac{n(n-3)}{2} \text{ invariants gaussiens, dont } n-2 \text{ nouveaux;}$$

$$(n+1)^2 - 2n = n^2 + 1 \text{ invariants du système (37), dont } 2n-1 \text{ nouveaux;}$$

donc, par différence,  $2n$  seminvariants de  $f$ , dont 2 nouveaux pour l'ordre  $n$ .

En fait, on a d'abord, pour l'ordre zéro, l'invariant  $f$ ; pour l'ordre un, le seminvariant

$$S_0 = \Delta f = \frac{4f_u f_v}{W^2} = \frac{4P_0}{W^2}. \quad (38)$$

Les opérateurs différentiels attachés à  $\varpi_0$ :  $\mathcal{D}_0$  et  $\mathcal{V}_0$ , donnent d'une fonction  $z$  les paramètres

$$\mathcal{D}_0 z = \frac{1}{2} \left( \frac{z_u}{f_u} + \frac{z_v}{f_v} \right) = \frac{\Delta'(f, z)}{\Delta f} \quad \mathcal{V}_0 z = \frac{i}{2} \left( \frac{z_u}{f_u} - \frac{z_v}{f_v} \right) = \frac{\Theta'(f, z)}{\Delta f} \quad (39)$$

et pour l'opérateur  $\mathcal{L}_0$  du second ordre, on trouve

$$\mathcal{L}_0 z = \frac{z_{uv}}{f_u f_v} = \frac{\Lambda z}{\Delta f}. \quad (40)$$

Pour le second ordre, on obtient un invariant de  $\varpi_0$

$$D_0 = \frac{1}{2} (\alpha_0 + \beta_0) = \alpha_0 = \beta_0 = \mathcal{L}_0 f \quad (41)$$

pour lequel, en introduisant un symbole  $\Omega$  d'opérateur conforme, nous poserons

$$D_0 = \frac{f_{uv}}{f_u f_v} = \frac{\Lambda f}{\Delta f} = \Omega f \quad (41')$$

cependant que  $T_0 = 0$ ; on a en même temps deux seminvariants d'ordre deux

$$\mathcal{D}_0 \Delta f = \frac{\Delta'(f, \Delta f)}{\Delta f} = \frac{\Delta'' f}{\Delta f} \quad \mathcal{V}_0 \Delta f = \frac{\Theta'(f, \Delta f)}{\Delta f} = \frac{\Theta'' f}{\Delta f} \quad (42)$$

auxquels on peut substituer  $\Delta'' f$  et  $\Theta'' f$ .

9. Les relations (25) sont ici réduites à

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_0 = \mathcal{O}_0^2 + \mathfrak{C}_0^2 + D_0 \mathcal{O}_0 \\ \mathcal{M}_0 = \mathcal{O}_0^2 - \mathfrak{C}_0^2 + D_0 \mathcal{O}_0 \\ \mathcal{N}_0 = \mathcal{O}_0 \mathfrak{C}_0 + \mathfrak{C}_0 \mathcal{O}_0 + D_0 \mathfrak{C}_0 \\ \mathcal{O}_0 = (\mathcal{O}_0 \mathfrak{C}_0) - T_0 \mathcal{O}_0 = 0 \end{array} \right. \quad (43)$$

la première et la dernière s'exprimant encore par

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta' \left\{ f, \frac{\Delta'(f, z)}{\Delta f} \right\} + \Theta' \left\{ f, \frac{\Theta'(f, z)}{\Delta f} \right\} + \Omega f \cdot \Delta'(f, z) = \Lambda z \\ \Delta' \left\{ f, \frac{\Theta'(f, z)}{\Delta f} \right\} - \Theta' \left\{ f, \frac{\Delta'(f, z)}{\Delta f} \right\} + \Omega f \cdot \Theta'(f, z) = 0 \end{array} \right. \quad (44)$$

relations entre paramètres différentiels d'ordres supérieurs des fonctions  $f, z$ ; si en particulier on applique ces formules à  $f$  et  $\Delta f$ , on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta'(f, \Delta''f) + \Theta'(f, \Theta''f) - \Delta^2 f + \Lambda f \cdot \Delta''f = \Delta f \cdot \Lambda \Delta f \\ \Delta'(f, \Theta''f) - \Theta'(f, \Delta''f) + \Lambda f \cdot \Theta''f = 0 \end{array} \right. \quad (44')$$

En appliquant au contraire à  $f$  les formules (24) sous leur forme générale, et tenant compte de

$$\mathcal{O}_0 f = \frac{\Delta f}{\Delta f} = 1 \quad \mathfrak{C}_0 f = \frac{\Theta'(f, f)}{\Delta f} = 0$$

on trouvait directement

$$D_0 = \frac{\mathcal{L}_0 f}{\mathcal{O}_0 f} = \Omega f \quad T_0 = 0 .$$

Pour le 3<sup>me</sup> ordre, on obtient les deux invariants de  $\varpi_0$

$$\mathcal{O}_0 D_0 = \frac{\Delta'(f, \Omega f)}{\Delta f} \quad \mathfrak{C}_0 D_0 = \frac{\Theta'(f, \Omega f)}{\Delta f} \quad (45)$$

sous forme de rapports de seminvariants, mais évidemment indépendants du  $ds^2$ . Pour former les seminvariants, on peut, au lieu de  $\mathcal{O}_0 z$  et  $\mathfrak{C}_0 z$ , utiliser les paramètres différentiels  $\Delta'(f, z)$  et  $\Theta'(f, z)$ . Quant aux invariants gaussiens, on sait qu'on arrive pour le 3<sup>me</sup> ordre à la courbure totale  $K$  du  $ds^2$ , donnée par

$$-K = \frac{4(\log W)_{uv}}{W^2} = \Lambda \log W = \Delta f \cdot \mathcal{L}_0 \log W . \quad (46)$$

10. Nous ne poursuivrons pas plus loin le calcul, sans difficulté, des invariants, mais remarquerons que les invariants du 3<sup>me</sup> ordre des formules (30) se réduisent ici à

$$\left\{ \begin{array}{l} - I_0 = - \mathcal{D}_0 D_0 = - \frac{i}{2} \mathcal{L}_0 \log Q \\ - k_0 = \mathcal{D}_0 D_0 + D_0^2 = \frac{1}{2} \mathcal{L}_0 \log P_0 \\ - h_0 = \mathcal{D}_0 D_0 - D_0^2 = \frac{1}{2} (\mathcal{M}_0 \log P_0 + i \mathcal{N}_0 \log Q) \\ - j_0 = \mathcal{D}_0 D_0 = \frac{1}{2} (\mathcal{N}_0 \log P_0 - i \mathcal{M}_0 \log Q) \end{array} \right. \quad (47)$$

donc en particulier

$$I_0 = \frac{\Theta'(f, \Omega f)}{\Delta f} = \frac{i \Lambda \log Q}{2 \Delta f} \quad - k_0 = \frac{\Delta'(f, \Omega f)}{\Delta f} + \overline{\Omega f}^2 = \frac{\Lambda \log P_0}{2 \Delta f} . \quad (48)$$

En introduisant l'angle  $\varphi$ , que nous interpréterons plus loin, donné par

$$\frac{f_u}{f_v} = Q = e^{-2i\varphi} \quad \log Q = -2i\varphi \quad (49)$$

et tenant compte aussi de (38), ou

$$4P_0 = W^2 \Delta f \quad (38')$$

il vient

$$I_0 = \mathcal{L}_0 \varphi = \frac{\Lambda \varphi}{\Delta f} \quad \Lambda \varphi = \Theta'(f, \Omega f) \quad (50)$$

$$-k_0 = \mathcal{L}_0 \log W + \frac{1}{2} \mathcal{L}_0 \log \Delta f = -\frac{K}{\Delta f} + \frac{\Lambda \log \Delta f}{2 \Delta f} . \quad (51)$$

Les formules (50) et (51) sont, comme on le constatera, des cas particuliers de (36). En comparant la seconde formule (48) à (51), on trouve pour la courbure totale

$$K = \Lambda \log \sqrt{\Delta f} - \Lambda f \cdot \Omega f - \Delta'(f, \Omega f) \quad (52)$$

formule très générale à laquelle on peut donner bien des formes, par exemple<sup>1</sup>

$$K = \frac{\Lambda \Delta f - 2 \overline{\Delta f}^2 - 2 \Delta'(f, \Lambda f) - 4 \Sigma f}{2 \Delta f}.$$

## V. FORMES DE PFAFF SEMI-NORMALES.

11. Dans la géométrie euclidienne des surfaces (c'est-à-dire la géométrie des surfaces pourvues de la connexion euclidienne induite de l'espace ambiant, soit l'ordinaire géométrie riemannienne sur la surface), on a avantage à considérer, plutôt que la forme  $\omega_0 = df$ , la forme

$$\overline{\omega}_1 = \frac{df}{\sqrt{\Delta f}} = x_1 \overline{\omega}_0 \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{\Delta f}} \quad (53)$$

Le système formé d'une équation  $\omega = 0$  et du  $ds^2$  est en effet équivalent, pour les transformations conformes, à cette seule forme  $\overline{\omega}_1$ , normée vis-à-vis du  $ds^2$ , de sorte que les invariants de cette forme soient ceux du système indiqué. Nous dirons que la forme  $\overline{\omega}_1$  est *canonique* pour le  $ds^2$ , ou *semi-normale* (on pourrait encore dire *unitaire*); le facteur  $x_1$ , la normant ainsi à partir de la forme  $\omega_0$ , a pour effet de ramener à l'unité le seminvariant du 1<sup>er</sup> ordre  $S_1$  de la forme  $\overline{\omega}_1$ . Les invariants de  $\overline{\omega}_1$  indépendants de  $x_1$  sont les invariants de l'équation  $\omega = 0$ ; les autres invariants de  $\overline{\omega}_1$  sont des semi-invariants ou des invariants gaussiens.

Les opérateurs différentiels du 1<sup>er</sup> ordre de  $\overline{\omega}_1$  sont

$$\mathcal{O}_1 = \sqrt{\Delta f} \mathcal{O}_0 \quad \mathfrak{V}_1 = \sqrt{\Delta f} \mathfrak{V}_0 \quad (54)$$

et pour l'opérateur  $\mathcal{L}_1$  du 2<sup>me</sup> ordre, on a

$$\mathcal{L}_1 = \Delta f \cdot \mathcal{L}_0. \quad (55)$$

<sup>1</sup> Au moyen des formules

$$\Delta'(f, \Omega f) = \frac{\Delta'(f, \Lambda f)}{\Delta f} - \frac{\Delta'' f \cdot \Lambda f}{\Delta f^2} \quad \Lambda \log \Delta f = \frac{\Lambda \Delta f}{\Delta f} - \frac{\Delta^2 f}{\Delta f^2} \quad \Sigma f = \frac{\Delta^2 f - 2 \Delta'' f \cdot \Lambda f}{4 \Delta f}$$

Pour un faisceau de lignes parallèles, avec  $\Delta f = 1$ , on retrouve la formule connue

$$K = -\overline{\Delta f}^2 - \Delta'(f, \Lambda f).$$

Pour un faisceau isotherme, avec  $\Lambda f = \Omega f = 0$

$$K = \Lambda \log \sqrt{\Delta f}.$$

Par suite, si on introduit les vecteurs unitaires

$$\mathbf{d} = \frac{\nabla f}{\sqrt{\Delta f}} \quad \mathbf{t} = \mathbf{J} \mathbf{d} \quad (56)$$

on obtient pour les paramètres différentiels les expressions suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D}_1 z = \frac{\Delta'(f, z)}{\sqrt{\Delta f}} = \frac{dz}{ds_d} = \mathbf{d} \times \nabla z \\ \mathfrak{C}_1 z = \frac{\Theta'(f, z)}{\sqrt{\Delta f}} = \frac{dz}{ds_t} = [\mathbf{d}, \nabla z] = \mathbf{t} \times \nabla z \\ \mathcal{L}_1 z = \Lambda z = \left( \frac{d^2}{ds_d^2} + \frac{d^2}{ds_t^2} + D_1 \frac{d}{ds_d} + T_1 \frac{d}{ds_t} \right) z = \operatorname{div} \nabla z \end{array} \right. \quad (57)$$

et aussi

$$(\mathcal{D}_1 \mathfrak{C}_1) z = \left( \frac{d^2}{ds_t ds_d} - \frac{d^2}{ds_d ds_t} \right) z = \left( T_1 \frac{d}{ds_d} - D_1 \frac{d}{ds_t} \right) z$$

$$\frac{d^2}{ds_i ds_j} = \frac{d}{ds_j} \frac{d}{ds_i} .$$

12. L'on a en particulier

$$\mathcal{D}_1 f = \sqrt{\Delta f} = \frac{df}{ds_d} \quad \mathfrak{C}_1 f = \frac{df}{ds_t} = 0$$

et les invariants du 2<sup>me</sup> ordre,  $D_1$  et  $T_1$ , de la forme semi-normale, sont donnés par les formules (24) ou (33) suivant

$$-\frac{d^2 f}{ds_d ds_t} = T_1 \frac{df}{ds_d} \quad \Lambda f = \frac{d^2 f}{ds_d^2} + D_1 \frac{df}{ds_d}$$

soit

$$D_1 = \sqrt{\Delta f} \cdot \Omega f - \frac{\Delta'(f, \sqrt{\Delta f})}{\Delta f} \quad T_1 = -\frac{\Theta'(f, \sqrt{\Delta f})}{\Delta f} \quad (58)$$

ou encore

$$D_1 = -\frac{\Delta'' f - 2 \Delta f \cdot \Lambda f}{2 \frac{\Delta f^3}{\Delta f^2}} = -\frac{\Gamma f}{2 \frac{\Delta f^3}{\Delta f^2}} \quad T_1 = -\frac{\Theta'' f}{2 \frac{\Delta f^3}{\Delta f^2}} . \quad (58')$$

On reconnaît en  $D_1$  et  $T_1$  les courbures géodésiques des courbes  $\omega = 0$  et de leurs trajectoires orthogonales, mesurées respectivement suivant les normales ( $-\mathbf{d}$ ) et ( $-\mathbf{t}$ ) à ces courbes; en considérant au

contraire  $\mathbf{t}$  et  $\mathbf{d}$  comme les tangentes positives à ces courbes,  $g_t$  et  $g_d$  étant les courbures mesurées suivant les normales ( $-\mathbf{d}$ ) et  $\mathbf{t}$ , on aurait

$$D_1 = g_t \quad T_1 = -g_d . \quad (59)$$

Par les formules (27), on obtenait, en utilisant (49) et (38')

$$\left\{ \begin{array}{l} D_1 = \mathcal{D}_1 \log W + \mathfrak{C}_1 \varphi = \frac{\Delta'(f, \log W) + \Theta'(f, \varphi)}{\sqrt{\Delta f}} \\ \quad = \frac{d \log W}{ds_d} + \frac{d \varphi}{ds_t} = \mathbf{d} \times \nabla \log W + \mathbf{t} \times \nabla \varphi \\ \\ T_1 = \mathfrak{C}_1 \log W - \mathcal{D}_1 \varphi = \frac{\Theta'(f, \log W) - \Delta'(f, \varphi)}{\sqrt{\Delta f}} \\ \quad = \frac{d \log W}{ds_t} - \frac{d \varphi}{ds_d} = \mathbf{t} \times \nabla \log W - \mathbf{d} \times \nabla \varphi . \end{array} \right. \quad (60)$$

On reconnaît dans ces formules le rôle des deux vecteurs (formant simili-repère).

$$\mathbf{f}_1 = \nabla \varphi + J \nabla \log W \quad \mathbf{g}_1 = J \mathbf{f}_1 = -\nabla \log W + J \nabla \varphi \quad (61)$$

qui permettent d'écrire

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{f}_1 = -T_1 \mathbf{d} + D_1 \mathbf{t} \quad \mathbf{g}_1 = -D_1 \mathbf{d} - T_1 \mathbf{t} \\ D_1 = -\mathbf{d} \times \mathbf{g}_1 \quad T_1 = -\mathbf{t} \times \mathbf{g}_1 ; \end{array} \right. \quad (62)$$

en particulier

$$\mathbf{g}_1 = -\Omega f \cdot \nabla f + \frac{1}{2} \nabla \log \Delta f . \quad (63)$$

13. Nous avons en effet indiqué (*Thèse*) qu'à un faisceau simple de courbes est associé le *réseau angulaire* des courbes coupant celles du faisceau sous des angles constants et montré que les propriétés de courbure géodésique de ce réseau sont résumées en ces vecteurs;  $\varphi$  est, comme le montre la formule (49), l'angle de la normale  $\mathbf{d}$  d'une courbe du faisceau  $\omega = 0$  avec la courbe du faisceau isotherme  $dY = 0$  qui la coupe au point considéré, donc avec la normale au même point à la courbe du faisceau isotherme  $dX = 0$ .

Les formules (61) mettent bien en évidence deux éléments géométriques importants: d'une part, le module  $W$  de la représentation conforme entre le ( $ds^2$  euclidien)  $dl^2 = dX^2 + dY^2$  suivant lequel on peut représenter le  $ds^2$  considéré, et ce  $ds^2$ ; d'autre part, l'angle  $\varphi$  qui caractérise le faisceau en question, et par suite aussi le réseau angulaire associé.

Sans insister pour le moment sur les opérateurs du 2<sup>e</sup> ordre  $\mathfrak{M}_1$  et  $\mathfrak{N}_1$ , nous donnons, en tenant compte de

$$P_1 = \frac{P_0}{\Delta f} = \frac{W^2}{4}$$

les expressions des invariants du 3<sup>e</sup> ordre de la forme semi-normale  $\omega_1$

$$I_1 = \Theta'(f, \Omega f) = \Lambda \varphi = \operatorname{div} \mathbf{f}_1 = \operatorname{rot} \mathbf{g}_1 \quad (64)$$

$$k_1 = K = -\Lambda \log W = -\operatorname{rot} \mathbf{f}_1 = \operatorname{div} \mathbf{g}_1 \quad (65)$$

ce qui correspond aux formules (50) et (51) ou à l'expression (52) de K au moyen des paramètres différentiels de  $f$ ; puis

$$-h_1 = \mathfrak{M}_1 \log W + \mathfrak{N}_1 \varphi \quad -j_1 = \mathfrak{N}_1 \log W - \mathfrak{M}_1 \varphi^1. \quad (66)$$

Nous avons donc retrouvé la courbure totale K du  $ds^2$  comme invariant du 3<sup>e</sup> ordre d'une forme semi-normale, et l'application des formules (29) avec les opérateurs différentiels  $\frac{d}{ds_d}$  et  $\frac{d}{ds_t}$  donne encore, pour  $I_1$  et  $K$ , des résultats connus.

14. A côté des formes déjà étudiées  $\omega_0$  et  $\omega_1$ , on pourrait considérer la forme

$$\omega_2 = \frac{df}{\Delta f} = x_2 \omega_2 \quad x_2 = \frac{1}{\Delta f}$$

pour laquelle les paramètres différentiels du 1<sup>er</sup> ordre d'une fonction  $z$  sont

$$\mathcal{D}_2 z = \Delta'(f, z) \quad \mathcal{C}_2 z = \Theta'(f, z)$$

et qui est telle que

$$\omega_0 \omega_2 = \omega_1^2$$

$$\mathcal{D}_0 z \cdot \mathcal{D}_2 z = \overline{\mathcal{D}_1 z}^2 \quad \mathcal{C}_0 z \cdot \mathcal{C}_2 z = \overline{\mathcal{C}_1 z}^2 \quad \mathcal{L}_0 z \cdot \mathcal{L}_2 z = \overline{\mathcal{L}_1 z}^2 \quad \text{etc.}$$

Plus généralement on peut associer à toute forme  $\omega$  une forme *inverse*  $\bar{\omega}$  telle que  $\bar{\omega}\omega = \omega_1^2$ , les paramètres différentiels attachés à ces formes satisfaisant aux dernières des relations précédentes.

Dans le cas d'une forme  $\omega$  quelconque, la théorie générale montre

<sup>1</sup> Les invariants  $I_1$ ,  $k_1$ ,  $h_1$ ,  $j_1$  sont les composantes du tenseur  $\nabla g$ ,  $+ \mathbf{f}_1^2 - \mathbf{g}_1^2$ , de sorte que

$$\nabla g_1 + \mathbf{f}_1^2 - \mathbf{g}_1^2 = I_1 \frac{td - dt}{2} + k_1 \frac{d^2 + t^2}{2} + h_1 \frac{d^2 - t^2}{2} + j_1 \frac{td + dt}{2}.$$

que jusqu'à l'ordre  $n$  inclus, on doit régulièrement<sup>1</sup> prévoir  $n(n-2)$  invariants, dont 2 ( $n-1$ ) nouveaux d'ordre  $n$ ; si un  $ds^2$  est adjoint, le nombre des invariants du système s'élève à  $\frac{n(3n-1)}{2}$ , dont  $3n-2$  nouveaux d'ordre  $n$ ; par suite les seminvariants sont au nombre de  $3n$ , dont 3 nouveaux pour chaque ordre. Cette régularité n'est d'ailleurs pas acquise pour les premiers ordres; c'est ainsi que pour l'ordre  $un$  existe le seul seminvariant  $S = \frac{4P}{W^2}$ , que nous avons réduit à l'unité pour les formes semi-normales.

## VI. FORMES DE PFAFF ADJOINTES — OPÉRATEURS ET INVARIANTS — $d\sigma^2$ CANONIQUE A UNE FORME.

15. Dans le réseau angulaire attaché à un faisceau simple de courbes, nous avons déjà eu à considérer le faisceau simple des trajectoires orthogonales des courbes de la première famille. Entre les invariants et les opérateurs appartenant à ces deux faisceaux, des rapprochements intéressants sont à faire. Pour simplifier le langage, nous dirons que des formes de Pfaff  $\omega$  et  $\chi$  sont *orthogonales* si les courbes intégrales des deux équations  $\omega = 0$  et  $\chi = 0$  sont deux faisceaux de trajectoires orthogonales; en outre, à toute forme  $\omega$  nous associerons plus particulièrement une des formes orthogonales  $\omega_i$ , que nous dirons *adjointe positive* de  $\omega$  ( $\omega$  étant l'*adjointe négative* de  $\omega_i$ ), telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega = xdf = Adu + Bdv \\ \omega_i = ydg = i(-Adu + Bdv) = A_i du + B_i dv \end{array} \right. \quad (67)$$

et nous affecterons de l'indice  $i$  les expressions relatives à cette forme  $\omega_i$ ; on aura les relations

$$P_i = P \quad Q_i = -Q$$

et comme

$$A = xf_u = iyg_u \quad B = xf_v = -iyg_v$$

on voit, en posant

$$p = xy \quad q = \frac{x}{y} \quad (68)$$

<sup>1</sup> Quand il y a  $k$  équations de conditions pour exprimer la conservation d'un système par les transformations (3), le nombre des invariants à prévoir jusqu'à l'ordre  $n$  inclus est  $k \frac{n(n+1)}{2} - 2n$ . (Cf. la note du n° 4).

que les fonctions  $f, g, q$  satisfont aux relations établies aux n°s 2 et 3 par les formules (11), (11'), (12) et (13). On a aussi

$$\left\{ \begin{array}{l} 2Adu = xdf + iydg = \varpi + i\varpi_i \\ 2Bdv = xdf - iydg = \varpi - i\varpi_i \end{array} \right. \quad (69)$$

ce qui établit une symétrie intéressante entre les variables  $u, v$  et  $f, g$  et entre les formes  $Adu, Bdv$  et  $\varpi, \varpi_i$ .

#### 16. Les formules

$$\mathfrak{S}_{ui} = i\mathfrak{S}_u \quad \mathfrak{S}_{vi} = -i\mathfrak{S}_v$$

donnent aussitôt pour les opérateurs du 1<sup>er</sup> ordre et les invariants du 2<sup>e</sup> ordre

$$\mathcal{O}_i = \mathfrak{C} \quad \mathfrak{C}_i = -\mathcal{O} \quad (70)$$

$$D_i = T \quad T_i = -D. \quad (71)$$

On a ensuite, pour les opérateurs du 2<sup>e</sup> ordre et la parenthèse du 1<sup>er</sup> ordre.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_i = \mathcal{L} \quad \mathfrak{M}_i = -\mathfrak{M} \quad \mathfrak{N}_i = -\mathfrak{N} \\ (\mathcal{O}_i \mathfrak{C}_i) = (\mathcal{O} \mathfrak{C}) \end{array} \right. \quad (72)$$

puis pour les invariants du 3<sup>e</sup> ordre

$$I_i = I \quad k_i = k \quad h_i = -h \quad j_i = -j. \quad (73)$$

Les relations intimes qui se poursuivent entre les opérateurs et les invariants de formes adjointes  $\varpi$  et  $\varpi_i$  — et se généraliseraient pour des formes  $\varpi_\theta = \cos \theta \cdot \varpi + \sin \theta \cdot \varpi_i$  — ont leur origine dans les expressions vectorielles, invariantes ou comitantes, du réseau angulaire attaché à ces formes. Cela était déjà apparent pour les formes semi-normales, et nous reviendrons sur le point de vue vectoriel. Mais nous remarquerons d'abord qu'à toute forme  $\varpi$  est attachée une forme quadratique comitante  $d\sigma^2$ , que nous dirons *canonique* pour  $\varpi$ , et liée à cette forme  $\varpi$  comme le  $ds^2$  l'est à une forme semi-normale; en posant en effet

$$d\sigma^2 = 4Pdudv = \varpi^2 + \varpi_i^2 \quad (74)$$

et considérant  $d\sigma^2$  comme un  $ds^2$  donné, le seminvariant  $S$  d'ordre un de  $\varpi$  par rapport à ce  $ds^2$  est réduit à l'unité; entre autres conséquences, l'invariant du 3<sup>e</sup> ordre  $k$  de  $\varpi$  est la courbure totale de la forme  $d\sigma^2$ . Si une forme  $\varpi$  est d'abord considérée en liaison avec

un  $ds^2$  donné, on pourra, par des transformations conformes appropriées, conserver cette forme et ramener le  $ds^2$  à la forme  $d\sigma^2$ , pour laquelle  $\varpi$  est canonique. Les expressions vectorielles interprétées pour une forme semi-normale, par rapport au  $ds^2$ , donneront donc lieu à une interprétation analogue pour une forme quelconque, par rapport au  $d\sigma^2$  canonique.

17. Reprenons le cas d'un  $ds^2$  donné, c'est-à-dire d'un étalon de longueur invariant fixé en tout point  $\mathbf{m}$  d'une surface. Soient

$$\varpi = \mathbf{a} \times d\mathbf{m} \quad ds^2 = (d\mathbf{m})^2 \quad (75)$$

la forme  $\varpi$  et le  $ds^2$  donnés, et la forme adjointe

$$\varpi_i = \mathbf{b} \times d\mathbf{m} \quad \mathbf{b} = J\mathbf{a} . \quad (76)$$

En se reportant aux formes (67), ou encore

$$\mathbf{a} = x\nabla f \quad \mathbf{b} = x\nabla g \quad (67')$$

et aux formules (32) et (39), les opérateurs de  $\varpi$  et  $\varpi_i$  fourniront les paramètres différentiels d'une fonction  $z$ , que nous écrirons, avec les vecteurs *inverses* de  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{a}^2} \quad \bar{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{b}^2} \quad (77)$$

sous les formes

$$\mathcal{O}_z = \frac{\mathbf{a} \times \nabla z}{\mathbf{a}^2} = \bar{\mathbf{a}} \times \nabla z \quad \mathfrak{C}_z = \frac{\mathbf{b} \times \nabla z}{\mathbf{b}^2} = \bar{\mathbf{b}} \times \nabla z . \quad (78)$$

Par l'effet de la parenthèse

$$\begin{aligned} (\mathcal{O}\mathfrak{C})_z &= \bar{\mathbf{a}} \times \nabla(\bar{\mathbf{b}} \times \nabla z) - \bar{\mathbf{b}} \times \nabla(\bar{\mathbf{a}} \times \nabla z) \\ &= (\nabla\bar{\mathbf{b}} \times \bar{\mathbf{a}} - \nabla\bar{\mathbf{a}} \times \bar{\mathbf{b}}) \times \nabla z \end{aligned}$$

le vecteur comitant

$$-\mathbf{f} = \nabla\bar{\mathbf{b}} \times \bar{\mathbf{a}} - \nabla\bar{\mathbf{a}} \times \bar{\mathbf{b}} \quad (79)$$

et la forme de Pfaff correspondante  $-\mathbf{f} \times d\mathbf{m}$  sont mis en évidence.

18. Pour une forme semi-normale  $\varpi_1$  et les vecteurs

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= \bar{\mathbf{a}} = \mathbf{d} = \frac{\nabla f}{\sqrt{\Delta f}} & \mathbf{b}_1 &= \bar{\mathbf{b}}_1 = \mathbf{t} = J\mathbf{d} \\ -\mathbf{f}_1 &= \nabla\mathbf{t} \times \mathbf{d} - \nabla\mathbf{d} \times \mathbf{t} \end{aligned} \quad (79')$$

$\mathbf{f}_1$  est le vecteur de la formule (61) et l'on a aussi

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_1 f &= \sqrt{\Delta f} \quad \mathfrak{C}_1 f = 0 \\ \mathcal{O}_1 g &= -\mathfrak{C}_{1i} g = 0 \quad \mathfrak{C}_1 g = \mathcal{O}_{1i} g = \sqrt{\Delta g} \\ -\mathbf{f}_1 \times \nabla f &= (\mathcal{O}_1 \mathfrak{C}_1) f = T_1 \sqrt{\Delta f} \quad T_1 = -\mathbf{f}_1 \times \mathbf{d} = -\mathbf{g}_1 \times \mathbf{t} \\ -\mathbf{f}_1 \times \nabla g &= (\mathcal{O}_1 \mathfrak{C}_1) g = -D_1 \sqrt{\Delta g} \quad D_1 = \mathbf{f}_1 \times \mathbf{t} = -\mathbf{g}_1 \times \mathbf{d}\end{aligned}$$

comme cela a été établi; par suite, puisque

$$\begin{cases} \nabla \mathbf{d} = \mathbf{t} \mathbf{f}_1 & \nabla \mathbf{t} = -\mathbf{d} \mathbf{f}_1 \\ D_1 = \operatorname{div} \mathbf{d} & T_1 = \operatorname{div} \mathbf{t} \\ -\mathbf{g}_1 = (\operatorname{div} \mathbf{d}) \mathbf{d} + (\operatorname{div} \mathbf{t}) \mathbf{t} \end{cases} \quad (80)$$

Les formules (78) montrent bien que les opérateurs  $\mathcal{O}$  et  $\mathfrak{C}$  sont indépendants du  $ds^2$ , utilisé seulement comme intermédiaire, et les formules (80) donneront, pour une forme  $\varpi$ , des expressions analogues à celles obtenues pour une forme semi-normale si au  $ds^2$  est substitué le  $d\sigma^2$  canonique à cette forme, et si les opérations (multiplication intérieure, gradient, divergence, etc.) sont effectuées vis-à-vis de ce  $d\sigma^2$ . On peut alors, aux symboles  $\frac{d}{ds_d}$ ,  $\frac{d}{ds_t}$  utilisés aux nos 11 et suivants, substituer des symboles  $\frac{d}{d\sigma_a}$ ,  $\frac{d}{d\sigma_b}$ , bien qu'ils n'aient pas une signification absolue comme les précédents, la forme  $d\sigma^2$  étant attachée à la forme  $\varpi$ .

On obtient une autre notation convenable pour les opérateurs  $\mathcal{O}$  et  $\mathfrak{C}$  en portant des formes différentielles exactes  $df$  et  $dg$ ; d'après les formules (32) du no 6 et (39) du no 9, en tenant compte de

$$\nabla z = z_f \nabla f + z_g \nabla g \quad \nabla g = \frac{x}{y} J \nabla f$$

il vient

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_0 z &= z_f \\ \mathfrak{C}_0 z &= \frac{x}{y} z_g \quad \text{ou} \quad (\mathcal{O}_i)_0 z = z_g\end{aligned}$$

et par suite

$$\mathcal{O} z = \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial f} \quad \mathfrak{C} z = \mathcal{O}_i z = \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial g} \quad (81)$$

d'où la notation symbolique

$$\mathcal{O} = \frac{\delta}{\omega} \quad \mathfrak{C} = \mathcal{O}_i = \frac{\delta}{\omega_i} \quad (82)$$

les  $\delta$  rappelant l'accouplement des formes de Pfaff  $\omega$  et  $\omega_i$ .

Une notation voisine est atteinte en partant de la relation identique entre trois formes de Pfaff à deux variables (analogie à celle entre trois vecteurs du plan), et choisissent pour une de ces formes une différentielle exacte  $dz$

$$[\omega \chi] dz = - [\chi dz] \omega + [\omega dz] \chi \quad (83)$$

$$dz = \frac{[\chi dz]}{[\chi \omega]} \omega + \frac{[\omega dz]}{[\omega \chi]} \chi$$

puis convenant de l'écriture symbolique

$$dz = \left[ \frac{dz}{\omega} \right] \omega + \left[ \frac{dz}{\chi} \right] \chi \quad (84)$$

de sorte qu'une réduction au dénominateur commun  $[\omega \chi]$ , effectuée suivant les règles de la multiplication extérieure, rétablisse la signification de l'expression; la notation  $\left[ \frac{dz}{\omega} \right]$  a l'avantage d'une analogie avec celle du quotient entier. Dans le cas particulier  $\chi = \omega_i$ , on trouve ainsi

$$\mathcal{O}_z = \left[ \frac{dz}{\omega} \right] \quad \mathfrak{C}_z = \mathcal{O}_i z = \left[ \frac{dz}{\omega_i} \right] \quad (85)$$

notation voisine de (82).

19. Nous allons étendre l'analogie, déjà signalée à la fin du n° 15, entre les variables  $u, v$  et  $f, g$ , entre les formes  $Adu, Bdv$  et  $\omega, \omega_i$ , commencée par les formules (67) et (69) entre autres. Nous rapprochons pour cela les formules (19) et (81)

$$\mathcal{O}_z = \frac{z_f}{x} \quad \mathfrak{C}_z = \frac{z_g}{y} \quad (81)$$

$$\mathfrak{D}_u z = \frac{z_u}{A} \quad \mathfrak{D}_v z = \frac{z_v}{B} \quad (19)$$

puis les invariants du 1<sup>er</sup> ordre obtenus par l'emploi de ces paramètres différentiels; en appliquant en effet les formules (33) à partir de  $\omega_0 = df$  et  $(\omega_i)_0 = dg$ , on obtient

$$D = - T_i = - \mathfrak{C}_i \log y = \mathcal{O} \log y \quad T = \mathfrak{C} \log x \quad (86)$$

$$\alpha = \mathfrak{D}_u \log B \quad \beta = \mathfrak{D}_v \log A \quad (20)$$

et on complète les formules déjà obtenues par

$$\left\{ \begin{array}{l} D = \frac{1}{2} (\mathcal{O} \log P + i \mathcal{C} \log Q) = \frac{1}{2} (\mathcal{O} \log p - \mathcal{O} \log q) \\ T = \frac{1}{2} (\mathcal{C} \log P - i \mathcal{O} \log Q) = \frac{1}{2} (\mathcal{C} \log p + \mathcal{C} \log q) \end{array} \right. \quad (87)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{1}{2} (\mathfrak{Z}_u \log p - \mathfrak{Z}_v \log q) = \frac{1}{2} (\mathfrak{Z}_u \log P - \mathfrak{Z}_u \log Q) \\ \beta = \frac{1}{2} (\mathfrak{Z}_v \log p - \mathfrak{Z}_u \log q) = \frac{1}{2} (\mathfrak{Z}_v \log P + \mathfrak{Z}_v \log Q) \end{array} \right. \quad (88)$$

Les relations entre opérateurs du 2<sup>e</sup> ordre et parenthèses ont été données par les formules (24') et (25), mais en remarquant l'analogie des formes

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\mathfrak{Z}_u \mathfrak{Z}_v + \mathfrak{Z}_v \mathfrak{Z}_u + \beta \mathfrak{Z}_u + \alpha \mathfrak{Z}_v)$$

$$\mathcal{D} = \mathcal{O} \mathcal{C} + \mathcal{C} \mathcal{O} + T \mathcal{O} + D \mathcal{C}$$

on voit en particulier qu'à

$$\mathcal{L} z = \mathfrak{Z}_{uv} z = \frac{z_{uv}}{P}$$

correspond

$$\mathcal{D} z = \frac{2 z_{fg}}{p} . \quad (89)$$

Pour les invariants du 3<sup>e</sup> ordre, on complète les formules (30) par

$$\left\{ \begin{array}{l} -I = -\frac{i}{2} \mathcal{L} \log Q = \frac{1}{2} \mathcal{D} \log q \\ -k = \frac{1}{2} \mathcal{L} \log P = \frac{1}{2} (\mathcal{L} \log p - \mathcal{M} \log q) \\ -h = \frac{1}{2} (\mathcal{M} \log P + i \mathcal{D} \log Q) = \frac{1}{2} (\mathcal{M} \log p - \mathcal{L} \log q) \\ -j = \frac{1}{2} (\mathcal{D} \log P - i \mathcal{M} \log Q) = \frac{1}{2} \mathcal{D} \log p \end{array} \right. \quad (90)$$

20. Revenons encore sur certaines expressions vectorielles intéressantes; les trajectoires orthogonales  $g = \text{const.}$  des courbes  $f = \text{const.}$  correspondant à la relation

$$\nabla g = q J \nabla f \quad (11')$$

on en déduit, comme nous l'avons vu

$$\Lambda f = -\nabla f \times \nabla \log q \quad \Lambda g = \nabla g \times \nabla \log q \quad (12')$$

d'où le vecteur

$$\nabla \log q = -\Omega f \cdot \nabla f + \Omega g \cdot \nabla g \quad (91)$$

et en prenant les rotationnels (condition d'intégrabilité), on obtient

$$[\nabla f \cdot \nabla \Omega f] = [\nabla g \cdot \nabla \Omega g] \quad (92)$$

$$I_1 = \Theta'(f, \Omega f) = \Theta'(g, \Omega g); \quad (64) \quad (92')$$

on vérifie encore que le seminvariant  $I_1$  n'est pas altéré si on substitue à  $f$ , par exemple, une fonction quelconque  $F(f)$  de cette variable<sup>1</sup>.

Mais, à partir des formules (80), on obtient aussi

$$\Lambda d = I_1 t - (D_1^2 + T_1^2) d \quad \Lambda t = -I_1 d - (D_1^2 + T_1^2) t \quad (93)$$

$$I_1 = t \times \Lambda d = -d \times \Lambda t = [d \cdot \Lambda d] = [t \cdot \Lambda t] \quad (94)$$

autre expression de ce seminvariant fondamental.

Nous allons montrer la relation entre les formes  $[\nabla f \cdot \nabla \Omega f]$  et  $[d \cdot \Lambda d]$  en supposant la forme  $\omega_0 = df$  réalisée sur un  $ds^2$  égal à son  $d\sigma_0^2$  canonique; on a alors

$$d = \nabla f \quad \Delta f = 1 \quad \omega_0 = \omega_1$$

$$\nabla d = t f_1 = \nabla^2 f \quad [t f_1] = 0 \quad \text{div } d = t \times f_1 = \Lambda f = \Omega f$$

donc

$$f_1 = \Omega f \cdot t \quad \nabla d = \Omega f \cdot t^2$$

$$\nabla^2 d = t^2 \nabla \Omega f - \overline{\Omega f}^2 (d t + t d) t$$

$$\Lambda d = (t \times \nabla \Omega f) t - \overline{\Omega f}^2 d = \nabla \Omega f - (d \times \nabla \Omega f + \overline{\Omega f}^2) d$$

le coefficient de  $d$  dans la dernière expression étant la courbure totale du  $ds^2$ , d'où enfin

$$[d \cdot \Lambda d] = t \times \nabla \Omega f = [\nabla f \cdot \nabla \Omega f].$$

<sup>1</sup> Nous rappelons les relations

$$\nabla F = F' \nabla f \quad \Delta F = F'^2 \Delta f \quad \nabla^2 F = F'' \overline{\nabla f}^2 + F' \nabla^2 f \quad \Lambda F = F'' \Delta f + F' \Lambda f$$

$$\Omega F = \frac{F''}{F'^2} + \frac{1}{F'} \Omega f \quad \nabla \Omega F = \left\{ -\left(\frac{1}{F'}\right)'' + \left(\frac{1}{F'}\right)' \Omega f \right\} \nabla f + \frac{1}{F'} \nabla \Omega f$$

les accents indiquant les dérivées par rapport à  $f$ .

C'est là l'invariant  $I_0$  de  $\varpi_0$ ; c'est aussi le seminvariant  $I_1$  pour  $ds^2 = d\sigma_0^2$ , mais pour un autre  $ds^2$ , soit  $ds'^2$ , pour lequel les symboles seraient accentués, on aurait

$$I_0 = \frac{[\nabla' f \cdot \nabla' \Omega f]}{\Delta' f} = \frac{I'_1}{\Delta' f}$$

21. Résumons, en modifiant un peu leur forme, certains des résultats précédemment obtenus; si l'on part d'une forme de Pfaff quelconque  $\varpi$ , on peut lui associer, au moyen d'un facteur intégrant  $v_0$ , la forme intégrable

$$\varpi_0 = v_0 \varpi = df$$

à laquelle est associée le  $d\sigma_0^2$  canonique

$$d\sigma_0^2 = 4 f_u f_v du dv = \varpi_0^2 + (\varpi_i)_0^2 = df^2 + \frac{1}{q^2} dg^2$$

avec

$$g_u = -iqf_u \quad g_v = iqf_v.$$

Sur ce  $d\sigma_0^2$ , les intégrales  $f = \text{const.}$  sont des courbes parallèles et l'on a, pour les premiers invariants de  $\varpi_0$

$$\left\{ \begin{array}{l} D_0 = \Omega f = -\mathcal{O}_0 \log q = q \frac{\partial}{\partial f} \left( \frac{1}{q} \right) \\ -k_0 = \mathcal{O}_0 D_0 + D_0^2 = q^2 \frac{\partial^2}{\partial f^2} \left( \frac{1}{q} \right) \\ -I_0 = -\mathfrak{C}_0 D_0 = q \frac{\partial^2 \log q}{\partial f \partial g} \end{array} \right. \quad (95)$$

en accord avec les formules (87) et (90), où  $p = \frac{1}{q}$ . Différentes conséquences, d'ailleurs connues, peuvent en être déduites, suivant la nature de la fonction  $q$  de  $f, g$ .

Dans le cas où, à côté de la forme  $\varpi$ , est donné un  $ds^2$ , on peut associer à  $\varpi$ , au moyen d'un facteur semi-normant  $v_1$ , la forme semi-normale

$$\varpi_1 = v_1 \varpi \quad v_1 = \frac{W}{2\sqrt{P}}$$

pour laquelle le  $d\sigma_1^2$  canonique se confond avec le  $ds^2$

$$d\sigma_1^2 = ds^2 = \varpi_1^2 + \varpi_{1i}^2.$$

Comme nous l'avons établi, les invariants de la forme  $\varpi_1$  sont les invariants euclidiens (géodésiques) de l'équation  $\varpi = 0$ . Avec les notations

$$\frac{f_u}{f_v} = Q = e^{-2i\varphi} \quad \frac{W}{2} = e^w \quad (49')$$

on peut écrire une forme semi-normale

$$\varpi_1 = \frac{W}{2} \left( \sqrt{\frac{f_u}{f_v}} du + \sqrt{\frac{f_v}{f_u}} dv \right) = e^{w-i\varphi} du + e^{w+i\varphi} dv . \quad (96)$$

## VII. FAISCEAUX ISOTHERMES.

22. Il est bien connu, dans la représentation conforme des surfaces, qu'à côté des deux faisceaux formés par les deux séries de lignes minima,  $du = 0$  et  $dv = 0$ , les faisceaux isothermes de courbes sont aussi conservés; l'équation différentielle  $\varpi = 0$  d'un tel faisceau du premier ordre est en effet caractérisée par la condition invariante

$$I = 0$$

et l'équation  $\varpi = 0$  n'a alors aucun invariant conforme. Nous avons donné bien des formes à l'invariant  $I$  de  $\varpi$ ; considérons en particulier une forme semi-normale  $\varpi_1$  sur un  $ds^2$  et rappelons diverses interprétations de l'équation  $I_1 = 0$ . D'après

$$I_1 = \frac{i}{2} \Lambda \log Q = 0 \quad (97)$$

$$\frac{\partial^2 \log Q}{\partial u \partial v} = 0 \quad Q = \frac{A}{B} = \frac{a(u)}{b(v)}$$

le rapport  $\frac{A}{B}$  des coefficients de l'équation  $\varpi = 0$  est le quotient de deux fonctions arbitraires, l'une de  $u$ , l'autre de  $v$ ; le facteur intégrant  $\frac{a}{2A} = \frac{b}{2B}$  ramène alors à l'équation intégrable

$$\varpi_0 = \frac{1}{2} \{ a(u) du + b(v) dv \} = 0$$

et les courbes intégrales sont données par

$$f = \frac{1}{2} \{ U(u) du + V(v) dv \} = \text{const.} \quad U' = a, \quad V' = b,$$

les accents indiquant, pour les fonctions d'une seule variable, les dérivées par rapport à celle-ci; une transformation (3) donne alors à  $f$  une forme réduite  $\bar{X} = \frac{1}{2}(\bar{u} + \bar{v})$ . L'on a en même temps

$$I_1 = \Lambda \varphi = 0 \quad (97')$$

$$\varphi = \frac{i}{2} \log Q = -\frac{i}{2} \left( \log \frac{1}{a} - \log \frac{1}{b} \right) = -\frac{i}{2} \{ \Phi(u) - \Psi(v) \}$$

donc la condition (97') exprime aussi que les courbes  $\varphi = \text{const.}$  forment un faisceau isotherme,  $\varphi$  étant *variable isothermique*, et cette propriété est caractéristique; nous nous étions d'ailleurs ramené à des fonctions  $f$  pour lesquelles  $\Lambda f$  ou  $\Omega f$  est nul: c'est ce qu'exprime, à un changement de fonction  $f$  près, la forme suivante de l'équation invariante

$$I_1 = \Theta'(f, \Omega f) = 0 \quad \Omega f = F(f) \quad (98)$$

où  $F$  est une fonction arbitraire, qu'on peut choisir pour avoir  $\Omega F = 0$ . En revenant alors à la notation  $f$  pour la fonction choisie, et choisissant de même la fonction  $g$  pour que  $\Omega g = 0$  puisqu'on a aussi

$$I_1 = \Theta'(g, \Omega g) = 0$$

il en résulte, d'après (91),  $\nabla \log q = 0$ , et l'on peut par suite prendre

$$\begin{aligned} q &= 1 & x &= y & p &= x^2 \\ ds^2 &= W^2(dX^2 + dY^2) = x^2(df^2 + dg^2). \end{aligned}$$

On a encore

$$\begin{aligned} D_1 &= \mathcal{O}_1 \log x & T_1 &= \mathcal{C}_1 \log x \\ g_1 &= -\nabla \log W + J \nabla \varphi = -\nabla \log x \end{aligned}$$

toutes formules qui sont bien d'accord avec

$$I_1 = \text{rot } g_1 = -(\mathcal{O}_1 \mathcal{C}_1) \log x = 0$$

et les formes particulières que prennent alors les formules déjà établies.

23. En résumé, ce qui caractérise un faisceau isotherme, c'est d'être associé à un faisceau également isotherme de trajectoires orthogonales, et plus généralement d'être incorporé dans un réseau angulaire isotherme, toutes les courbes d'un tel réseau pouvant être représentées par des intégrales  $f = \text{const.}$ ,  $g = \text{const.}$ , etc. pourvues en un même point  $m$  de vecteurs gradients de même module  $\frac{1}{x}$ ; ces gradients forment en tout point de la surface une *simili-étoile*, se ramenant

à celle attachée à un autre réseau angulaire isotherme  $X = \text{const.}$ ,  $Y = \text{const.}$ , etc. par une similitude dont l'angle et le rapport sont liés par la relation

$$\nabla \log \frac{W}{x} = J \nabla \varphi$$

de sorte que  $\varphi$  et  $\log \frac{W}{x}$  sont deux solutions conjuguées de l'équation  $\Delta z = o$ . C'est par le choix de ces solutions que se différencient les divers réseaux angulaires isothermes constituant l'ensemble des faisceaux isothermes de la surface — brièvement *l'ensemble isotherme*.

Si l'on suppose aussi qu'on effectue, en chaque point  $m$ , un changement de l'étalon de longueur, de sorte que la simili-étoile de repère du réseau isotherme considéré devienne une étoile de vecteurs unitaires, ceci revient à une représentation sur le  $d\sigma_0^2$  canonique de  $\omega_0$

$$d\sigma_0^2 = df^2 + dg^2 = dU dV$$

et, selon qu'on opérera sur un étalon de longueur ou l'autre, on considérera les repères et simili-repères attachés à  $ds^2$  et  $d\sigma_0^2$  comme de modules 1 et  $\frac{1}{x}$ , ou  $x$  et 1.

### VIII. FAISCEAUX NON ISOTHERMES.

24. Soit l'équation  $\omega = o$  d'un faisceau non isotherme; par le moyen d'un facteur normant  $\nu^* = \sqrt{I}$ , on donnera au premier membre de l'équation la forme *normale*

$$\omega^* = \sqrt{I} \omega \quad (99)$$

dont les invariants seront ceux de l'équation  $\omega = o$ ; en particulier, si on part des formes  $\omega_0 = df$ , ou  $\omega_1$ , on aura

$$\omega^* = \sqrt{\frac{\Theta'(f, \Omega f)}{\Delta f}} df = \sqrt{\Theta'(f, \Omega f)} \omega_1 .$$

Il résulte de la première formule (36) que la forme normale  $\omega^*$  est caractérisée par son invariant  $I^*$  ramené à l'unité

$$I^* = 1$$

cependant qu'en général les ordres des opérateurs et des invariants (dont les symboles portent des astérisques) sont majorés de deux unités par rapport à ceux qui leur correspondent pour une forme  $\omega$

quelconque. Nous avons établi que, jusqu'à l'ordre  $n$  inclus, l'équation  $\omega = o$  a  $\frac{n(n-3)}{2}$  invariants, soit en général (pour  $n > 3$ )  $n-2$  nouveaux invariants d'ordre  $n$ ; ces invariants, considérés comme ceux de la forme  $\omega^*$ , sont d'ailleurs donnés par les formules déjà établies, ainsi que les opérateurs différentiels attachés à  $\omega^*$ ; ainsi

$$\mathcal{O}^* = I_0^{-\frac{1}{2}} \mathcal{O}_0 = I_1^{-\frac{1}{2}} \mathcal{O}_1 \quad \mathcal{T}^* = I_0^{-\frac{1}{2}} \mathcal{T}_0 = I_1^{-\frac{1}{2}} \mathcal{T}_1 \quad \text{etc.}$$

$$D^* = I_0^{-\frac{1}{2}} \Omega f - \frac{\Delta'(f, I_0^{-\frac{1}{2}})}{\Delta f} = I_0^{-\frac{1}{2}} D_1 - \Lambda f^{-\frac{1}{2}} \Delta'(f, I_1^{-\frac{1}{2}})$$

$$T^* = - \frac{\Theta'(f, I_0^{-\frac{1}{2}})}{\Delta f} = I_1^{-\frac{1}{2}} T_1 - \Delta f^{-\frac{1}{2}} \Theta'(f, I_1^{-\frac{1}{2}}) \quad \text{etc.}$$

avec les expressions déjà données

$$I_1 = \Theta'(f, \Omega f) = \Lambda \varphi \quad I_0 = \frac{I_1}{\Delta f} \quad \text{etc.}$$

Le  $ds^2$  utilisé pour la formation des paramètres différentiels précédents étant arbitraire, on peut en particulier le fixer suivant le  $d\sigma^{*2}$  canonique à  $\omega^*$ , de sorte que cette forme soit à la fois normale et semi-normale. A l'équation  $\omega = 0$  on peut associer l'équation différentielle du 2<sup>e</sup> ordre  $\omega d\omega_i - \omega_i d\omega = 0$  des courbes constituant avec le faisceau donné le réseau angulaire déjà signalé. L'on peut plus généralement considérer l'*ensemble* ( $I_1$ ) des courbes de même  $\Lambda \varphi$  par rapport à un faisceau isotherme arbitraire et un  $ds^2$  arbitrairement fixé, ensemble formé de faisceaux pour lesquels les seminvariants  $I_1$  seront simultanément ramenés à l'unité quand on passera de  $\omega_1$  à  $\omega^*$ ; un tel ensemble a même généralité que l'ensemble isotherme ( $I_1 = 0$ ), et les faisceaux qui le constituent sont donnés par l'équation générale

$$\sqrt{\frac{\xi}{\eta}} e^{-i\varphi} du + \sqrt{\frac{\eta}{\xi}} e^{i\varphi} d\varphi = 0$$

$\xi(u)$ ,  $\eta(\varphi)$  étant des fonctions arbitraires de leurs arguments. L'arc conforme  $d\sigma^*$  n'est attaché qu'aux courbes d'un même ensemble ( $I_1$ ).

Nous avons déjà indiqué (*Equivalences*) certaines formes particulières de l'équation  $\omega = 0$ ; par exemple dans les cas où le  $d\sigma^{*2}$  canonique à  $\omega^*$  serait à courbure totale  $k^*$  nulle ou constante, on aurait

$$Q = \frac{a(u)}{b(\varphi)} e^{Z(u)M(\varphi)} \quad k^* = 0$$

$$Q = \frac{a(u)}{b(\varphi)} \left\{ \frac{C \overline{Z(u) - M(\varphi)}^2}{2 Z' M'} \right\}^{\frac{1}{c}} \quad k^* = C, \text{ constante.}$$

25. Le problème de la classification des faisceaux de courbes vis-à-vis des transformations conformes est celui de la conservation des équations  $\omega = 0$ , ou des formes normales  $\omega^*$ ; si nous avons étudié auparavant la formation des invariants des formes générales  $\omega$ , et des formes particulières  $\omega_0, \omega_1$ , c'est d'abord parce que les méthodes applicables à ces formes nous menaient aux résultats cherchés pour les formes  $\omega^*$  ou les équations; mais on doit aussi considérer que les invariants des équations sont des fonctions  $f$  invariantes, ou conduisent à de nouvelles formes de Pfaff invariantes, auxquelles s'appliquent les calculs précédemment faits.

Quant aux relations suffisantes entre invariants pour assurer l'équivalence conforme d'équations  $\omega = 0$ , ou la conservation de formes  $\omega^*$  — le problème relatif aux formes  $\omega$  quelconques offrant ici moins d'intérêt — nous nous contenterons de rappeler que pour les formes normales  $\omega^*$  possédant des invariants conformes, nous avons distingué trois classes principales avec:

1<sup>o</sup> le cas général où les invariants  $D^*$  et  $T^*$  du 4<sup>e</sup> ordre sont distincts;

2<sup>o</sup> le cas où il y a entre ces deux invariants une relation identique, mais où les invariants du 5<sup>e</sup> ordre sont distincts de l'invariant du 4<sup>e</sup> ordre conservé;

3<sup>o</sup> le cas où les invariants du 4<sup>e</sup> ordre sont fonctions d'un seul d'entre eux.

On peut interpréter ces trois cas en les ramenant à des problèmes d'applicabilité, en prenant pour  $ds^2$  le  $d\sigma^{*2}$  canonique normal sur lequel

$$I^* = I_1 = \Lambda \varphi = \text{rot } \mathbf{g}_1 = 1$$

les invariants essentiels  $D^*$  et  $T^*$  étant alors les courbures géodésiques du faisceau considéré et du faisceau orthogonal; avec les notations de la formule (96) on a alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega^* = \sqrt{\varphi_{uv}} (e^{-i\varphi} du + e^{i\varphi} dv) \\ ds^2 = d\sigma^{*2} = \varphi_{uv} du dv \end{array} \right. \quad (100)$$

$$W^2 = P^* = \varphi_{uv} \quad e^\varphi = \frac{W}{2} = \sqrt{\varphi_{uv}}$$

les invariants de la forme  $\omega^*$  s'exprimant au moyen de  $\varphi$  et de ses dérivées, et les formes  $\omega^*$  d'un même ensemble différant par le choix de l'angle  $\varphi$  solution de l'équation  $4\varphi_{uv} = W^2$ .

Dans le cas général, l'ensemble considéré, qui se conserve dans la déformation, est astreint seulement à la condition précédente  $I^* = 1$ ; dans le second cas, le faisceau  $\omega = 0$  appartient à un réseau angulaire déficient, les lignes  $z = \text{const.}$  suivant lesquelles les courbures géodé-

siques restent constantes étant différentes des lignes  $k^* = \text{const.}$ ; dans le dernier cas, tous les invariants du faisceau  $\varpi = 0$  restent constants le long des mêmes lignes  $z = \text{const.}$

## IX. PROBLÈMES OÙ INTERVIENT LA REPRÉSENTATION CONFORME.

26. A un faisceau de courbes donné, d'équation  $\varpi = 0$ , se rattachent naturellement de façon invariante les courbes  $z = \text{const.}$ ,  $z$  étant un invariant quelconque de l'équation, et les invariants des courbes ainsi introduites facilitent l'interprétation géométrique des invariants d'ordre supérieur de l'équation donnée. D'autres familles de courbes, se rattachant à des invariants relatifs, invariants brisés, etc., sont également intéressantes à considérer; la plus simple est la famille de courbes  $\varphi = \text{const.}$ , et les relations de ce nouveau faisceau avec le faisceau donné interviennent souvent dans les propriétés géométriques: ces courbes  $\varphi = \text{const.}$  sont en effet les *isoclines conformes* du faisceau donné par rapport au système isotherme de lignes coordonnées  $X = \text{const.}$ ,  $Y = \text{const.}$

Les courbes  $W = \text{const.}$  sur un  $ds^2$  donné sont aussi intéressantes, mais elles se rapportent seulement à une représentation plane du  $ds^2$ . Considérons plus généralement une équation  $\varpi = 0$ , et introduisons les formes semi-normales pour deux  $ds^2$  en correspondance

$$ds^2 = W^2 du dv \quad ds'^2 = W'^2 du dv \quad (101)$$

$$\begin{cases} \varpi_1 = v_1 \varpi & v_1 = \frac{W}{2\sqrt{P}} \\ \varpi'_1 = v'_1 \varpi & v'_1 = \frac{W'}{2\sqrt{P}} \end{cases}$$

$$r = \frac{v'_1}{v_1} = \frac{W'}{W}. \quad (102)$$

On a donc  $\varpi'_1 = r\varpi_1$ , et en appliquant les formules relatives aux formes proportionnelles (Chap. III), on obtient sans peine les modifications que subissent les invariants euclidiens attachés aux courbes se correspondant dans une représentation conforme entre deux surfaces. Les courbes  $r = \text{const.}$  interviendront ici à côté des courbes  $\varphi = \text{const.}$ ; nous allons en donner quelques exemples: les courbures géodésiques des courbes  $\varpi = 0$  sur les deux surfaces en question sont liées par la relation

$$D'_1 = \frac{1}{r} (D_1 + \mathcal{O}'_1 r) = \frac{1}{r} (D_1 + \mathcal{O}_1 \log r) \quad (103)$$

qu'on obtient encore en utilisant les formules

$$D_1 = \mathcal{O}_1 \log W + \mathfrak{C}_1 \varphi \quad D'_1 = \mathcal{O}'_1 \log W' + \mathfrak{C}'_1 \varphi$$

$$\mathcal{O}'_1 = \frac{1}{r} \mathcal{O}_1 \quad \mathfrak{C}'_1 = \frac{1}{r} \mathfrak{C}_1 \quad W' = rW .$$

On déduit en particulier de la formule (103): *il est toujours possible de représenter conformément un faisceau de courbes non géodésiques suivant un faisceau de géodésiques, et pour mettre en correspondance conforme deux faisceaux de géodésiques, il est nécessaire et suffisant que ces faisceaux soient ceux des courbes  $r = \text{const.}$ , suivant lesquelles le module de la représentation reste constant.* On peut aussi, pour les relations entre invariants euclidiens, faire appel aux formules vectorielles.

$$\mathbf{g}'_1 = \mathbf{g}_1 - \nabla \log r \quad (104)$$

$$\mathbf{d}'_1 = r \mathbf{d}_1 \quad \mathbf{t}'_1 = r \mathbf{t}_1 \quad \nabla' \log r = \nabla \log r$$

ou l'on suppose les deux  $ds^2$  représentés sur une même surface.

27. Nous modifierons légèrement ici les notations précédentes pour reprendre celles de notre Thèse; au point courant  $\mathbf{m}$  d'une surface est attaché un repère euclidien  $\mathbf{m}\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{n}$ , de sorte que

$$d\mathbf{m} = \omega_1 \mathbf{a}_1 + \omega_2 \mathbf{a}_2$$

$$\omega_1 = A_1(\alpha_1, \alpha_2) d\alpha_1 \quad \omega_2 = A_2(\alpha_1, \alpha_2) d\alpha_2 ;$$

l'indice  $s$  étant affecté aux opérations superficielles, nous posons

$$d\Phi = \Phi_1 \omega_1 + \Phi_2 \omega_2 \quad \nabla_s \Phi = \Phi_1 \mathbf{a}_1 + \Phi_2 \mathbf{a}_2$$

pour une fonction scalaire  $\Phi(\alpha_1, \alpha_2)$  déterminée sur la surface. Le covariant bilinéaire  $\omega'_1$  de  $\omega_1$  introduit la forme de Pfaff  $\omega_{12}$  et les vecteurs  $\mathbf{f}, \mathbf{g}$ , par

$$\omega'_1 = [\omega_{12} \omega_2] \quad \text{rot}_s \mathbf{a}_1 = [\mathbf{f} \mathbf{a}_2]_s = \mathbf{g} \times \mathbf{a}_2$$

$$\mathbf{f} = g_1 \mathbf{a}_1 + g_2 \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{g} = J\mathbf{f} = -g_2 \mathbf{a}_1 + g_1 \mathbf{a}_2 .$$

Soit une première application au *problème des congruences de normales*, traité par Beltrami, Laguerre, etc.; les droites  $[\mathbf{mu}]$ ,  $\mathbf{u}$  étant le vecteur unitaire

$$\mathbf{u} = \sin \theta \cdot \mathbf{a}_1 + \cos \theta \cdot \mathbf{n}$$

forment une congruence de normales s'il existe un point

$$\mathbf{p} = \mathbf{m} + \lambda \mathbf{u}$$

tel que le déplacement  $d\mathbf{p}$  soit orthogonal à  $\mathbf{u}$ , donc

$$\mathbf{u} \times d\mathbf{p} = \mathbf{u} \times d\mathbf{m} + d\lambda = 0 \quad (105)$$

équation qui exprime que  $\mathbf{u} \times d\mathbf{m}$  est une différentielle exacte, donc  $\mathbf{u}$  un gradient (spatial)

$$\mathbf{u} = -\nabla\lambda = \nabla F(\alpha_1)$$

$$\mathbf{v} = \sin\theta \cdot \mathbf{a}_1 = \nabla_s F(\alpha_1) .$$

La condition d'intégrabilité de l'équation précédente

$$\sin\theta \cdot \omega_1 + d\lambda = 0 \quad (105')$$

s'écrit

$$\sin\theta [\omega_{12} \omega_2] + [d(\sin\theta) \cdot \omega_1] = 0 . \quad (106)$$

En écartant la solution  $\sin\theta = 0$ , correspondant aux normales à la surface, et posant

$$\log \sin\theta = \Theta$$

il vient

$$[\mathbf{f}\mathbf{a}_2]_s + [\nabla_s \Theta \cdot \mathbf{a}_1]_s = (\mathbf{g} - \nabla_s \Theta) \times \mathbf{a}_2 = g_1 - \Theta_2 = 0 . \quad (107)$$

28. Une solution bien connue est obtenue quand les lignes du champ projeté, de tangentes  $\mathbf{a}_1$ , forment un faisceau de géodésiques  $g_1 = 0$ ; on a alors  $\Theta = G(\alpha_1)$ , fonction arbitraire ( $\theta = \text{const. en particulier}$ ).

Revenons au cas général, et soit  $\Theta_0$  une solution particulière de (107); alors

$$\Theta = \Theta_0 + G(\alpha_1) \quad \sin\theta = e^G \sin\theta_0 \quad (108)$$

est la solution générale; il suffit donc de connaître une solution particulière  $\Theta_0$  de

$$(\mathbf{g} - \nabla_s \Theta) \times \mathbf{a}_2 = 0 .$$

Si les lignes du champ projeté,  $\alpha_2 = \text{const.}$ , sont isothermes et si le  $ds^2$ , rapporté à ces lignes et leurs trajectoires orthogonales, a la forme

$$ds^2 = W^2(dX^2 + dY^2)$$

la formule (61) montre qu'il suffit de prendre

$$\Theta_0 = -\omega + c \quad \sin\theta_0 = \frac{C}{W} \quad \left( e^\omega = \frac{W}{2} \right)$$

$c, C$  étant des constantes.

La même solution est valable si la forme précédente du  $ds^2$  est rapportée à un système isotherme que les lignes  $\alpha_2 = \text{const.}$  coupent sous angle  $\varphi$  permanent (constant le long de ces lignes) puisqu'on a alors

$$\mathbf{g} = -\nabla w + J \nabla \varphi \quad J \nabla \varphi \times \mathbf{a}_2 = 0 \quad \varphi = H(\alpha_2) ;$$

une représentation conforme de la surface suivant le  $dl^2 = dx^2 + dy^2$  fait alors correspondre un faisceau de droites aux lignes du champ projeté.

Enfin, dans le cas général, il suffit de même d'effectuer une représentation conforme transformant en géodésiques les lignes du champ projeté;  $\mathbf{g}' = \mathbf{g} - \nabla_s \log r$  étant alors porté par  $\mathbf{a}_1$ , il reste à satisfaire à

$$(\nabla_s \log r - \nabla_s \Theta) \times \mathbf{a}_2 = 0$$

d'où la solution particulière

$$\sin \theta_0 = Cr .$$

En résumé, les transformations conformes permettent de déduire la solution générale du problème du cas particulier où les lignes du champ projeté sont des géodésiques, le vecteur  $\mathbf{v}$  du champ projeté participant à la transformation conforme (superficielle) qui ramène le faisceau de géodésiques aux lignes de ce champ; le vecteur  $\mathbf{u}$  se déduit ensuite de sa projection  $\mathbf{v}$ .

29. Comme seconde application, nous donnerons quelques indications sur une théorie nouvellement développée; celle des *réseaux cerclés* (zyklische Kurvennetze)<sup>1</sup>; un tel réseau est formé par les courbes d'un surface dont les cercles osculateurs sont, en un même point  $\mathbf{m}$ , cosphériques à un cercle orthogonal à la surface en ce point, et est défini par une équation différentielle du 2<sup>me</sup> ordre. Soit  $\mathbf{u}$  le vecteur unitaire suivant le diamètre de ce cercle, issu de  $\mathbf{m}$ , tangent à la surface; le cercle, de rayon  $\rho$ , est défini en chaque point par le vecteur  $\mathbf{w} = \frac{\mathbf{u}}{\rho}$  ou par le vecteur perpendiculaire  $\mathbf{v} = -J\mathbf{w}$ .

Un repère superficiel arbitraire  $\mathbf{ma}_1\mathbf{a}_2$  étant choisi en tout point de la surface, soient  $\mathbf{t}$  et  $\mathbf{q}$  les tangente et normale unitaires aux lignes du réseau cerclé,  $g$  la courbure géodésique (suivant  $\mathbf{q}$ ) d'une ligne d'un faisceau contenu dans ce réseau

$$g = \mathbf{f} \times \mathbf{t} = \mathbf{g} \times \mathbf{q} .$$

<sup>1</sup> W. BLASCHKE, J. RADON: Ueber konforme Geometrie, Abh. Hamb., 4, 5 (1925, 1926). Exposé de T. TAKASU: Differentialkugelgeometrie, Tôkohu Sc. Rep., 17 (1928).

Soit  $\Phi$  l'angle d'une ligne du réseau avec la première ligne coordonnée, à laquelle sont attachés les vecteurs  $\mathbf{f}_0$ ,  $\mathbf{g}_0 = J\mathbf{f}_0$ ; d'après la formule (61), on a

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_0 + \nabla_s \Phi . \quad (109)$$

La propriété géométrique indiquée se traduit aussitôt par

$$\mathbf{g} = \mathbf{w} \times \mathbf{q} \equiv \mathbf{v} \times \mathbf{t}$$

donc l'équation différentielle cherchée est

$$(\mathbf{f}_0 + \nabla_s \Phi) \times \mathbf{t} = \mathbf{v} \times \mathbf{t} \quad \mathbf{t} = \frac{d\mathbf{m}}{ds} \quad (110)$$

ou, avec les formes de Pfaff

$$\begin{aligned} \omega_{12} &= \mathbf{f}_0 \times d\mathbf{m} & \chi &= \mathbf{v} \times d\mathbf{m} \\ g &\equiv \frac{\omega_{12} + d\Phi}{ds} = \frac{\chi}{ds} . \end{aligned} \quad (111)$$

Sous forme entière, cette équation s'écrit encore

$$\mathcal{G} - \chi ds^2 = 0 \quad (111')$$

avec

$$\mathcal{G} = ds^2 (\omega_{12} + d\Phi) = (\omega_1^2 + \omega_2^2) \omega_{12} + \omega_1 d\omega_2 - \omega_2 d\omega_1 .$$

L'équation  $\mathcal{G} = 0$  est l'équation du réseau des géodésiques (euclidiennes) de la surface: c'est un cas particulier de réseau cerclé avec  $\chi = 0$ .

### 30. La transformation conforme

$$d\bar{s}^2 = r^2 ds^2 \quad \bar{g} = \frac{1}{r} \left( g + \frac{(d \log r)_i}{ds} \right)$$

donne à l'équation (111) la forme

$$\bar{g} = \frac{\chi + (d \log r)_i}{d\bar{s}} \equiv \frac{\bar{\chi}}{d\bar{s}} \quad (112)$$

ce qui montre que toute transformation conforme change un réseau cerclé en un autre de même espèce, ou conserve l'ensemble de ces réseaux. Si  $\chi_i$  est une différentielle exacte — à covariant bilinéaire  $\chi'_i = 0$ , ou l'invariant  $D_0$  de  $\chi$  nul — on peut annuler  $\bar{g}$ , donc le réseau cerclé est un réseau de géodésiques conformes pour le  $d\bar{s}^2$  convenable.

D'autre part, dans (111), si  $\chi$  a même covariant bilinéaire que  $\omega_{12}$

$$\gamma' = \omega'_{12} \equiv -K[\omega_1 \omega_2] \quad \text{ou} \quad \operatorname{div} \mathbf{w} = \operatorname{div} \mathbf{g} \equiv K \quad (113)$$

$K$  étant la courbure totale du  $ds^2$ , on a

$$\chi = \omega_{12} + d\Psi$$

et l'équation du réseau cerclé se réduit à

$$\frac{d(\Phi - \Psi)}{ds} = 0 \quad \text{ou} \quad ds^2 \cdot d(\Phi - \Psi) = 0 ; \quad (114)$$

par suite ce réseau est alors un réseau *angulaire* (celui défini par les lignes coordonnées dans le cas  $\Psi = \text{const.}$ ); cette forme de l'équation suffit à montrer que la condition (113) est invariante par transformation conforme. On peut évidemment établir une classification des réseaux cerclés au point de vue des transformations conformes superficielles, mais la théorie de ces réseaux peut aussi se baser sur la géométrie conforme spatiale (géométrie des sphères), ce qui en facilite l'étude; aussi nous ne donnons pas d'autres applications<sup>1</sup>.

## X. INVARIANTS DES FORMES ET ÉQUATIONS QUADRATIQUES.

34. Soit une forme quadratique

$$\alpha^{(2)} = L du^2 + 2M du dv + N dv^2 \quad (115)$$

qu'on peut considérer comme décomposable d'une infinité de façons en un produit de deux formes linéaires

$$\varpi_1 = x(A_1 du + B_1 dv) \quad \varpi_2 = \frac{1}{x} (A_2 du + B_2 dv)$$

$x$  étant un facteur arbitraire,  $A_1, B_1, A_2, B_2$  solutions des équations

$$A_1 A_2 = L \quad A_1 B_2 + A_2 B_1 = 2M \quad B_1 B_2 = N .$$

Nous avons indiqué (*Equivalences*) la formation régulière des invariants de la forme  $\alpha^{(2)}$  et les relations de ceux-ci avec les invariants des formes  $\varpi_1$  et  $\varpi_2$ , et nous avons vu alors qu'on se trouvait amené, en posant

$$L = A^2 \quad N = B^2 \quad (116)$$

<sup>1</sup> Il est, d'autre part, intéressant de rapprocher cette théorie de celle des changements de connexion (avec torsion) des surfaces. Cf. *Thèse, Note terminale*.

à introduire la forme de Pfaff

$$\varpi = A du + B d\varphi \quad (117)$$

à laquelle nous joindrons son adjointe positive

$$\varpi_i = i(-A du + B d\varphi) .$$

La forme quadratique

$$\beta^{(2)} = -i(L du^2 - N d\varphi^2) = \varpi \varpi_i \quad (118)$$

peut être appelée, comme on s'en rend aisément compte, *forme bissectrice* de la forme  $\alpha^{(2)}$ , et les formes linéaires dont elle est le produit seront aussi considérées comme des formes de Pfaff bissectrices (1<sup>re</sup> ou 2<sup>me</sup>) de  $\alpha^{(2)}$ . Sans reprendre, pour les formes quadratiques, les calculs faits pour les formes de Pfaff des invariants de formes proportionnelles, nous allons nous contenter de mettre en évidence l'interprétation géométrique des invariants. Les indices 1 et 2 étant affectés respectivement aux formes  $\varpi_1$  et  $\varpi_2$ , en posant

$$Q_1 = \frac{A_1}{B_1} = e^{-2i\varphi_1} \quad Q_2 = \frac{A_2}{B_2} = e^{-2i\varphi_2}$$

nous prendrons pour les formes  $\varpi$  et  $\varpi_i$

$$\varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \quad \varphi_1 = \varphi + \frac{\pi}{2}$$

et ceci justifie les noms donnés aux formes  $\varpi$ ,  $\varpi_i$ ,  $\beta^{(2)}$ .

32. La forme  $\alpha^{(2)}$  possède un invariant du 1<sup>er</sup> ordre

$$\mu = \frac{M^2}{LN} = \frac{1}{4} \left( \sqrt{\frac{Q_1}{Q_2}} + \sqrt{\frac{Q_2}{Q_1}} \right)^2 = \cos^2(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (119)$$

qui est aussi invariant de l'équation  $\alpha^{(2)} = 0$ , et ne s'annule que si  $\alpha^{(2)}$  est un produit de formes de Pfaff orthogonales; il sera commode de poser

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \quad M = AB \cos 2\omega \quad \mu = \cos^2 2\omega \\ \alpha^{(2)} = A^2 du^2 + 2AB \cos 2\omega \cdot du d\varphi + B^2 d\varphi^2 \\ \qquad = P \left\{ e^{-2i\varphi} du^2 + (e^{2i\omega} + e^{-2i\omega}) du d\varphi + e^{2i\varphi} d\varphi^2 \right\} . \end{array} \right. \quad (120)$$

Le cas des formes quadratiques  $\alpha^{(2)}$  à invariant  $\mu$  constant présente peu d'intérêt, l'étude de telles formes se ramenant aussitôt à celle

d'une seule forme de Pfaff,  $\varpi$  ou  $\varpi_i$  par exemple, et les facteurs linéaires des formes  $\alpha^{(2)}$  et  $\beta^{(2)}$  entrant dans un même réseau angulaire. Cependant l'introduction de la forme bissectrice  $\beta^{(2)}$  attache à une forme quadratique quelconque une forme de l'espèce précédente, dont l'invariant du 1<sup>er</sup> ordre est nul.

A partir d'un  $ds^2$  arbitraire

$$ds^2 = W^2 du dv$$

on pourra comme précédemment traduire les invariants et les opérateurs de la forme  $\alpha^{(2)}$  avec les paramètres différentiels de ce  $ds^2$  par le moyen de seminvariants. La forme  $\alpha^{(2)}$  sera *semi-normale* pour le  $ds^2$  si  $4P = W^2$ ; autrement dit on pourra lui attacher un  $d\sigma^2$  *canonique*:  $d\sigma^2 = 4P du dv$ .

Les opérateurs différentiels les plus simples de la forme  $\alpha^{(2)}$  sont ceux de sa forme bissectrice  $\varpi$ , soit  $\mathcal{D}_u$ ,  $\mathcal{D}_v$  ou ceux que nous en avons déduit  $\mathcal{O}$ ,  $\mathcal{T}$ ; les quatre invariants du 2<sup>me</sup> ordre ainsi formés sont D, T, et

$$\left\{ \begin{array}{l} R = \mathcal{D}_\mu = \frac{1}{2}(\rho + \sigma) \\ S = \mathcal{T}_\mu = \frac{i}{2}(\rho - \sigma) \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho = \mathcal{D}_u \mu \\ \sigma = \mathcal{D}_v \mu \end{array} \right. \quad (121)$$

composantes de la forme invariante

$$d\mu = \mathcal{D}_\mu \cdot \varpi + \mathcal{T}_\mu \cdot \varpi_i. \quad (122)$$

Nous ne poussons pas plus loin le calcul des invariants, et ne revenons pas sur le cas particulier des formes  $\alpha_0^{(2)} = 2M du dv$ .

33. Nous avons vu qu'on peut ramener le cas d'une équation invariante  $\alpha^{(2)} = 0$  à celui d'une forme invariante normée. En nous tenant au cas général, nous prenons pour facteur normant

$$Q = R^2 + S^2 = \rho \sigma \quad (123)$$

ou, par l'intermédiaire d'un  $ds^2$

$$Q = \frac{\mu_u \mu_v}{P} = \frac{W^2}{4P} \cdot \Delta \mu \quad (123')$$

d'où la forme *normale*

$$*\alpha^{(2)} = Q \alpha^{(2)} \quad (124)$$

qu'accompagne la forme de Pfaff *pseudo-normale*  $*\varpi = \sqrt{Q} \varpi$ , le facteur normant n'étant pas défini à partir de la forme  $\varpi$  seulement. Considérons alors les formes

$$\left\{ \begin{array}{l} d\mu = \sqrt{\mu_u \mu_v} (e^{-i\psi} du + e^{i\psi} dv) \\ * \varpi = \sqrt{\mu_u \mu_v} (e^{-i\varphi} du + e^{i\varphi} dv) \end{array} \right. \quad (125)$$

et les opérateurs  $*\mathfrak{D}_u$ ,  $*\mathfrak{D}_v$  ou  $*\mathcal{O}$ ,  $*\mathcal{C}$  attachés à  $*\varpi$ , et de même  $\delta_u$ ,  $\delta_v$  ou  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{Y}$  attachés à  $d\mu$ , de sorte que

$$\mathcal{X}_z = \frac{\Delta'(\mu, z)}{\Delta \mu} \quad \mathcal{Y}_z = \frac{\Theta'(\mu, z)}{\Delta \mu}$$

d'après les formules (39). On peut alors, pour former les invariants de  $*\alpha^{(2)}$ , suivre deux voies légèrement divergentes (*Equivalences*, nos 26 et 28). Dans le premier cas, on emploie les opérateurs attachés à  $d\mu$ ; on rencontre d'abord l'invariant du 2<sup>me</sup> ordre

$$\tau = \frac{\mu_u}{\mu_v} \cdot \frac{B}{A} = e^{2i(\varphi - \psi)} = \frac{\sigma}{\sigma} \quad (126)$$

qu'on retrouve de même avec les opérateurs attachés à  $*\varpi$ ; puis l'on obtient les invariants du 4<sup>me</sup> ordre

$$\varepsilon = \Omega \mu = \frac{\Lambda \mu}{\Delta \mu} \quad \eta = \frac{\Lambda (\varphi - \psi)}{\Delta \mu} \quad \Phi = \mathcal{X}_\tau \quad \Theta = \mathcal{Y}_\tau \quad (127)$$

et l'on poursuit de même le calcul pour les invariants d'ordre supérieur. Dans le second cas, on utilise les opérateurs de la forme  $*\varpi$ ; pour la forme normale  $*\alpha^{(2)}$ , on a

$$*Q = *\rho *\sigma = *R^2 + *S^2 = 1 \quad *\rho = \sqrt{\tau} \quad *\sigma = \frac{1}{\sqrt{\tau}}$$

et en posant

$$*R = \cos \theta \quad *S = \sin \theta$$

on retrouve l'invariant

$$\theta = \psi - \varphi \quad (126')$$

d'où les invariants suivants, qui s'expriment aussitôt avec ceux précédemment calculés. Entre les opérateurs de  $d\mu$  et  $*\varpi$ , on a d'ailleurs les relations

$$\left\{ \begin{array}{l} *\mathfrak{D}_u = e^{-i\theta} \delta_u \\ *\mathfrak{D}_v = e^{i\theta} \delta_v \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} *\mathcal{O} = \cos \theta \cdot \mathcal{X} - \sin \theta \cdot \mathcal{Y} \\ *\mathcal{C} = \sin \theta \cdot \mathcal{X} + \cos \theta \cdot \mathcal{Y} \end{array} \right. \quad (128)$$

Pour une forme  $*\alpha^{(2)}$  générale, pour laquelle  $\Theta \neq 0$ , ou  $\Theta'(\mu, \tau) \neq 0$ , nous avons montré que les invariants  $\mu$ ,  $\tau$ ,  $\Phi$ ,  $\Theta$  sont suffisants pour la conservation de l'équation  $\alpha^{(2)} = 0$ .

34. Au point de vue géométrique, nous considérons que l'équation  $\alpha^{(2)} = 0$  définit un double faisceau, ou faisceau du second ordre, de lignes tracées sur une surface; l'équation  $\beta^{(2)} = 0$  définit le double faisceau bissecteur du précédent, et  $\varpi = 0$  est l'équation d'un faisceau simple, considéré comme premier bissecteur. Le faisceau d'équation  $d\mu = 0$  est celui le long duquel l'angle d'ouverture  $2\omega$  du faisceau initial est permanent:  $\theta$  est l'inclinaison du faisceau  $d\mu = 0$  sur le faisceau bissecteur  $\varpi = 0$ ; dans le cas général  $\Theta \neq 0$ , les lignes  $\omega = \text{const.}$  et les lignes  $\theta = \text{const.}$  forment des faisceaux différents.

Il sera d'autre part naturel d'utiliser la représentation sur un  $d^*\sigma^2$  canonique défini par

$$*W^2 = 4\mu_u\mu_v = 4^*P \quad (129)$$

sur lequel les formes  $*\varpi$  et  $d\mu$  sont semi-normales, donc le faisceau  $d\mu = 0$  un faisceau de courbes parallèles, avec  $\Delta\mu = 1$ .

Au point de vue de l'isothermie, on pourra distinguer les cas suivants:

1° L'invariant I de la forme  $\varpi$  est nul, ou  $\Lambda\varphi = 0$ ; le double faisceau bissecteur est alors isotherme, et nous pourrons dire que le double faisceau  $\alpha^{(2)} = 0$  est *hémi-isotherme*.

2°  $\Lambda\omega = 0$ ; avec  $\mu = \cos^2 2\omega$ ,  $\varepsilon = \Omega\mu$ , on traduit facilement cette condition avec les invariants de l'équation  $\alpha^{(2)} = 0$ . Ceci exprime que les deux faisceaux simples appartenant à  $\alpha^{(2)} = 0$  font partie d'un même ensemble ( $I_1$ ).

3° On a simultanément

$$\Lambda\varphi = 0 \quad \Lambda\omega = 0 ; \quad (130)$$

alors les faisceaux simples de l'équation  $\alpha^{(2)} = 0$  font partie d'un même ensemble isotherme, comprenant aussi les faisceaux de  $\beta^{(2)} = 0$ ; nous dirons que ces conditions (130) sont celles d'*holo-isothermie* de  $\alpha^{(2)} = 0$ .

## XI. DEUX FAISCEAUX QUADRATIQUES DE LIGNES.

35. Nous avons, au Chapitre VI, considéré implicitement un double faisceau orthogonal avec les formes adjointes  $\varpi$  et  $\varpi_i$ , et montré les

relations entre les opérateurs attachés à ces formes:  $\mathfrak{D}_u$ ,  $\mathfrak{D}_v$  et  $\mathcal{O}$ ,  $\mathfrak{C}$ . En particulier, l'expression (90) de I

$$-I = -\frac{i}{2} \mathcal{L} \log Q = \frac{1}{2} \mathcal{V} \log q$$

rappelait que, dans le cas d'isothermie des formes

$$\begin{cases} \omega = xdf = Adu + Bdv \\ \omega_i = ydg = i(-Adu + Bdv) \end{cases} \quad (67)$$

$$Q = \frac{A}{B} \quad q = \frac{x}{y}$$

on avait simultanément

$$Q = \frac{a(u)}{b(v)} \quad q = \frac{X(f)}{Y(g)}$$

d'où la possibilité de réduction simultanée des équations  $du dv = 0$  et  $df dg = 0$  à des formes  $df^2 - dg^2 = 0$  et  $du^2 + dv^2 = 0$ .

Considérons plus généralement deux formes quadratiques  $ds^2$  et  $\alpha^{(2)}$  et pour montrer la symétrie des opérations vis-à-vis de ces formes, imaginons une transformation générale des variables  $u, v$  en  $\xi, \eta$ , telle que

$$\begin{aligned} \alpha^{(2)} &= L du^2 + 2M du dv + N dv^2 = C^2 d\xi d\eta \\ ds^2 &= W^2 du dv = E d\xi^2 + 2F d\xi d\eta + G d\eta^2. \end{aligned}$$

Le déterminant de la transformation étant  $\Delta = u_\xi v_\eta - u_\eta v_\xi$ , on a les identités

$$\left\{ \begin{array}{ll} W^2 u_\xi v_\xi = E & -\frac{C^2}{\Delta^2} v_\xi v_\eta = L \\ W^2 u_\eta v_\eta = G & -\frac{C^2}{\Delta^2} u_\xi u_\eta = N \\ W^2 (u_\xi v_\eta + u_\eta v_\xi) = 2F & -\frac{C^3}{\Delta} (u_\xi v_\eta + u_\eta v_\xi) = 2M \end{array} \right.$$

Aux transformations (3) des variables  $u, v$  conservant les équations  $\alpha^{(2)} = 0$ ,  $ds^2 = 0$ , correspondent des transformations de même espèce en  $\xi, \eta$ . On retrouve aussitôt l'invariant du 1<sup>er</sup> ordre

$$\mu = \frac{M^2}{LN} = \frac{F^2}{EG} = \cos^2 2\omega$$

et par suite la forme invariante  $d\mu$ . Pour la jacobienne des formes  $\alpha^{(2)}$  et  $ds^2$ , on a ensuite l'identité

$$\beta^{(2)} = -i(Ldu^2 - Ndv^2) = \frac{iC^2}{W^2}(E d\xi^2 - G d\eta^2)$$

qui résulte de la syzygie entre deux formes quadratiques et leur jacobienne

$$(W^2\alpha^{(2)} - 2Mds^2)^2 - 4LN(ds^2)^2 = W^4\beta^{(2)2}.$$

L'équation  $\beta^{(2)} = 0$  et la forme  $d\mu$  étant invariantes, l'emploi des opérateurs attachés à  $d\mu$  (n° 33) permet de poursuivre le calcul aussi bien avec les variables  $\xi, \eta$  qu'avec  $u, v$ . Ainsi, à l'invariant  $\tau$  de la formule (126) correspond, en variables  $\xi, \eta$  l'invariant

$$\bar{\tau} = \frac{\mu_\xi}{\mu_\eta} \sqrt{\frac{G}{E}} = \frac{c\tau + 1}{\tau + c} \quad \text{avec} \quad \left(c + \frac{1}{c}\right)^2 = 4\mu$$

c'est-à-dire où  $c$  est la quantité

$$\sqrt{\frac{Q_1}{Q_2}} = e^{2i\omega}$$

de la formule (119), donc

$$\bar{\tau} = \frac{\cos(\omega - \theta)}{\cos(\omega + \theta)} \quad (\theta = \psi - \varphi).$$

36. Les méthodes analytiques précédentes ne nécessitent évidemment pas l'introduction des lignes minima et de la représentation conforme; elles s'appliqueront de même aux théories géométriques où un faisceau quadratique de lignes particulières jouera un rôle primordial (lignes asymptotiques, lignes de courbure, etc.), et le dernier problème que nous avons indiqué est celui de la conservation de deux faisceaux quadratiques de lignes; on sait qu'à ce problème se rattache aussi celui de la permutation de deux faisceaux quadratiques, les faisceaux du 1<sup>er</sup> ordre constituants de deux faisceaux quadratiques pouvant être répartis autrement que dans le groupement primitif. Nous n'entrerons pas dans le détail de ces problèmes.