

Zeitschrift:	L'Enseignement Mathématique
Herausgeber:	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band:	30 (1931)
Heft:	1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
 Artikel:	 SUR LES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT DANS UN SYSTÈME HOLONOME SANS FROTTEMENT
Autor:	Papaïoannou, C. P.
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-23885

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 09.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

SUR LES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT DANS UN SYSTÈME HOLONOME SANS FROTTEMENT

PAR

C. P. PAPAÏOANNOU (Athènes).

1. — Nous considérons un système holonome Σ formé de n points. Soient les équations de liaison de ce système

$$f_a(x_1, y_1, z_1, \dots z_n, t) = 0 \quad a = 1, \dots h < 3n \quad (1)$$

et les équations auxiliaires

$$f_{h+b}(x_1, y_1, z_1 \dots z_n, t) = q_b \quad b = 1, \dots k = 3n - h. \quad (2)$$

Donnons à t une valeur numérique et considérons à l'instant correspondant le système d'équations:

$$\delta f_a = 0, \quad \delta f_{h+b} = \delta q_b. \quad (3)$$

Comme les variations δq sont arbitraires, on peut formuler k systèmes successifs d'équations $[S_b . b = 1, \dots, k]$ en supposant dans le système (3) un des q variables, les autres restant constants. Soit un tel système S_e correspondant à la valeur $b = e$

$$(S_e) \quad \begin{cases} \delta f_c = 0 & (c = 1, \dots h + e - 1, h + e + 1, \dots 3n) \\ \delta f_{h+e} = \delta q_e \end{cases}$$

Posons

$$\Delta = \frac{D(f_1, f_2, \dots f_{3n})}{D(x_1, \dots z_n)} \neq 0$$

et résolvons le système S_e par rapport aux $\delta x_\rho, \delta y_\rho, \delta z_\rho$; nous trouvons

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta x_\rho = \frac{1}{\Delta} \delta q_e \Delta_{e, \rho}^x, \quad \rho = 1, 2, \dots, n \\ \delta y_\rho = \frac{1}{\Delta} \delta q_e \Delta_{e, \rho}^y, \\ \delta z_\rho = \frac{1}{\Delta} \delta q_e \Delta_{e, \rho}^z \end{array} \right. \quad (5)$$

où on a désigné par $\Delta_{e, \rho}$ le mineur du déterminant Δ qu'on obtient en supprimant la ligne correspondante au δq_e et la colonne correspondante au $\delta \omega_\rho$.

Ainsi, on peut trouver k expressions des $\delta x_\rho, \delta y_\rho, \delta z_\rho$ analogues aux (5) correspondantes aux k systèmes S_e ($e = 1, \dots, k$) et en vertu de ces expressions on peut remplacer l'équation générale de la dynamique

$$\sum_{\rho=1}^{e=n} \left[\left(X_\rho - m_\rho \frac{d^2 x_\rho}{dt^2} \right) \delta x_\rho + \left(Y_\rho - m_\rho \frac{d^2 y_\rho}{dt^2} \right) \delta y_\rho + \left(Z_\rho - m_\rho \frac{d^2 z_\rho}{dt^2} \right) \delta z_\rho \right] = 0$$

par les k équations

$$\sum \left[\left(X_\rho - m_\rho \frac{d^2 x_\rho}{dt^2} \right) \Delta_{e, \rho}^x + \left(Y_\rho - m_\rho \frac{d^2 y_\rho}{dt^2} \right) \Delta_{e, \rho}^y + \left(Z_\rho - m_\rho \frac{d^2 z_\rho}{dt^2} \right) \Delta_{e, \rho}^z \right] = 0. \quad (6)$$

Représentons par le symbole $\Delta_e (A_\rho, B_\rho, \Gamma_\rho)$ le déterminant qu'on obtient en remplaçant dans Δ la ligne d'ordre $h + e$ par les $(A_1, B_1, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n)$; nous obtenons les équations (6) sous la forme:

$$\Delta_e (X_\rho, Y_\rho, Z_\rho) = \Delta_e \left(m_\rho \frac{d^2 x_\rho}{dt^2}, m_\rho \frac{d^2 y_\rho}{dt^2}, m_\rho \frac{d^2 z_\rho}{dt^2} \right). \quad (7)$$

. (e = 1, ..., k)

2. — On peut formuler les équations d'équilibre du système holonome Σ . Revenons pour cela au n° 1. Il suffit de considérer les équations:

$$f_a (x_1, y_1, z_1, \dots, z_n) = 0$$

$$f_{h+b} (x_1, y_1, z_1, \dots, z_n) = q_b$$

et les k systèmes d'équations:

$$\delta f_c = 0, \quad \delta f_{h+e} = \delta q_e. \quad (e = 1, \dots, k)$$

On obtiendra ainsi, les expressions des δx_ρ , δy_ρ , δz_ρ analogues aux équations (5) et on remplacera alors l'équation générale de la Statique

$$\sum_{\rho=1}^{i=n} (X_\rho \delta x_\rho + Y_\rho \delta y_\rho + Z_\rho \delta z_\rho) = 0$$

par les k équations

$$\Delta_e (X_\rho, Y_\rho, Z_\rho) = 0. \quad (e = 1, 2, \dots, k) \quad (8)$$

Proposons-nous, par exemple, de trouver les conditions d'équilibre d'un point (x, y, z) sur la surface

$$f(x, y, z) = 0.$$

Nous pouvons considérer comme équations auxiliaires les équations:

$$x = q_1, \quad y = q_2.$$

Les équations (8) seront alors

$$\Delta_1 (X, Y, Z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ X & Y & Z \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_2 (X, Y, Z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ 1 & 0 & 0 \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0$$

d'où l'on déduit les conditions

$$\frac{X}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{Y}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{Z}{\frac{\partial f}{\partial z}}.$$