Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 30 (1931)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR L'ÉQUIVALENCE EN GÉOMÉTRIE DES MASSES
Autor: Turrière, Èmile
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-23886

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

SUR L'ÉQUIVALENCE EN GÉOMÉTRIE DES MASSES

PAR

Émile TURRIÈRE (Montpellier).

Deux systèmes de masses seront dits *équivalents* lorsqu'ils auront même masse totale, même centre de gravité et même moment d'inertie par rapport à un élément quelconque (point, droite ou plan) de l'espace.

Ces conditions sont évidemment surabondantes.

D'une manière précise, l'*équivalence résulte de l'égalité des deux masses totales et de l'identité des deux ellipsoïdes centraux d'inertie de Cauchy-Poinsot.*

Il en résulte l'identité des divers autres ellipsoïdes centraux (ellipsoïde de Binet, ellipsoïde de Mac-Cullagh, ellipsoïde de Culmann), et, ensuite, l'identité des ellipsoïdes pour n'importe quel point de l'espace: ces propositions sont des conséquences des théorèmes généraux sur les moments d'inertie.

Pratiquement, il y aura lieu d'assurer ou de vérifier, suivant les cas, l'égalité des masses totales, la coïncidence des centres de gravité ainsi que l'égalité des moments d'inertie par rapport à six droites quelconques passant par le centre commun de gravité.

Ces six droites pourront d'ailleurs être prises arbitrairement dans l'espace, sous la condition que deux d'entre elles ne soient pas parallèles. C'est ainsi que, dans certains cas, les six arêtes d'un tétraèdre pourront être considérées.

Au lieu de six droites quelconques, on pourra prendre six plans de directions distinctes, et supposer respectivement égaux les moments d'inertie planaires des deux systèmes matériels par rapport aux six plans.

Dans le cas particulier de la géométrie plane, l'équivalence de deux systèmes matériels situés dans un même plan est acquise lorsque, les masses totales étant égales et les centres de gravité confondus, les moments d'inertie par rapport aux trois côtés d'un triangle quelconque (non dégénéré) sont respectivement égaux. Il y a alors identité des ellipses centrales d'inertie et par suite des ellipsoïdes centraux.

Il y a équivalence des moments d'inertie par rapport à toutes les droites, à tous les points et à tous les plans de l'espace.

Il est à remarquer que l'emploi de l'ellipsoïde d'inertie de Cauchy-Poinsot (l'ellipsoïde habituellement considéré et qui représente les moments d'inertie par rapport à des droites) n'est pas indiqué dans cette théorie. L'ellipsoïde qui se présente dans les considérations qui vont suivre est l'*ellipsoïde de Culmann:* étant donné un système matériel l'étude des moments d'inertie planaires, pour les divers plans passant par un point O se fait au moyen de l'*ellipsoïde de Binet* d'équation:

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 = 1 \ ;$$

ou de l'ellipsoïde réciproque, appelé *ellipsoïde de Culmann*, dont l'équation est

$$\frac{X^2}{A} + \frac{Y^2}{B} + \frac{Z^2}{C} = 1 \ ;$$

les axes de ces ellipsoïdes sont les axes principaux d'inertie au point O; A, B, C représentent les moments planaires d'inertie par rapport aux plans $X = 0$, $Y = 0$ ou $Z = 0$.

Il y a lieu, par exemple, de remarquer que, tandis qu'en géométrie du triangle, l'ellipse centrale d'inertie est homothétique des ellipses inscrite ou circonscrite de centre G, centre de gravité du triangle, il n'en est pas de même pour le tétraèdre quelconque: l'ellipsoïde central d'inertie du tétraèdre n'a pas d'homothétique parmi les ellipsoïdes inscrits ou circonscrits, en nombre infini, de même centre.

De même, pour un choix convenable de densité, l'ellipse centrale d'inertie de l'aire de l'ellipse homogène coïncide avec l'ellipse elle-même. Il n'en est pas de même pour le volume homogène d'un ellipsoïde et son ellipsoïde central d'inertie de Cauchy-Poinsot.

Ces contradictions entre le cas du plan et celui de l'espace disparaissent par l'introduction de l'*ellipsoïde de Culmann, qui se présente ainsi de lui-même dans les résultats comme étant la véritable extension pour l'espace de l'ellipse d'inertie du plan.*

D'ailleurs, dans les recherches qui vont suivre, l'ellipsoïde de Culmann sera homothétique (dans un rapport imaginaire) à la quadrique conjuguée de même centre par rapport au tétraèdre fondamental: c'est là un fait digne d'intérêt.

Enfin, il est à remarquer — et ceci peut présenter de sérieux avantages dans certains cas pour la réduction des calculs — que l'enveloppe des plans de moment d'inertie nuls pour un système matériel donné est précisément l'ellipsoïde imaginaire (conjugué par rapport au tétraèdre dans les considérations qui suivent). Alors que les calculs de moments d'inertie peuvent être longs et pénibles, l'enveloppe des plans de moments d'inertie nuls est aisée à déterminer et l'ellipsoïde de Culmann s'en déduit immédiatement. Dans les calculs en coor-

données triangulaires ou tétraèdriques la forme remarquable de l'équation des coniques ou des quadriques conjuguées réduit les calculs d'éléments principaux au minimum de difficultés ou d'étendue.

Il est entendu que, dans l'étude présente, les masses négatives ne sont pas écartées. Il s'agit de géométrie du triangle et de géométrie du tétraèdre, où les faits doivent être présentés dans toute leur généralité. Il suffira de substituer à la notion d'ellipsoïde d'inertie celle de *quadrique d'inertie* (ou de conique d'inertie dans le plan).

Dans certains cas de représentation par équivalence d'un système matériel, il peut se faire que des points affectés de masses négatives fournissent des solutions simples. Comme il s'agit d'une question d'ordre pratique, de calculs par des procédés les plus simples possibles, il n'y a aucune raison de se priver de l'avantage que peuvent offrir de telles masses négatives.

L'ellipsoïde de Legendre. — L'ellipsoïde de LEGENDRE [1] est l'exemple le plus ancien d'équivalence entre un système matériel quelconque et la masse d'un ellipsoïde fictif, homogène. Partant de la remarque qu'un système particulier, dont la surface centrale d'inertie est une sphère de rayon R, est équivalent à une masse sphérique homogène de rayon $R\sqrt{5}$, on est conduit par affinité au théorème suivant:

Tout système de masses est équivalent à un ellipsoïde homogène (l'ellipsoïde de LEGENDRE).

L'ellipsoïde de Legendre est homothétique et concentrique à l'ellipsoïde central de Culmann dans le rapport d'homothétie $\sqrt{5}$.

Cet ellipsoïde de Legendre n'ayant aucun intérêt, nous n'insisterons pas. Ce qui est plus important c'est de remplacer par équivalence, un système matériel quelconque par un nombre limité de masses disposées en des points, associés d'une manière simple au système étudié, et ramenant les calculs de la géométrie des masses à de simples évaluations de distances de ces points à des plans, à des droites ou à d'autres points de l'espace.

D'ailleurs l'équivalence d'un système matériel avec son ellipsoïde de Legendre découle de l'*équivalence du système avec un système de quatre points.* Il suffit d'assurer l'identité entre les tétraèdres représentatifs du système et de l'ellipsoïde de Legendre.

Inertie d'une plaque triangulaire homogène (SYLVESTER, ROUTH). — Soit un triangle ABC dont la surface homogène a pour masse M. Le moment d'inertie par rapport au côté BC est:

$$I = \frac{1}{6} M h^2 ,$$

[1] LEGENDRE, *Fonctions elliptiques et eulériennes*, édition 1825, tome I, p. 410.

h étant la hauteur relative à ce côté. D'autre part le système de trois masses égales à $\frac{M}{3}$ placées aux milieux des côtés du triangle a même masse totale M et même centre de gravité G que le triangle. Les moments d'inertie du triplet sont respectivement égaux à ceux du triangle relativement aux trois côtés. Il y a donc équivalence.

Il y a équivalence entre l'aire homogène du triangle et un système de trois masses $\frac{M}{3}$ *respectivement placées aux milieux des côtés du triangle* [1].

On peut encore prendre les trois masses $\frac{M}{3}$ aux milieux des droites qui joignent les sommets du triangle ABC au centre de gravité G.

Inertie d'une barre rectiligne, homogène. — Soit une barre AB, de milieu O, de longueur $2l$, masse M. La barre est équivalente à un triplet constitué par une masse μ_0 placée en son milieu O et deux masses μ placées en deux points P P′ situés à des distances $\pm x$ de O. Il y a une infinité de solutions satisfaisant aux deux conditions:

$$\mu_0 + 2\mu = M , \qquad x^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{M}{M - \mu_0} l^2 .$$

En particulier, pour $\mu_0 = 0$, *la barre est équivalente au doublet:*

$$\mu = \frac{M}{2} , \qquad x = \pm \frac{l}{\sqrt{3}} .$$

On a aussi la solution simple avec deux masses aux extrémités AB de la barre et une masse en son milieu O:

$$\mu_0 = \frac{2M}{3} , \qquad \mu = \frac{M}{6} , \qquad x = \pm l .$$

Ces formules permettent de former des systèmes de points matériels équivalents au périmètre d'un polygone quelconque, plan ou gauche. La première solution permet de constituer, par exemple, dans le cas du périmètre d'un polygone de n côtés, un système de $2n$ points.

Inertie du périmètre du triangle. — Soit un triangle ABC de côtés a, b, c; le périmètre est supposé homogène. En application des règles

[1] Voir à ce sujet: *The Quarterly journal of pure and applied mathematics*, VI, 1864: p. 127-128: *Mechanical solutions of geometrical problems;*
p. 130-133: J. J. SYLVESTER: *Observations on the method for finding the centre of gravity of a quadrilateral given in the present number of the journal.* (Note reproduite aux œuvres de Sylvester: *Papers*, II, p. 338-341), p. 267-269. E. J. ROUTH: *Note on the moments of inertia of a triangle.*

ci-dessus indiquées, on peut prendre comme équivalents l'un ou l'autre des systèmes suivants (densité linéaire supposée égale à l'unité):

1° Un système de six masses, trois aux sommets et trois aux milieux des côtés.

Au sommet A, par exemple, la masse sera $\frac{b+c}{6}$; au milieu du côté BC, elle sera $\frac{2a}{3}$.

2° Un système de six masses, deux sur chaque côté; sur le côté BC par exemple, de part et d'autre du milieu M du côté, on prendra en A′ et A″ avec

$$A'M = MA'' = \frac{a}{2\sqrt{3}},$$

donc avec le rapport

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1},$$

deux masses toutes deux égales à $\frac{a}{2}$.

Inertie du parallélépipède rectangle, homogène. — 1° *Le parallélépipède rectangle de masse* M *est équivalent à six masses* $\frac{M}{6}$ *placées aux centres des faces.*

2° *Le parallélépipède rectangle de masse* M *est équivalent à un système de* 9 *masses : une masse* $\frac{2M}{3}$ *placée en son centre et huit masses* $\frac{M}{24}$ *placées aux sommets.*

Inertie du tétraèdre homogène. — Le moment d'inertie du tétraèdre, solide, homogène, par rapport au plan d'une face est:

$$\frac{M}{10} H^2 .$$

M étant la masse du solide, H la hauteur relative à cette face.

Considérons un système constitué par une masse μ_0 placée au centre de gravité G du solide et de quatre masses égales à μ, placées en quatre points $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ respectivement pris sur les droites GA, GB, GC, GD, sommets d'un second tétraèdre homothétique au tétraèdre ABCD.

$$\frac{G\alpha}{GA} = \frac{G\beta}{GB} = \frac{G\gamma}{GC} = \frac{G\delta}{GD} = \lambda .$$

En écrivant que la masse totale est la même et que les moments

planaires d'inertie par rapport aux quatre faces sont les mêmes pour les deux systèmes matériels, nous obtenons deux conditions:

$$M = 4\mu + \mu_0 ,$$

$$4\mu(3\lambda^2 + 1) + \mu_0 = \frac{8}{5}M .$$

Les ellipsoïdes d'inertie centraux ont même centre et quatre diamètres communs; il est nécessaire d'imposer de nouvelles conditions. On les obtient en considérant les six plans (en nombre surabondant) menés par chaque arête et le milieu de l'arête opposée.

Par exemple, le plan passant par l'arête AB et le milieu M de l'arête CD; ce plan divise le tétraèdre en deux volumes équivalents. Si θ désigne la distance de C et D à ce plan, le moment d'inertie du solide par rapport à ce plan est la somme des moments d'inertie de deux tétraèdres de masses $\frac{M}{2}$ et de hauteurs θ par rapport à une base. Il est donc égal à $\frac{1}{10}M\theta^2$. Pour l'équivalence avec les points on a ainsi 6 équations qui donnent la seule condition: $M = 20\mu\lambda^2$. Celle-ci est du reste une conséquence des deux conditions déjà trouvées.

Le problème admet donc une infinité de solutions. On pourra se donner λ arbitrairement et calculer ensuite μ et μ_0 par les formules:

$$20\mu\lambda^2 = M , \qquad \mu_0 + 4\mu = M ,$$

ou encore prendre:

$$M = 20\mu\lambda^2 ; \qquad \mu_0 = 4\mu(5\lambda^2 - 1) .$$

Comme solutions *simples* on pourra adopter les suivantes:

1° *Un quintuplet constitué par quatre masses* $\frac{M}{20}$ *placées aux sommets du tétraèdre et une masse* $\frac{4M}{5}$ *placée au centre de gravité* G *du solide* (SYLVESTER):

$$\lambda = 1 , \qquad \mu = \frac{M}{20} , \qquad \mu_0 = \frac{4M}{5} .$$

2° *Un quadruplet constitué par quatre masses placées aux sommets* $\alpha\beta\gamma\delta$ *d'un tétraèdre homothétique au tétraèdre* ABCD *par rapport au centre de gravité* G.

$$\lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{5}} , \qquad \mu = \frac{M}{4} , \qquad \mu_0 = 0 .$$

3° *Un quintuplet constitué par une masse négative* $-\frac{4}{5}M$ *au centre*

de gravité G *et quatre masses* $\frac{9}{20}$M *placées aux centres de gravité des faces du tétraèdre :*

$$\lambda = -\frac{1}{3}, \qquad \mu = \frac{9}{20}M, \qquad \mu_0 = -\frac{4}{5}M.$$

4° A signaler encore pour le tétraèdre, solide, homogène, le système de 7 masses suivant : *une masse* $m' = \frac{2}{5}M$ *placée au centre de gravité* G *et six masses* $m = \frac{M}{10}$ *placées au milieu des arêtes.*

Application. — Un pendule composé est constitué par un tétraèdre, solide, homogène, tournant autour d'un axe Δ. *Quelle est la durée d'oscillation de ce pendule ?*

Il s'agit d'évaluer le rayon de gyration autour de Δ. Le calcul du moment d'inertie — qui serait fastidieux par les méthodes habituelles d'intégration — se réduit ici à une question des plus élémentaires : au calcul des distances des sommets et du centre de gravité à la droite Δ.

Pour fixer les idées, soit un *tétraèdre régulier tournant autour d'une arête.*

Deux des masses du quintuplet $\left(\frac{M}{20}\right.$ aux sommets et $\left.\frac{4M}{5}\right.$ au centre$\left.\right)$ ont des moments nuls par rapport à l'axe de suspension, l'arête AB. Si a est la longueur commune des arêtes, les deux autres masses placées aux sommets C et D, situés à la même distance $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ de AB et la masse $\frac{4M}{5}$ placée au centre du tétraèdre, centre dont la distance à AB est $\frac{a\sqrt{2}}{4}$ donnent ainsi un rayon de gyration K :

$$K^2 = \frac{7}{40}a^2.$$

Pour le rayon de gyration autour de la parallèle à cette arête menée par le centre de gravité :

$$K'^2 = \frac{a^2}{20}.$$

D'où la longueur l du pendule synchrone :

$$l = \frac{7\sqrt{2}}{20}a = a \times 0{,}49497.$$

Dans le tétraèdre régulier, les calculs d'inertie sont notablement simplifiés par le fait que l'on peut ainsi facilement calculer les moments

d'inertie au centre G et par rapport aux plans de faces. *L'ellipsoïde d'inertie central étant une sphère* — comme pour tout polyèdre régulier — les moments d'inertie relativement à d'autres éléments en découlent.

Représentation générale d'un système matériel quelconque par des systèmes de quatre masses ponctuelles.

L'exemple du tétraèdre solide homogène ABCD de masse M, montre que ce corps peut être remplacé par un système de quatre masses égales $\left(\text{de masses } \frac{M}{4}\right)$ disposées aux sommets d'un second tétraèdre A′ B′ C′ D′, homothétique de ABCD par rapport au centre de gravité G, dans le rapport $\frac{1}{\sqrt{5}}$ d'homothétie. (Il y a même deux dispositions symétriques par rapport à G et qui correspondent aux deux sens de cette homothétie.)

Nous allons établir que c'est là un fait général.

Tout système de masse M peut être remplacé par une infinité de systèmes de quatre masses $\frac{M}{4}$.

Deux démonstrations peuvent être données; tout d'abord on peut observer que les équations de conditions se ramènent immédiatement à celles du cas où l'ellipsoïde central d'inertie est une sphère, au moyen d'une affinité transformant en cette sphère l'ellipsoïde central de Culmann. Alors toutes les propriétés projectives découlent de celles des tétraèdres réguliers inscrits dans une sphère et circonscrits à une autre sphère.

On peut encore observer que tout ellipsoïde peut être obtenu d'une infinité de manières comme ellipsoïde de Culmann de 4 masses placées aux sommets de tétraèdres conjugués relativement à un ellipsoïde imaginaire homothétique. L'équivalence se fait ainsi entre le système et cette infinité de tétraèdres.

En résumé, voici les propriétés de ces divers tétraèdres:

Tout système matériel de masse M *peut être remplacé, par équivalence pour la Géométrie des masses, par une infinité de systèmes de quatre points de masse* $\frac{M}{4}$.

Les points d'applications de ces masses $\frac{M}{4}$ *sont les sommets de tétraèdres* T *de même volume.*

Les tétraèdres obtenus sont inscrits à un ellipsoïde E, *dont le centre est le centre de gravité* G *commun à ces tétraèdres; leur volume est le volume maximum des tétraèdres inscrits dans l'ellipsoïde* E.

$$\frac{\text{volume ellipsoïde E}}{\text{volume d'un tétraèdre T}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\pi .$$

Les tétraèdres T *sont circonscrits à un ellipsoïde* E′ *de centre* G.

En chaque sommet d'un tétraèdre T, *le plan tangent à l'ellipsoïde* E *est parallèle à la face opposée de* T.

Les points de contact avec E′ *des faces de T ne sont autres que les centres de gravité des faces.*

Les arêtes des tétraèdres T *sont tangentes à un même ellipsoïde* E″ *de centre* G, *qu'elles touchent en leurs milieux respectifs.*

Les tétraèdres T *sont autopolaires par rapport à un quatrième ellipsoïde* E‴ *de centre* G (ellipsoïde imaginaire).

Les ellipsoïdes E E′ E″ E‴ *sont homothétiques entre eux et à l'ellipsoïde de Culmann du système matériel.*

Les rapports d'homothétie entre ces divers ellipsoïdes ont les valeurs suivantes: E′, E″, E‴ sont respectivement homothétiques de E dans les rapports

$$\frac{1}{3}, \qquad \frac{\sqrt{3}}{3}, \qquad \frac{i\sqrt{3}}{3}.$$

Nour prendrons pour équations de ces divers ellipsoïdes rapportés à leurs axes:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} - 1 = 0, \tag{E}$$

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} - \frac{1}{9} = 0, \tag{E′}$$

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} - \frac{1}{3} = 0, \tag{E″}$$

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} + \frac{1}{3} = 0. \tag{E‴}$$

M étant la masse du système, A, B, C, les moments d'inertie planaires principaux, l'équation de l'ellipsoïde de Culmann est:

$$\frac{X^2}{A} + \frac{Y^2}{B} + \frac{Z^2}{C} = 1.$$

avec

$$\frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2} = \frac{C}{c^2} = M.$$

Entre les axes de l'ellipsoïde E et les éléments d'un quelconque de ces tétraèdres T existent les relations suivantes:

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{3}{16}\sum a_{ij}^2;$$

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = \frac{9}{16}\sum_1^4 A_i^2,$$

$$a^2b^2c^2 = \frac{243}{64}V^2.$$

(V est le volume des tétraèdres T; a_{ij} sont les six arêtes et A_i les quatre faces de l'un quelconque d'entre eux).

Dans les tétraèdres T, *indépendamment de leur volume, sont constantes : la somme des carrés des arêtes ; la somme des carrés des quatre faces ; la somme des carrés des distances de* G *aux sommets :*

$$\text{somme des carrés des arêtes} = \frac{16}{3}(a^2 + b^2 + c^2) \ ,$$

$$\text{somme des carrés des faces} = \frac{16}{3}(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \ ;$$

$$\Sigma\,\overline{GA}^2 = \frac{4}{9}(a^2 + b^2 + c^2) \ .$$

Le centre de la sphère circonscrite n'est pas assujetti à rester sur une surface déterminée. Mais la sphère circonscrite est déterminée par son centre: *la sphère circonscrite reste orthogonale à une sphère imaginaire fixe de centre* G, *qui n'est autre que la sphère orthoptique de l'ellipsoïde* E'''. On a en effet:

$$R^2 - \overline{OG}^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \ .$$

Les lignes médianes d'un tétraèdre T — droites joignant les milieux d'arêtes opposées — *constituent un système de trois diamètres conjugués par rapport à ces diverses quadriques.* La somme des carrés des longueurs des lignes médianes (somme qui est égale au quart de la somme des carrés des arêtes) reste constante.

Parmi les différentes quadriques circonscrites à un même tétraèdre quelconque, ayant pour centre le centre de gravité G du tétraèdre, l'ellipsoïde dont les plans tangents aux sommets sont parallèles aux faces opposées se présente comme généralisant seul l'ellipse circonscrite de Steiner, dans la géométrie du triangle. De même, parmi les différentes quadriques inscrites de centre G, l'ellipsoïde dont les points de contact avec les faces sont les centres de gravité des faces généralise seul l'ellipse inscrite de Steiner. Ces deux ellipsoïdes, qui sont précisément les ellipsoïdes E et E', seront par la suite appelés l'*ellipsoïde circonscrit de Steiner* et l'*ellipsoïde inscrit de Steiner.*

Cas du triangle. — Dans le plan tout système matériel, peut être remplacé, par équivalence dans la géométrie des masses par une infinité de systèmes de trois points formant des triangles de même centre de gravité G *et de même aire.*

Ces triangles sont inscrits dans une ellipse E_1 *et circonscrits à une ellipse* E_2 *de centre* G: *ce sont les ellipses circonscrite et inscrite de Steiner.*

Ces triangles constituent le système bien connu de *triangles d'aire*

maximum inscrits dans l'ellipse E_1. Ils ont même surface qui est à celle de l'ellipse E_1 dans le rapport $\frac{4}{9}\pi\sqrt{3}$.

Ils sont conjugués par rapport à une ellipse imaginaire de centre G.

Les tétraèdres T *orthocentriques.* — Parmi l'∞^3 de tétraèdres T, dont les sommets affectés de masses $\frac{M}{4}$ constituent un quadruplet équivalent à un système matériel donné de masse M, ceux de ces tétraèdres T qui sont orthocentriques méritent, par leurs propriétés, un examen particulier.

La question d'existence d'au moins un tétraèdre orthocentrique parmi l'infinité de tétraèdres T sera d'ailleurs posée à l'occasion de l'étude analytique de l'équation aux moments principaux centraux d'un système matériel quelconque.

Supposons donc qu'un tétraèdre T soit orthocentrique; soit H l'orthocentre de coordonnées x_0, y_0, z_0 par rapport aux axes de l'ellipsoïde E′ de Steiner et ρ le rayon de la sphère conjuguée. En écrivant que la sphère conjuguée d'équation ponctuelle

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - 2x_0X - 2y_0Y - 2z_0Z + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - \rho^2 = 0 ,$$

et d'équation tangentielle

$$\Sigma u^2(\rho^2 - x_0^2) - 2\Sigma uvx_0y_0 - 2\Sigma ux_0 = 1 ,$$

est harmoniquement inscrite à l'ellipsoïde E et harmoniquement circonscrite à E′, on obtient les conditions:

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - \rho^2 = \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2) ,$$

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} - 1 = \rho^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) .$$

La puissance du centre de gravité G relativement à la sphère conjuguée est constante pour les divers tétraèdres orthocentriques du système T. *La sphère conjuguée reste orthogonale à une sphère fixe de centre* G, *la première sphère de* 12 *points.*

La première sphère des 12 points est la sphère orthoptique de l'ellipsoïde inscrit E′.

L'orthocentre H *a pour lieu une biquadratique gauche définie par des ellipsoïdes, coaxiaux aux ellipsoïdes* E E′ *de Steiner, d'équations:*

$$x_0^2\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) + y_0^2\left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}\right) + z_0^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)$$
$$= \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) - 1 .$$

$$\sum \frac{x_0^2}{a^2} = \text{const.} , \qquad \sum \frac{x_0^2}{a^4} = \text{const.}$$

Le premier ellipsoïde appartient au faisceau ponctuel de quadriques défini par l'ellipsoïde E *et la première sphère des douze points.*

La connaissance de H entraîne celle du tétraèdre.

Le centre O de la sphère circonscrite, le centre O′ de la deuxième sphère des douze points et le point H′ inverse de H par rapport au tétraèdre (H′ est le point qui se projette sur chaque face en son centre de gravité) décrivent respectivement des biquadratiques homothétiques à celui qui est le lieu de l'orthocentre H.

Posons $a^2 + b^2 + c^2 = 9\omega^2$ (constante).

La sphère circonscrite est orthogonale à une sphère fixe de centre G et de rayon $i\omega\sqrt{3}$.

La deuxième sphère des douze points est orthogonale à une sphère fixe de centre G, de rayon $i\frac{\sqrt{3}}{3}\omega$.

On a les relations suivantes:

$$\overline{HG}^2 = \rho^2 + \omega^2 , \qquad \overline{OH}^2 = R^2 + 3\rho^2 ,$$

$$\overline{OG}^2 = R^2 - 3\omega^2 , \qquad \overline{O'G}^2 = \frac{1}{9}(R^2 - 3\omega^2) ,$$

$$R^2 = \rho^2 + 4\omega^2 .$$

Les hauteurs du tétraèdre orthocentrique sont normales à l'ellipsoïde circonscrit E *aux quatre sommets du tétraèdre.*

Les arêtes des tétraèdres orthocentriques T *sont les droites du complexe tétraédral d'équation*

$$a^2 p_1 p_4 + b^2 p_2 p_5 + c^2 p_3 p_6 = 0 ,$$

en coordonnées plückériennes p_i *de droites.* Les arêtes appartiennent ainsi à la congruence commune à ce complexe tétraédral et au complexe spécial attaché à la quadrique E″.

Les milieux des arêtes (points de contact de celles-ci avec l'ellipsoïde E″) sont situés sur une biquadratique gauche définie par E″ et par la première sphère des douze points.

Si L est le milieu d'une arête AB, L′ le milieu de l'arête opposée d'un de ces tétraèdres orthocentriques, *l'arête* $A_1 A_2$ *coïncide avec l'une des directions principales de l'ellipsoïde* E″ *au point* L; de même la droite CD, orthogonale à la précédente, est direction principale du même ellipsoïde en son milieu L′.

La géométrie des triplets.

Trois masses α, β, γ sont respectivement appliquées aux sommets A, B, C du triangle de référence. Le centre Γ des trois masses a pour coordonnées barycentriques des expressions proportionnelles à α, β, γ.

Si le système est rapporté aux axes centraux d'inertie, les trois conditions suivantes sont vérifiées:

$$\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = 0 \ ,$$
$$\alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3 = 0 \ ,$$
$$\alpha x_1 y_1 + \beta x_2 y_2 + \gamma x_3 y_3 = 0 \ ;$$

les indices 1, 2 et 3 affectent respectivement les deux coordonnées cartésiennes x_i et y_i des sommets A, B, C. L'élimination des masses entre ces trois conditions linéaires et homogènes conduit à la relation

$$\begin{vmatrix} x_1 y_1 & x_2 y_2 & x_3 y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0 \ ,$$

qui exprime que *les sommets du triangle de référence, le centre* Γ *(et l'orthocentre* H *du triangle) appartiennent à une même hyperbole équilatère dont les directions asymptotiques sont celles des axes principaux et centraux d'inertie.*

La construction des axes centraux d'inertie du triplet découle de cette proposition.

Par le point Γ, centre des masses, passe une hyperbole du faisceau des hyperboles équilatères circonscrites au triangle A B C. Il suffit de mener par Γ les parallèles aux asymptotes de cette hyperbole; ces deux parallèles sont précisément les axes de symétrie de l'ellipse centrale d'inertie.

En particulier, lorsque Γ est sur un côté, B C par exemple ($\alpha = 0$), les axes centraux sont le côté B C et la parallèle à la hauteur A H.

Lorsque le centre Γ est sur une hauteur, A H par exemple, les axes centraux d'inertie sont la hauteur A H et la parallèle menée par Γ au côté B C.

Cas où le centre des masses est l'orthocentre. Dans le cas

$$\frac{\alpha}{\operatorname{tg} A} = \frac{\beta}{\operatorname{tg} B} = \frac{\gamma}{\operatorname{tg} C} \ ,$$

le centre Γ *des masses coïncide avec l'orthocentre* H *du triangle.* Toutes les hyperboles équilatères circonscrites au triangle A B C passant par H, il y a indétermination pour la construction des axes centraux d'inertie. *L'ellipse d'inertie centrale est donc un cercle.*

Réciproquement d'ailleurs *pour que l'ellipse centrale d'un triplet* (α, β, γ) *de trois masses non-nulles disposées aux sommets du triangle* A B C *soit un cercle il faut que ces masses soient proportionnelles à* tg A, tg B *et* tg C; *le centre des masses est alors l'orthocentre* H.

Prenons

$$\alpha = \operatorname{tg} A \ , \qquad \beta = \operatorname{tg} B \ , \qquad \gamma = \operatorname{tg} C \ ;$$

la masse totale est

$$M = \alpha + \beta + \gamma = \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A . \operatorname{tg} B . \operatorname{tg} C \ ;$$

le moment d'inertie par rapport à une droite quelconque passant par l'orthocentre est égal au double de la surface du triangle:

$$I = 4 R^2 \sin A \ \sin B \ \sin C = 2 S \ ;$$

l'expression du rayon de gyration est donc:

$$K^2 = \frac{I}{M} = 4 R^2 \cos A . \cos B . \cos C \ ;$$

par suite:

$$K^2 = - \rho^2$$

ρ désignant le rayon du cercle conjugué au triangle.

Le moment d'inertie polaire en H est

$$I_H = 4 S \ ;$$

le rayon de gyration par rapport à l'axe normal en H au plan du triangle est donc:

$$K_H^2 = - \mathcal{P} \ ,$$

$\mathcal{P}$ désignant la puissance de H par rapport au cercle circonscrit au triangle A B C:

$$\mathcal{P} = - 8 R^2 \cos A \ \cos B \ \cos C \ .$$

Supposons les masses positives; le triangle a tous ses angles aigus. Dans ce cas, l'ellipsoïde d'inertie du triplet est une sphère, au point sous lequel les trois côtés du triangle sont vus sous des angles droits.

Ce cas remarquable est le seul pour lequel l'ellipse d'inertie du triplet est un cercle, en supposant les trois masses non-nulles. Lorsque Γ est en un sommet (A par exemple, pour $\beta = 0$ $\gamma = 0$), l'ellipse centrale d'inertie est le cercle-point A. La propriété caractérise donc les quatre points fondamentaux du faisceau des hyperboles équilatères.

Tandis qu'à tout point Γ du plan sont associées deux droites Δ Δ' comme axes centraux d'inertie, la question se présente plus simplement lorsque on se donne au contraire une droite Δ.

Une droite Δ étant imposée, il existe sur elle un point Γ et un seul, tel que Γ soit centre d'un triplet $(\alpha \beta \gamma)$ admettant Δ comme axe de symétrie de l'ellipse centrale d'inertie.

Δ étant donnée, il existe une hyperbole équilatère du faisceau l'admettant pour direction asymptotique. L'hyperbole rencontre Δ à distance finie en un point Γ unique, qui est précisément le point Γ.

La construction du point Γ s'effectue simplement. L'involution déterminée sur la droite Δ par l'ensemble des hyperboles équilatères du faisceau, associe le point Γ au point à l'infini de Δ. Les points doubles de l'involution sur Δ peuvent être définis par l'intersection de la droite avec le lieu des points de contact des tangentes menées aux hyperboles par un point déterminé de Δ : ce lieu, qui est en général une cubique, dégénère en une conique lorsque le point est sur l'un des côtés ou sur l'une des hauteurs du triangle. Par exemple, avec les notations qui vont être adoptées par la suite, si le point est la trace sur B C de la droite Δ, ce lieu a pour équation (en barycentriques)

$$vq\,Y^2 + wr\,Z^2 = pX(vY + wZ) \;;$$

cette conique passant par A, H, les pieds des hauteurs relatives aux côtés AB, et AC coupe Δ aux deux points d'intersection de cette droite avec la conique conjuguée d'équation:

$$up\,X^2 + vq\,Y^2 + wr\,Z^2 = 0 \;.$$

Voilà donc quatre coniques définissant les points doubles sur Δ.

Cas des droites de Simson. — Les asymptotes d'une hyperbole du faisceau équilatère ABCH sont les droites de Simson des deux points d'intersection du cercle circonscrit avec la droite inverse de l'hyperbole relativement au triangle. Réciproquement toute droite de Simson est asymptote d'une hyperbole équilatère circonscrite.

L'involution est donc spéciale lorsque la droite Δ est une droite de Simson. L'un des points doubles est à l'infini; le second est à distance finie. Dans le faisceau, il y a trois hyperboles dégénérées: chacune d'elles est constituée par un côté et la hauteur opposée; le point double à distance finie est donc le milieu du segment déterminé par ces deux droites sur la droite de Simson.

Nous obtenons ainsi une propriété intéressante des droites de Simson.

Les trois segments déterminés sur une droite de Simson par les côtés et les hauteurs du triangle A B C *ont même milieu.*

Nous reviendrons avec plus de précisions sur cette question, après l'étude de la relation entre les coniques d'inertie et les coniques conjuguées au triangle.

Formules générales. — Si l'équation d'une droite quelconque D du plan est, en coordonnées barycentriques,

$$uX + vY + wZ = 0 \;,$$

les distances des sommets du triangle de référence à cette droite sont respectivement égales à u, v, w, sous la condition

$$a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 - 2bc \cos A\, vw - 2ca \cos B\, wu - 2ab \cos C\, uv = 4S^2 ,$$

qui s'écrit encore:

$$\Sigma a^2 (u - v)(u - w) = 4S^2 .$$

Nous introduirons les coefficients

$$\operatorname{cotg} A = p , \qquad \operatorname{cotg} B = q , \qquad \operatorname{cotg} C = r ,$$

et poserons

$$U = v - w , \qquad V = w - u , \qquad W = u - v ;$$

U, V, W sont les coordonnées barycentriques du point à l'infini de la droite D. La condition précédente prend la forme:

$$pU^2 + qV^2 + rW^2 = 2S .$$

Nous l'écrirons

$$\Phi = 2S ,$$

en posant:

$$\Phi = pU^2 + qV^2 + rW^2 ;$$

$\Phi = 0$ est l'équation tangentielle des deux points cycliques.

La distance des deux points quelconques du plan de coordonnées barycentriques $M(\alpha\, \beta\, \gamma)$ et $M'(\alpha'\, \beta'\, \gamma')$ est alors:

$$\overline{MM'}^2 = 2S[p(\Delta\alpha)^2 + q(\Delta\beta)^2 + r(\Delta\gamma)^2]$$

c'est-à-dire

$$\overline{MM'}^2 = 2S\Phi(\Delta\alpha, \Delta\beta, \Delta\gamma) ,$$

en posant:

$$\Delta\alpha = \frac{\alpha'}{\alpha' + \beta' + \gamma'} - \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma} , \qquad \text{etc.}$$

Equation quadratique des axes centraux d'inertie. — Les distances des sommets A B C à la droite D d'équation $uX + vY + wZ = 0$ étant u, v et w, sous la condition $\Phi = 2S$, le moment d'inertie du triplet par rapport à la droite est:

$$I = \alpha u^2 + \beta v^2 + \gamma w^2 .$$

Pour déterminer les axes principaux Δ et Δ' d'inertie au centre Γ, il faut chercher le maximum et le minimum de cette fonction I des

trois variables u, v et w, en posant qu'elles sont liées par les relations

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0 \ ,$$
$$\Phi = 2S \ .$$

Ces deux conditions dérivées totalement permettent de déterminer des expressions proportionnelles aux différentielles du, dv, dw ; en les introduisant dans la condition $dI = 0$ on obtient

$$\sum \frac{v - w}{\alpha} [a^2 (v + w - 2u) + (b^2 - c^2)(v - w)] = 0 \ ,$$

c'est-à-dire:

$$\sum \frac{1}{U} \left(\frac{r}{\beta} - \frac{q}{\gamma} \right) = 0 \ .$$

Telle est la condition pour que la droite soit un axe central Δ d'inertie. Les équations

$$\Sigma u X = 0 \ , \qquad \Sigma u \alpha = 0 \ ,$$

montrent que u, v, w sont proportionnelles à $\beta Z - \gamma Y$, etc.,.. et par suite que U, V, W ont des expressions proportionnelles à $(\alpha + \beta + \gamma) X - \alpha (X + Y + Z)$, etc... qui portées dans la condition précédemment formée donnent l'*équation quadratique du système des axes centraux d'inertie:*

$$\Sigma p \, . \, \alpha (\beta Z - \gamma Y) \, . \, [(\alpha + \beta + \gamma) X - \alpha (X + Y + Z)] = 0 \ .$$

Cette équation est identiquement satisfaite lorsque

$$\alpha p = \beta q = \gamma r \ ;$$

le point Γ est alors l'orthocentre H (de coordonnées barycentriques tg A, tg B, tg C). Ce résultat confirme bien la proposition déjà signalée: l'ellipse centrale d'inertie est un cercle lorsque Γ est en H.

Lorsque Γ est sur le côté B C, par exemple, $\alpha = 0$, l'un des axes est le côté $X = 0$ et l'autre la droite

$$X \frac{r\gamma - q\beta}{q + r} - \beta Z + \gamma Y = 0$$

perpendiculaire au côté BC.

Lorsque Γ est sur la hauteur AH, $\left(\frac{\beta}{\text{tg B}} = \frac{\gamma}{\text{tg C}} \right)$, la hauteur AH est l'un des axes :

$$qY = rZ \ ,$$

l'autre est la droite parallèle au côté BC:

$$(\alpha + \beta + \gamma) X = \alpha (X + Y + Z) \ .$$

Si la masse totale est nulle: $\alpha + \beta + \gamma = 0$ (le centre des masses Γ est alors à l'infini) l'équation des axes montre que l'un des axes est la droite à l'infini, tandis que l'autre est la droite d'équation

$$\Sigma \alpha^2 p (\beta Z - \gamma Y) = 0 ,$$

ou encore:

$$\Sigma \beta\gamma (q\beta - r\gamma) X = 0 ;$$

on vérifie que ses coordonnées satisfont à l'équation tangentielle

$$\Sigma p u (v - w)^2 = 0 ,$$

qui sera formée plus loin pour l'enveloppe des droites de Simson du triangle.

Equation aux moments centraux d'inertie. — L'expression du moment d'inertie du triplet par rapport à une droite prend une forme remarquable lorsque la droite passe par le centre Γ des masses. Des équations

$$I = \alpha u^2 + \beta v^2 + \gamma w^2 ,$$

$$o = \alpha u + \beta v + \gamma w ,$$

on déduit:

$$(\alpha + \beta + \gamma) I \equiv (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha u^2 + \beta v^2 + \gamma w^2) - (\alpha u + \beta v + \gamma w)^2$$
$$= \Sigma \beta\gamma U^2 ;$$

et par suite:

$$I = \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \left[\frac{U^2}{\alpha} + \frac{V^2}{\beta} + \frac{W^2}{\gamma} \right] .$$

La condition fondamentale $\Phi = 2S$ exprime précisément, en application de cette formule générale que le triplet $(\alpha p = \beta q = \gamma r)$ dont le centre est en H a par rapport à toute droite passant par l'orthocentre un moment d'inertie $I = 2S$.

Pour les axes centraux, on aura:

$$U + V + W = 0 ;$$

$$\frac{l}{U} + \frac{m}{V} + \frac{n}{W} = 0 ,$$

$$\Sigma p U^2 = 2S .$$

en posant:

$$l = \frac{r}{\beta} - \frac{q}{\gamma} , \qquad m = \frac{p}{\gamma} - \frac{r}{\alpha} , \qquad n = \frac{q}{\alpha} - \frac{p}{\beta} .$$

Nous prendrons $I = 2S \cdot \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\theta$, d'où

$$\frac{\Sigma \frac{U^2}{\alpha}}{\Sigma p U^2} = \theta .$$

L'élimination de U, V, W entre les trois équations homogènes du second degré:

$$\Sigma U^2 \left(p\theta - \frac{1}{\alpha}\right) = 0 ,$$

$$\Sigma U = 0 \qquad \Sigma \frac{l}{U} = 0 ,$$

exprimant le concours de deux coniques et de la droite de l'infini en un certain point, conduit à la condition

$$(\mathcal{A} l + \mathcal{B} m + \mathcal{C} n)^2 + (l^2 + m^2 + n^2 - 2lm - 2mn - 2nl)\Sigma \mathcal{A}\mathcal{B} = 0$$

avec

$$\mathcal{A} = p\theta - \frac{1}{\alpha}, \qquad \mathcal{B} = q\theta - \frac{1}{\beta}, \qquad \mathcal{C} = r\theta - \frac{1}{\gamma}.$$

Mais $\mathcal{A}l + \mathcal{B}m + \mathcal{C}n = 0$; il reste donc

$$\Sigma \mathcal{A}\mathcal{B} = 0$$

et par suite:

$$\theta^2 - \theta . \Sigma \frac{q+r}{\alpha} + \frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma} = 0 .$$

Comme θ est une expression égale à I à un facteur près, il en résulte que les moments d'inertie principaux I_1 et I_2 au centre Γ des masses sont définies par les deux conditions:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = \frac{2S}{\alpha+\beta+\gamma} \cdot \sum (q+r)\beta\gamma . \\ I_1 I_2 = 4S^2 . \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha+\beta+\gamma} . \end{cases}$$

Le moment d'inertie polaire par rapport au point Γ est $I_1 + I_2$. Le cercle circonscrit au triangle ABC a pour équation

$$\Sigma a^2 YZ = 0 ,$$

c'est-à-dire

$$\Sigma (q+r) YZ = 0 ,$$

puisque les côtés s'expriment en fonction de $p\,q\,r$ par des formules telles que

$$a^2 = 2S(q + r)\ , \qquad \text{etc.}$$

La puissance du centre Γ par rapport au cercle circonscrit (centre O, rayon R) est:

$$\overline{O\Gamma}^2 - R^2 = -\frac{\Sigma a^2 \beta\gamma}{(\alpha + \beta + \gamma)^2}\ .$$

Nous trouvons ainsi la relation

$$\frac{I}{M} = -(\overline{O\Gamma}^2 - R^2)\ ;$$

le carré du rayon de gyration du triplet par rapport à l'axe normal au plan du triangle au centre Γ *des masses est égal à la puissance, changée de signe, du point* Γ *relativement au cercle circonscrit au triangle.*

Cette propriété est immédiate, si l'on observe que le moment polaire du triplet par rapport au centre O du cercle circonscrit est MR^2.

Droite imposée comme axe central d'inertie. — Soit une droite Δ de coordonnées *absolues* u, v, w. Soient U, V, W les coordonnées de son point à l'infini.

Un point M quelconque de la droite Δ sera représenté au moyen d'un paramètre t. Les coordonnées du point seront proportionnelles aux expressions suivantes:

$$X = U\left(t - \frac{1}{u}\right), \qquad Y = V\left(t - \frac{1}{v}\right), \qquad Z = W\left(t - \frac{1}{w}\right);$$

le paramètre t est proportionnel à la distance du point M à une origine déterminée sur la droite. La distance entre deux points M M′ de la droite, de paramètres respectifs t et t', a pour expression

$$\overline{MM'}\,.\,\sum\frac{U}{u} = 2S(t - t')\ ,$$

c'est-à-dire

$$\overline{MM'} = 2S\,.\,\frac{uvw}{UVW}\,.\,(t - t')\ .$$

Les coniques du faisceau ponctuel (A B C H) ont pour équation générale $\Sigma\frac{\mathcal{L}}{X} = 0$, avec la condition $\Sigma p\mathcal{L} = 0$. L'hyperbole équilatère ayant la droite Δ pour direction asymptotique est définie par la condition $\Sigma\frac{\mathcal{L}}{U} = 0$. Il faut donc prendre pour coefficients:

$$\mathcal{L} = U(qV - rW)\ . \qquad \text{etc.}$$

En introduisant la distance H de l'orthocentre H à la droite Δ, ces expressions des coefficients dans l'équation de l'hyperbole équilatère deviennent (à un facteur près):

$$\mathcal{L} = \frac{U}{p}(H - u) .$$

Pour définir le point Γ — centre de masses tel que Δ soit axe central d'inertie — il convient de considérer ce point Γ comme étant le point à distance finie d'intersection de la droite V avec l'hyperbole équilatère précédente. Le paramètre t de ce point Γ est donc la racine de l'équation

$$\sum \frac{H - u}{p\left(t - \frac{1}{u}\right)} = 0 ;$$

l'équation

$$\sum \frac{u(H - u)}{p(ut - 1)} = 0 ,$$

définit une racine t telle que

$$\frac{1}{t} = H + \frac{(H - u)(H - v)(H - w)}{\Theta - H^2} ,$$

$$u - \frac{1}{t} = qr . VW . \frac{H - u}{\Theta - H^2} ,$$

avec

$$\Theta = qru^2 + rpv^2 + pqw^2 ;$$

$$H = qru + rpv + pqw ;$$

(u, v, w sont les distances des sommets à la droite Δ, H est la distance de l'orthocentre; Θ est l'expression du moment d'inertie par rapport à Δ de trois masses qr, rp, pq ayant pour centre le point H). Il résulte que l'on peut prendre pour coordonnées du point Γ des expressions proportionnelles aux suivantes:

$$X = \frac{H - u}{pu} , \qquad Y = \frac{H - v}{qv} , \qquad Z = \frac{H - w}{rw} .$$

On peut encore poser:

$$X = \frac{\mathcal{L}}{uU} , \qquad Y = \frac{\mathcal{M}}{vV} , \qquad Z = \frac{\mathcal{N}}{wW} .$$

$\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ étant les coefficients de l'équation de l'hyperbole équilatère admettant Δ pour direction asymptotique.

Cas d'un centre des masses à l'infini. — Le point Γ est à l'infini pour:

$$X + Y + Z = 0$$

$$\sum \frac{H - u}{pu} = 0 \ ;$$

on peut encore poser $\frac{1}{t} = 0$ et la condition prend la forme

$$H(\Theta - H^2) + (H - u)(H - v)(H - w) = 0 \ ;$$

l'équation tangentielle de l'enveloppe des droites Δ telles que Γ soit à l'infini se met sous la forme :

$$\Sigma pu U^2 = 0 \ .$$

Une droite Δ (u, v, w), quelconque du plan, rencontre le côté BC du triangle de référence en un point P qui donne lieu à la relation

$$\overline{BP}^2 - \overline{CP}^2 = a^2 . \frac{v + w}{v - w} \ ;$$

les droites de Simson, sont définies par la condition

$$\Sigma \overline{BP}^2 = \Sigma \overline{CP}^2 \ ,$$

exprimant le concours des perpendiculaires aux côtés en P et les deux autres points analogues. L'équation tangentielle de l'hypocycloïde à trois rebroussements enveloppe les droites de Simson est donc

$$\Sigma a^2 . \frac{v + w}{v - w} = 0 \ ;$$

c'est-à-dire

$$\Sigma (q + r) \frac{v + w}{v - w} = 0 \ ;$$

puisque les carrés des côtés du triangle ont pour expression

$$a^2 = 2S(q + r) \ , \qquad \text{etc.}$$

l'équation rendue entière est:

$$\Sigma pu (v - w)^2 = 0 \ ,$$

$$\Sigma pu U^2 = 0 \ ,$$

Ainsi est reconnue l'identité des droites de Simson et des droites telles que Γ soit à l'infini.

Exemples et remarques. — Lorsque Γ est en G ($\alpha = \beta = \gamma$; cas de la surface homogène d'une plaque triangulaire ayant A, B, C pour milieux des côtés), les axes principaux sont parallèles aux asymptotes de l'hyperbole équilatère (A B C G H), d'équation (en barycentriques)

$$\sum \frac{\sin A \sin (B - C)}{X} = 0 ;$$

c'est l'hyperbole de Kiepert.

Si Δ est la droite d'équation

$$X \operatorname{tg} A + Y \operatorname{tg} B + Z \operatorname{tg} C = 0$$

$\left(u = \frac{1}{p}, \ v = \frac{1}{q}, \ w = \frac{1}{r}\right)$, Γ a des coordonnées proportionnelles aux expressions

$$X = p(q^2 + r^2) - qr(q + r) , \qquad \text{etc.}$$

Γ est l'intersection de la droite Δ et de la droite d'Euler.

Si Δ est l'axe anti-orthique $\frac{X}{a} + \frac{Y}{b} + \frac{Z}{c} = 0$, les coordonnées de Γ sont

$$X = \sin^2 A (\cos B + \cos C - 1) ; \qquad \text{etc.}$$

le point Γ est inverse du point de coordonnées

$$X = \frac{1}{\cos B + \cos C - 1} , \qquad \text{etc.}$$

(le point de coordonnées *normales* $\frac{1}{\cos B + \cos C - 1}$, etc. est l'intersection du cercle circonscrit avec l'hyperbole de Feuerbach; d'où une construction du point Γ).

Lieu du point Γ tel que l'un des axes centraux associés à ce point passe par un point imposé $F(X_0, Y_0, Z_0)$.

Le lieu est une cubique passant par A, B, C et F qui est point double; l'équation de cette cubique est en coordonnées courantes $(\alpha\beta\gamma)$:

$$\Sigma p \alpha (\beta Z_0 - \gamma Y_0) [\alpha (X_0 + Y_0 + Z_0) - X_0 (\alpha + \beta + \gamma)] = 0 ;$$

les tangentes au point double sont les axes centraux associés à ce point.

Il y a décomposition lorsque le point F est sur les côtés, les hauteurs ou à l'infini.

Relation entre les coniques d'inertie et les coniques conjuguées relativement au triangle.

L'enveloppe des droites du plan par rapport auxquelles le moment d'inertie du triplet est nul est la conique d'équation tangentielle

$$\alpha u^2 + \beta v^2 + \gamma w^2 = 0 \ ,$$

et par conséquent d'équation ponctuelle

$$\frac{X^2}{\alpha} + \frac{Y^2}{\beta} + \frac{Z^2}{\gamma} = 0 \ .$$

C'est la conique conjuguée par rapport au triangle ayant le point Γ *pour centre.*

Il existe, d'une manière générale, une relation remarquable entre la conique d'inertie d'un système matériel quelconque du plan et la conique enveloppe des droites de moment d'inertie nul.

Si l'on considère le système rapporté à ses axes centraux d'inertie, le moment d'inertie par rapport à une droite quelconque $x \cos \varphi + y \sin \varphi = \varpi$ du plan a une expression de la forme.

$$\begin{aligned} I &= \Sigma m_i (x_i \cos \varphi + y_i \sin \varphi - \varpi)^2 \ , \\ &= \mathcal{A} \cos^2 \varphi + \mathcal{B} \sin^2 \varphi + M \varpi^2 \ ; \end{aligned}$$

l'enveloppe des droites de moment d'inertie nul est donc la conique d'équation tangentielle

$$\mathcal{A} u^2 + \mathcal{B} v^2 + M = 0 \ .$$

D'autre part le moment d'inertie du système par rapport à la droite parallèle à la précédente, passant par le centre Γ des masses, est

$$I = \mathcal{A} \cos^2 \varphi + \mathcal{B} \sin^2 \varphi$$

et la conique d'inertie a pour équation ponctuelle

$$\mathcal{A} y^2 + \mathcal{B} x^2 = 1 \ .$$

La conique enveloppe des droites de moment nul ayant pour équation ponctuelle

$$\frac{x^2}{\mathcal{A}} + \frac{y^2}{\mathcal{B}} + \frac{1}{M} = 0 \ ,$$

est donc homothétique à la conique d'inertie

$$\frac{x^2}{\mathcal{A}} + \frac{y^2}{\mathcal{B}} = \frac{1}{\mathcal{A}\mathcal{B}} \ ;$$

on pourra prendre $\mathcal{A} = I_1$, $\mathcal{B} = I_2$, I_1 et I_2 étant les moments d'inertie principaux au centre de gravité. La conique enveloppe des droites de moment d'inertie nul se déduit donc de la conique d'inertie par une homothétie, dont le pôle est au centre des masses, et dont le rapport λ est défini par la condition

$$\lambda^2 = -\frac{I_1 \cdot I_2}{M} .$$

Cette remarque permet de déterminer la conique d'inertie à partir de l'enveloppe des droites de moment d'inertie nul. Dans le cas actuel, nous obtenons ainsi une proposition simple.

La conique centrale d'inertie du triplet de centre Γ *est homothétique à la conique de centre* Γ *conjuguée par rapport au triangle.*

Il est ainsi possible de retrouver les expressions $I_1 + I_2$ et $I_1 I_2$ à partir de celles bien connues qui donnent les demi-axes d'une conique conjuguée par rapport au triangle de référence.

Dans le cas où Γ est l'orthocentre H, l'enveloppe des droites de moments d'inertie nuls est le cercle conjugué. Réciproquement, pour que l'ellipse centrale d'inertie d'un triplet soit une circonférence, il faut que le centre des masses soit l'orthocentre. Cette proposition établie plus haut est une conséquence directe du théorème plus général ci-dessus donné.

Cas de la masse totale nulle. — Lorsque la masse totale est nulle l'enveloppe des droites de moment d'inertie est encore une conique conjuguée. Mais, dans l'hypothèse $\alpha + \beta + \gamma = 0$, cette parabole

$$\alpha u^2 + \beta v^2 + \gamma w^2 = 0 ;$$

est la *parabole* dont l'axe a la direction du point Γ à l'infini de coordonnées (α, β, γ).

Les coordonnées du foyer F de la parabole conjuguée sont

$$X = \alpha(\psi - \alpha p) , \qquad Y = \beta(\psi - \beta q) , \qquad Z = \gamma(\psi - \gamma r)$$

avec

$$2\psi = \alpha p + \beta q + \gamma r .$$

L'axe de la parabole conjuguée est la droite de Simson associée au point Γ (au titre d'axe principal d'inertie). Cette droite est définie par le foyer F et par un point φ dont les coordonnées sont:

$$p\alpha^2 , \qquad q\beta^2 , \qquad r\gamma^2 .$$

En remarquant que les coordonnées du foyer de la parabole conjuguée donnent lieu à des relations telles que

$$Y + Z - X = (q + r)\beta\gamma , \qquad \text{etc.}$$

et par suite

$$\frac{\alpha}{\dfrac{q+r}{Y+Z-X}} = \frac{\beta}{\dfrac{r+p}{Z+X-Y}} = \frac{\gamma}{\dfrac{p+q}{X+Y-Z}},$$

il résulte de $\alpha + \beta + \gamma = 0$, l'équation

$$\sum \frac{q+r}{Y+Z-X} = 0$$

du lieu de ce foyer F; c'est l'équation

$$2\Sigma(q+r)YZ = (X+Y+Z)(pX+qY+rZ)$$

du cercle des neuf points du triangle de référence.

La droite de Simson contenant le point F et le point φ, les équations

$$\xi = \alpha(\rho - p\alpha), \qquad \eta = \beta(\rho - q\beta), \qquad \zeta = \gamma(\rho - r\gamma)$$

représentent en fonction d'un paramètre ρ les coordonnées d'un point courant; la distance de deux points quelconques de la droite est proportionnelle à la différence de leurs paramètres $\rho - \rho'$.

La droite de Simson, représentée par ces formules, rencontre le côté BC au point de paramètre $\rho_1 = p\alpha$; la hauteur correspondante est rencontrée au point de paramètre $\rho_2 = q\beta + r\gamma$; le milieu du segment ayant ces deux points pour extrémités a pour paramètre ρ

$$2\rho = p\alpha + q\beta + r\gamma ;$$

ce milieu est donc identique au foyer de la parabole conjuguée. *Les trois segments déterminés sur toute droite de Simson par les côtés et les hauteurs du triangle de référence ont pour milieu commun le foyer* F *de la parabole conjuguée.*

Le point φ (de coordonnées $p\alpha^2$, $q\beta^2$, $r\gamma^2$), associé à tout point $\Gamma(\alpha, \beta, \gamma)$ décrit une conique inscrite de centre $\frac{u_0^2}{p}$, $\frac{v_0^2}{q}$, $\frac{w_0^2}{r}$, d'équation,

$$\sum \frac{u_0^2}{pu} = 0 ,$$

lorsque le point Γ décrit une droite $D_0(u_0, v_0, w_0)$. La polaire, $\Sigma p\alpha X = 0$, de φ par rapport à la conique conjuguée de centre Γ passe par un point fixe $\left(\frac{u_0}{p}, \frac{v_0}{q}, \frac{w_0}{r}\right)$ lorsque Γ décrit la droite D_0.

Nous sommes dans le cas où D_0 est la droite de l'infini. *Le point* φ *a pour lieu la conique inscrite au triangle,*

$$\sum \frac{1}{pu} = 0 ,$$

concentrique au cercle circonscrit au triangle.

La directrice de la parabole conjuguée, directrice dont l'équation est

$$\sum \frac{\alpha}{p}(Y + Z - X) = 0 ,$$

passe, on le sait, par le centre O du cercle circonscrit; et la polaire de O passe donc par le point F. La polaire de H par rapport à la parabole conjuguée a pour équation

$$\sum \frac{X}{p\alpha} = 0 ;$$

elle passe par φ, *qui est donc défini géométriquement par l'intersection de cette polaire avec la droite de Simson et avec la conique inscrite concentrique au cercle circonscrit.*

La tangente en φ à cette conique inscrite est précisément la polaire de H *par rapport à la parabole conjuguée.*

La condition de coïncidence des points φ et F est $\Sigma p\alpha = 0$. Le point F est alors le point à l'infini de la polaire trilinéaire de l'orthocentre H.

Si d'autre part, on considère une parabole inscrite d'équation

$$\frac{\mathcal{A}}{u} + \frac{\mathcal{B}}{v} + \frac{\mathcal{C}}{w} = 0 \qquad \mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{C} = 0 ,$$

le foyer M de cette parabole inscrite a pour coordonnées barycentriques:

$$x = \frac{q + r}{\mathcal{A}} , \qquad y = \frac{r + p}{\mathcal{B}} , \qquad z = \frac{p + q}{\mathcal{C}} ;$$

la condition $\mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{C} = 0$ rend manifeste le fait que le lieu du foyer M de la parabole inscrite est le cercle circonscrit:

$$\sum \frac{q + r}{x} = 0 .$$

La directrice, étant la polaire du foyer M par rapport à cette parabole inscrite, son équation est

$$\Sigma p \mathcal{A} X = 0 .$$

par suite, toute droite perpendiculaire à l'axe de la parabole aura pour coordonnées (à un facteur près)

$$u = p\mathcal{A} + \sigma , \qquad v = q\mathcal{B} + \sigma , \qquad w = r\mathcal{C} + \sigma ;$$

σ est un paramètre arbitraire.

La paramètre de la tangente au sommet de la parabole inscrite a pour expression σ:

$$\sigma \,.\, (p\,\mathcal{A}^2 + q\mathcal{B}^2 + r\mathcal{C}^2) = \mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C} \,.$$

Cette tangente au sommet est une droite de Simson, pédale du foyer M de la parabole inscrite.

La confrontation des résultats obtenus séparément pour la parabole conjugués d'axe Δ, et pour la parabole inscrite de tangente au sommet Δ, cette droite Δ étant la même droite de Simson, montre qu'il convient d'introduire trois paramètres l, m, n et de poser ensuite:

$$p\alpha = l \,, \qquad q\beta = m \,, \qquad r\gamma = n \,,$$
$$\mathcal{A} = m - n \,, \qquad \mathcal{B} = n - l \,, \qquad \mathcal{C} = l - m \,,$$

avec la condition

$$\frac{l}{p} + \frac{m}{q} + \frac{n}{r} = 0 \,.$$

Au moyen d'un point figuratif, décrivant la droite $\Sigma \frac{X}{p} = 0$, on représente ainsi et en même temps l'infinité de droites de Simson, les paraboles conjuguées les admettant pour axes, les paraboles inscrites les touchant en leurs sommets.

La droite M H — joignant l'orthocentre H au foyer M de la parabole inscrite — a pour équation

$$\Sigma p\,\mathcal{A}\,(m + n - l)\,X = 0 \;;$$

le paramètre ρ du point d'intersection de cette droite MH avec la droite de Simson

$$\xi = \alpha(\rho - p\alpha) \,, \qquad \text{etc. ...}$$

a pour valeur:

$$\rho = \frac{1}{2}(l + m + n) \equiv \frac{1}{2}(p\alpha + q\beta + r\gamma)$$

et par suite nous vérifions que ce point est bien le foyer F de la parabole conjuguée.

Ainsi donc F — *foyer de la parabole conjuguée — est le milieu de la droite* MH *et des trois segments déterminés sur la droite de Simson* Δ *par les côtés et les hauteurs du triangle de référence.*

La droite Δ — associée à un point Γ à l'infini, comme axe central d'inertie — rencontre le cercle des neuf points en deux points; dont l'un est le centre de l'hyperbole équilatère admettant Δ pour asymptote et dont l'autre est le point F ainsi défini géométriquement et qui est associé à Γ comme point double à distance finie de l'involution tracée sur Δ par les hyperboles équilatères circonscrites au triangle.

Constructions géométriques. — Pour conclure, nous pouvons donner la construction suivante.

Une droite Δ est imposée comme devant être axe central d'inertie pour un choix convenable de trois masses $(\alpha\ \beta\ \gamma)$ du triplet A B C.

Chaque couple constitué par un côté et la hauteur correspondante du triangle ABC détermine sur la droite Δ un segment A′ H, etc. dont les extrémités sont un couple de points conjugués de l'involution.

Soit alors Δ' l'axe radical des trois cercles décrits sur les segments $A'H_1$, $B'H_2$, $C'H_3$.

Δ' rencontre Δ au point Γ qui doit être associé à Δ comme centre des trois masses.

Les axes centraux en Γ sont Δ et Δ'.

Le cercle de centre Γ coupe Δ en deux points qui ne sont autres que les points doubles de l'involution sur cette droite Δ.

On sait que l'enveloppe des droites de même moment d'inertie, pour un système matériel donné, est une conique appartenant à un système homofocal. Ce système comprend la conique conjuguée, enveloppe des droites de moment d'inertie nul. Les foyers de cette conique conjuguée sont des coniques dégénérescentes du système: l'ellipse d'inertie du triplet de centre Γ est un cercle en chacun de ces foyers.

Ces foyers sont les points doubles des involutions respectives sur Δ et sur Δ'.

La construction précédente fait connaître immédiatement les deux foyers réels de la conique conjuguée, par application à l'une des deux droites Δ ou Δ'.

Dans un second mémoire, j'exposerai la question des systèmes de quatre masses disposées aux sommets d'un tétraèdre, en particulier du système de quatre masses ponctuelles égales entre elles et constituant un quadruplet équivalent à un système matériel quelconque. Par l'emploi systématique des coordonnées barycentriques tétraèdriques et par la considération des quadriques conjuguées au tétraèdre fondamental, les calculs de la géométrie des masses peuvent ainsi être présentés sous une forme remarquable.