Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 30 (1931)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT DANS UN SYSTÈME HOLONOME SANS FROTTEMENT

Autor: Papaïoannou, C. P.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-23885

SUR LES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT DANS UN SYSTÈME HOLONOME SANS FROTTEMENT

PAR

C. P. PAPAÏOANNOU (Athènes).

1. — Nous considérons un système holonome Σ formé de n points. Soient les équations de liaison de ce système

$$f_a(x_1, y_1, z_1, \dots z_n, t) = 0 \qquad a = 1, \dots h < 3n \qquad (1)$$

et les équations auxiliaires

$$f_{h+b}(x_1, y_1, z_1 \dots z_n, t) = q_b \qquad b = 1, \dots \quad k = 3n - h. \qquad (2)$$

Donnons à t une valeur numérique et considérons à l'instant correspondant le système d'équations:

$$\delta f_a = 0, \qquad \delta f_{h+b} = \delta q_b. \qquad (3)$$

Comme les variations δq sont arbitraires, on peut formuler k systèmes successifs d'équations [S_b . $b = 1, \dots, k$] en supposant dans le système (3) un des q variables, les autres restant constants. Soit un tel système S_e correspondant à la valeur $b = e$

$$(S_e) \left\{ \begin{array}{ll} \delta f_c = 0 & (c = 1, \dots h + e - 1, h + e + 1, \dots 3n) \\ \delta f_{h+e} = \delta q_e & \end{array} \right.$$

Posons

$$\Delta = \frac{D(f_1, f_2, \dots f_{3n})}{D(x_1, \dots z_n)} \neq 0$$

et résolvons le système S_e par rapport aux δx_ρ, δy_ρ, δz_ρ; nous trouvons

$$\left\{\begin{aligned} \delta x_\varrho &= \frac{1}{\Delta}\delta q_e \Delta^x_{e,\varrho} && \rho = 1, 2, \dots n \\ \delta y_\varrho &= \frac{1}{\Delta}\delta q_e \Delta^y_{e,\varrho} && \text{»} \\ \delta z_\varrho &= \frac{1}{\Delta}\delta q_e \Delta^z_{e,\varrho} && \text{»} \end{aligned}\right. \tag{5}$$

où on a désigné par $\Delta^{(\omega)}_{e,\rho}$ le mineur du déterminant Δ qu'on obtient en supprimant la ligne correspondante au δq_e et la colonne correspondante au $\delta\omega_\rho$.

Ainsi, ont peut trouver k expressions des δx_ρ, δy_ρ, δz_ρ analogues aux (5) correspondantes aux k systèmes $S_e(e = 1, \dots k)$ et en vertu de ces expressions on peut remplacer l'équation générale de la dynamique

$$\sum_{\varrho=1}^{\varrho=n}\left[\left(X_\varrho - m_\varrho\frac{d^2x_\varrho}{dt^2}\right)\delta x_\varrho + \left(Y_\varrho - m_\varrho\frac{d^2y_\varrho}{dt^2}\right)\delta y_\varrho + \left(Z_\varrho - m_\varrho\frac{d^2z_\varrho}{dt^2}\right)\delta z_\varrho\right] = 0$$

par les k équations

$$\sum\left[\left(X_\varrho - m_\varrho\frac{d^2x_\varrho}{dt^2}\right)\Delta^x_{e,\varrho} + \left(Y_\varrho - m_\varrho\frac{d^2y_\varrho}{dt^2}\right)\Delta^y_{e,\varrho} + \left(Z_\varrho - m_\varrho\frac{d^2z_\varrho}{dt^2}\right)\Delta^z_{e,\varrho}\right] = 0\,. \tag{6}$$

Représentons par le symbole $\Delta_e(A_\rho, B_\rho, \Gamma_\rho)$ le déterminant qu'on obtient en remplaçant dans Δ la ligne d'ordre $h + e$ par les $(A_1, B_1, \Gamma_1, \dots \Gamma_n)$; nous obtenons les équations (6) sous la forme:

$$\Delta_e(X_\varrho, Y_\varrho, Z_\varrho) = \Delta_e\left(m_\varrho\frac{d^2x_\varrho}{dt^2}, m_\varrho\frac{d^2y_\varrho}{dt^2}, m_\varrho\frac{d^2z_\varrho}{dt^2}\right). \tag{7}$$

$$(e = 1, \dots k)$$

2. — On peut formuler les équations d'équilibre du système holonome Σ. Revenons pour cela au n° 1. Il suffit de considérer les équations:

$$f_a(x_1, y_1, z_1, \dots z_n) = 0$$

$$f_{h+b}(x_1, y_1, z_1, \dots z_n) = q_b$$

et les k systèmes d'équations:

$$\delta f_c = 0 \,, \qquad \delta f_{h+e} = \delta q_e \,. \qquad (e = 1 \,, \, .. \, k)$$

On obtiendra ainsi, les expressions des δx_ρ, δy_ρ, δz_ρ analogues aux équations (5) et on remplacera alors l'équation générale de la Statique

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=n} (X_\rho \delta x_\rho + Y_\rho \delta y_\rho + Z_\rho \delta z_\rho) = 0$$

par les k équations

$$\Delta_e(X_\rho \,, \, Y_\rho \,, \, Z_\rho) = 0 \,. \qquad (e = 1 \,, \, 2 \,, \, \ldots \, k) \tag{8}$$

Proposons-nous, par exemple, de trouver les conditions d'équilibre d'un point (x, y, z) sur la surface

$$f(x \,, \, y \,, \, z) = 0 \,.$$

Nous pouvons considérer comme équations auxiliaires les équations:

$$x = q_1 \,, \qquad y = q_2 \,.$$

Les équations (8) seront alors

$$\Delta_1(X \,, \, Y \,, \, Z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ X & Y & Z \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_2(X \,, \, Y, \, Z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ 1 & 0 & 0 \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0$$

d'où l'on déduit les conditions

$$\frac{X}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{Y}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{Z}{\frac{\partial f}{\partial z}} \,.$$