

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 30 (1931)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LES CONGRUENCES DE COURBES  
**Autor:** Pylarinos, O.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-23895>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 12.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# SUR LES CONGRUENCES DE COURBES

PAR

O. PYLARINOS (Athènes).

Soit

$$\bar{v}(x, y, z) \quad (1)$$

un vecteur, fonction des variables  $x, y, z$  définie à chaque point d'une portion de l'espace, et (*c*) la congruence de courbes définie par l'équation différentielle

$$\bar{v} \times d\bar{r} = 0. \quad (2)$$

Les familles de surfaces engendrées par les courbes de cette congruence se déterminent par l'équation différentielle aux dérivées partielles

$$\bar{v} \cdot \text{grad } \varphi = 0.$$

Considérons maintenant deux vecteurs

$$\bar{v}(x, y, z) \quad \text{et} \quad \bar{w}(x, y, z) \quad (3)$$

fonctions continues et dérivables des variables  $x, y, z$ , définies dans une même portion de l'espace et supposons que les deux congruences définies par ces vecteurs engendent les surfaces d'une même famille; dans ce cas la normale à chaque point d'une telle surface est parallèle au vecteur

$$\bar{v} \times \bar{w}. \quad (4)$$

en d'autres termes la congruence définie par le vecteur  $\bar{v} \times \bar{w}$  est une normalie.

On voit facilement que cette condition est suffisante: en effet, dans ce cas l'équation de la famille des surfaces normales aux courbes de cette congruence est une intégrale commune de deux équations

$$\bar{v} \cdot \text{grad } \varphi = 0, \quad \bar{w} \cdot \text{grad } \varphi = 0$$

et, par conséquent les surfaces de cette famille sont engendrées par les courbes des deux congruences.

Il en résulte que *la condition nécessaire et suffisante pour que les courbes des deux congruences définies par les vecteurs  $\bar{v}$  et  $\bar{w}$  engendrent les surfaces d'une même famille, est que la congruence définie par le vecteur  $\bar{v} \times \bar{w}$  soit une normalie.*

En d'autres termes, il faut qu'il existe entre les deux vecteurs la relation:

$$\bar{v} \times \bar{w} \cdot \text{rot } \bar{v} \times \bar{w} = 0. \quad (5)$$

ou, en tenant compte de l'identité

$$\begin{aligned} \text{rot } \bar{v} \times \bar{w} &= \bar{v} \cdot \text{div } \bar{w} - \bar{w} \cdot \text{div } \bar{v} + (\bar{w} \nabla) \bar{v} - (\bar{v} \nabla) \bar{w}, \\ [\bar{v} \bar{w} (\bar{v} \nabla) \bar{w}] &= [\bar{v} \bar{w} (\bar{w} \nabla) \bar{v}]. \end{aligned} \quad (6)$$

Nous allons donner dans ce qui suit quelques applications de ces résultats.

I. — Supposons d'abord que les deux membres de l'équation (6) s'annulent simultanément, c'est-à-dire que l'on a

$$[\bar{v} \bar{w} (\bar{v} \nabla) \bar{w}] = 0, \quad [\bar{v} \bar{w} (\bar{w} \nabla) \bar{v}] = 0. \quad (7)$$

Dans ce cas les courbes des deux congruences constituent un système des courbes conjuguées sur chaque surface engendrée par ces courbes: parce que la surface réglée engendrée par les droites parallèles à  $\bar{v}(\bar{w})$  le long d'une courbe de la congruence définie par  $\bar{w}(\bar{v})$  est développable. Il est évident que ces deux conditions sont suffisantes et par conséquent:

*Les deux équations (7) constituent les conditions nécessaires et suffisantes pour que les courbes des congruences définies par les deux vecteurs  $\bar{v}$  et  $\bar{w}$  soient des courbes conjuguées sur les surfaces d'une famille engendrée par elles.*

Si les deux vecteurs  $\bar{v}$  et  $\bar{w}$ , outre les équations (7), vérifient encore l'équation

$$\bar{v} \cdot \bar{w} = 0 \quad (8)$$

à chaque point du champ des deux vecteurs, les courbes des deux congruences, étant dans ce cas orthogonales, constituent les deux séries des *lignes de courbure* sur les surfaces engendrées par ces congruences.

En tenant compte maintenant du fait que

$$\text{grad } (\bar{v} \cdot \bar{w}) = 0$$

et que

$$\text{grad } (\bar{v} \cdot \bar{w}) = \bar{v} \times \text{rot } \bar{w} + \bar{w} \times \text{rot } \bar{v} + (\bar{v} \nabla) \bar{w} + (\bar{w} \nabla) \bar{v}$$

nous tirons des deux équations (7)

$$[\bar{v} \cdot \bar{w} \cdot \bar{v} \times \text{rot } \bar{w}] = - [\bar{v} \cdot \bar{w} \cdot \bar{w} \times \text{rot } \bar{v}]$$

ou

$$\bar{w}^2 \cdot \bar{v} \cdot \text{rot } \bar{v} = \bar{v}^2 \cdot \bar{w} \cdot \text{rot } \bar{w}. \quad (9)$$

On voit facilement que *les trois équations (5), (8) et (9) constituent les conditions nécessaires et suffisantes pour que les courbes des deux congruences définies par les vecteurs  $\bar{v}$  et  $\bar{w}$  soient des lignes de courbure sur les surfaces de la famille engendrée par ces courbes.*

Considérons maintenant le cas où la congruence définie par  $\bar{v}$  est une normalie; de l'équation (9) nous tirons:

$$\bar{w} \cdot \text{rot } \bar{w} = 0,$$

en d'autres termes la congruence définie par le vecteur  $\bar{w}$  est aussi une normalie et alors les deux familles normales aux courbes des congruences définies par les vecteurs  $\bar{v}$  et  $\bar{w}$  et la famille engendrée par les courbes de ces deux congruences constituent un *système orthogonal* et par conséquent:

*Pour que les trajectoires orthogonales d'une famille des surfaces  $f(x, y, z) = \text{const.}$  soient des lignes de courbure sur une autre famille de surfaces il faut et il suffit que les surfaces  $f(x, y, z) = C$  appartiennent à un système orthogonal.*

II. — Supposons maintenant que les courbes de la congruence définie par le vecteur  $\bar{v}$  constituent l'une des séries des lignes asymptotiques d'une famille des surfaces  $\varphi(x, y, z) = \text{const.}$  et cherchons les conditions exigées pour cela.

A cette fin, considérons le vecteur

$$(\bar{v} \nabla) \bar{v} , \quad (10)$$

un vecteur parallèle, à chaque point du champ de  $\bar{v}$ , au plan osculateur de la courbe de la congruence qui passe par ce point.

Dans le cas où les courbes de cette congruence sont des asymptotiques des surfaces  $\varphi = \text{const.}$  nous avons

$$\bar{v} \cdot \text{grad } \varphi = 0 ,$$

les surfaces de la famille  $\varphi = \text{const.}$  étant engendrées par les courbes de la congruence et

$$(\bar{v} \nabla) \bar{v} \cdot \text{grad } \varphi = 0 ,$$

$\text{grad } \varphi$  étant normal au plan osculateur de la courbe de la congruence qui passe par chaque point de la surface.

Il est clair que ces deux conditions se remplissent seulement dans le cas où les deux congruences définies par les vecteurs  $\bar{v}$  et  $(\bar{v} \nabla) \bar{v}$  engendrent les surfaces d'une même famille: en conséquence:

*La condition nécessaire et suffisante pour que les courbes de la congruence définie par le vecteur  $\bar{v}$  soient des lignes asymptotiques d'une famille des surfaces est que la congruence définie par le vecteur*

$$\bar{v} \times (\bar{v} \nabla) \bar{v}$$

*soit une normalie.*

Si la congruence définie par  $\bar{v}$  est constituée par les trajectoires orthogonales d'une famille des surfaces  $f(x, y, z) = \text{const.}$  et

$$\bar{v} = \text{grad } f$$

nous avons

$$(\bar{v} \nabla) \bar{v} = \frac{1}{2} \text{grad} (\text{grad } f)^2 .$$

Il en résulte que la congruence définie par le vecteur  $\bar{v} \times (\bar{v} \nabla) \bar{v}$  est celle des courbes

$$f(x, y, z) = \text{const.} \quad (\text{grad } f)^2 = \text{const.}$$

Par conséquent: *Pour que les trajectoires orthogonales d'une famille des surfaces  $f = \text{const.}$  soient des lignes asymptotiques d'une autre famille il est nécessaire et suffisant que la congruence constituée par les courbes  $f = \text{const.}$   $(\text{grad } f)^2 = \text{const.}$  soit une normalie.*

Si les courbes  $f = \text{const.}$   $(\text{grad } f)^2 = \text{const.}$  sont les trajectoires orthogonales d'une famille des surfaces  $\psi(x, y, z) = \text{const.}$  tandis qu'en même temps elles sont des lignes de courbure des surfaces  $f(x, y, z) = \text{const.}$ , nous avons

$$\text{grad } \psi \times (\text{grad } \psi \nabla) \text{ grad } f = 0^1.$$

Mais, comme

$$\text{grad } f \cdot \text{grad } \psi = 0$$

à chaque point du champ il vient

$$\text{grad } (\text{grad } f \cdot \text{grad } \psi) = (\text{grad } f \nabla) \text{ grad } \psi + (\text{grad } \psi \nabla) \text{ grad } f = 0$$

et par suite nous avons aussi

$$\text{grad } \psi \times (\text{grad } f \nabla) \text{ grad } \psi = 0,$$

en d'autres termes les surfaces  $\psi(x, y, z) = \text{const.}$  sont *développables* et les trajectoires orthogonales des surfaces  $f = \text{const.}$  sont des droites<sup>2</sup>; excepté le cas où les surfaces  $\psi = \text{const.}$  sont des plans; dans ce cas il est possible que les trajectoires orthogonales des surfaces  $f = \text{const.}$  ne soient pas des droites, parce que  $\text{grad } \psi$  est constant pour chaque plan.

Réciproquement: Supposons que les trajectoires orthogonales d'une famille des surfaces soient des droites; si  $\psi(x, y, z) = \text{const.}$  est l'équation de l'une des deux séries des surfaces développables engendrées par ces droites on a

$$\text{grad } \psi \times (\text{grad } f \nabla) \text{ grad } \psi = 0$$

<sup>1</sup> PYLARINOS, *L'Enseignement mathématique*, T. XXIX, p. 42.

<sup>2</sup> PYLARINOS, *L'Enseignement mathématique*, T. XXIX, p. 38.

et, comme

$$\text{grad } \psi \cdot \text{grad } f = 0 ,$$

on a aussi

$$\text{grad } \psi \times (\text{grad } \psi \nabla) \text{ grad } f = 0 ;$$

c'est-à-dire les trajectoires orthogonales des surfaces  $\psi = \text{const.}$  sont les courbes  $f = \text{const.}$  ( $\text{grad } f)^2 = \text{const.}$  et par conséquent :

*Lorsque les trajectoires orthogonales d'une famille des surfaces  $f = \text{const.}$  sont des droites, les courbes  $f = \text{const.}$  ( $\text{grad } f)^2 = \text{const.}$  sont des lignes de courbure sur les surfaces  $f = \text{const.}$*

III. — Supposons enfin que les courbes d'une congruence sont les trajectoires d'un point matériel qui se meut sur elles *uniformément*, avec une vitesse dont la valeur absolue reste constante le long d'une même courbe, mais varie d'une courbe à l'autre de la congruence; l'accélération qui correspond à un tel mouvement, toujours normale à la trajectoire, peut être définie en fonction des  $x, y, z$  dans le cas où la force vive  $T$  du point est aussi une fonction des  $x, y, z$  assujettie seulement à conserver une valeur constante le long de chaque courbe de la congruence, ou, ce qui est le même, à satisfaire à l'équation

$$(\bar{\varphi}_0 \nabla) T = 0 ,$$

$\bar{\varphi}_0$  étant un vecteur unitaire ayant la direction de la tangente à chaque point d'une quelconque des courbes de la congruence. Il est ainsi défini un champ de forces correspondant à un tel mouvement<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> On voit facilement qu'un tel champ peut être toujours défini:

En effet, considérons un point matériel assujetti à se mouvoir sur une quelconque des courbes de la congruence définie par les équations:

$$\begin{cases} f_1(x, y, z, a, b) = 0 \\ f_2(x, y, z, a, b) = 0 , \end{cases} \quad (a)$$

sans forces directement appliquées sur lui.

Les liaisons étant holonomes, le mouvement sera *uniforme* et par conséquent la force vive du point qui peut varier d'une courbe à l'autre sera une fonction seulement des paramètres  $a, b$ :

$$T = T(a, b) . \quad (b)$$

En éliminant  $a, b$  entre les équations (a) et (b) nous obtenons la valeur absolue de la vitesse et la vitesse même en fonction des  $x, y, z$  seuls.

Les forces de liaisons peuvent être déterminées en fonction des  $x, y, z$ , des paramètres  $a, b$  et des dérivées de  $x, y, z$  par rapport au temps\*, qui d'après ce qui précède sont des fonctions des  $x, y, z$  et par conséquent en éliminant  $a, b$  entre les composantes de la résultante de ces forces et les équations (a) nous obtenons aussi la force motrice en fonction des  $x, y, z$  seuls.

\* BOULIGAND, *Précis de Mécanique rationnelle*, p. 103.

Après les suppositions faites nous allons démontrer les théorèmes suivants :

a) *La condition nécessaire et suffisante pour que les courbes d'une congruence soient des lignes géodésiques d'une famille de surfaces, est que la congruence constituée par les lignes de forces du champ correspondant au mouvement uniforme d'un point sur une quelconque des courbes de la congruence soit une normalie.*

b) *Lorsque la vitesse du point à un tel mouvement, définie en fonction des  $x, y, z$ , dérive d'un potentiel  $\Phi$ , les courbes de la congruence sont des lignes géodésiques de la série des surfaces  $(\text{grad } \Phi)^2 = \text{const.}$*

Supposons que la congruence soit définie par un vecteur  $\bar{v}$  et cherchons les conditions exigées afin que les courbes de cette congruence soient des géodésiques d'une famille des surfaces  $\varphi(x, y, z) = \text{const.}$

Dans ce cas les trois vecteurs  $\bar{v}$ ,  $(\bar{v} \nabla) \bar{v}$  et  $\text{grad } \varphi$  sont complémentaires, vu que les deux vecteurs  $\bar{v}$  et  $(\bar{v} \nabla) \bar{v}$  déterminent à chaque point du champ le plan osculateur de la courbe de la congruence qui passe par ce point et  $\text{grad } \varphi$  est situé sur ce plan, la courbe étant une géodésique de la surface, et par conséquent nous avons

$$[\bar{v} (\bar{v} \nabla) \bar{v} \text{ grad } \varphi] = 0 . \quad (11)$$

tandis qu'en même temps on a

$$\bar{v} \text{ grad } \varphi = 0 , \quad (12)$$

les surfaces de la famille étant engendrées par les courbes de cette congruence.

Les deux conditions (11) et (12) se remplissent seulement dans le cas où les surfaces  $\varphi(x, y, z) = \text{const.}$  sont engendrées par les courbes des deux congruences définies par les vecteurs  $\bar{v}$  et  $\bar{v} \times (\bar{v} \nabla) \bar{v}$ .

Il en résulte que *la condition nécessaire et suffisante pour que les courbes de la congruence définie par un vecteur  $\bar{v}$  soient des géodésiques d'une famille des surfaces, est que la congruence définie par le vecteur*

$$\bar{v} \times \{ \bar{v} \times (\bar{v} \nabla) \bar{v} \}$$

*soit une normalie.*

Les surfaces sur lesquelles les courbes de la congruence sont des géodésiques sont les surfaces normales aux courbes de la congruence définie par le vecteur  $\bar{\nu} \times \{ \bar{\nu} \times (\bar{\nu} \nabla) \bar{\nu} \}$ .

Supposons maintenant que les surfaces de la famille  $\nu^2 = \text{const.}$ ,  $\nu$  étant la valeur absolue de  $\bar{\nu}$ , soient engendrées par les courbes de la congruence définie par  $\bar{\nu}$ ; dans ce cas il est

$$\bar{\nu} \cdot \text{grad } \nu^2 = 0$$

et

$$\bar{\nu} \cdot (\bar{\nu} \nabla) \bar{\nu} = 0 .$$

On en déduit:

$$\bar{\nu} \times \{ \bar{\nu} \times (\bar{\nu} \nabla) \bar{\nu} \} = -\nu^2 \cdot (\bar{\nu} \nabla) \bar{\nu} .$$

En conséquence:

*Dans le cas où les surfaces de la famille  $\nu^2 = \text{const.}$  sont engendrées par les courbes de la congruence définie par  $\bar{\nu}$ , la condition nécessaire et suffisante pour que les courbes de cette congruence soient des géodésiques d'une famille de surfaces est que la congruence définie par le vecteur  $(\bar{\nu} \nabla) \bar{\nu}$  soit une normalie.*

Il est facile de montrer qu'étant donné un vecteur  $\bar{\nu}$ , il est toujours possible de trouver un vecteur  $\bar{\nu}' = k\bar{\nu}$  en déterminant  $k$  de façon que la famille de surfaces  $\bar{\nu}'^2 = \text{const.}$  soit engendrée par les courbes de la congruence définie par  $\bar{\nu}$  ou  $\bar{\nu}'$ .

En effet, le coefficient  $k$  sera déterminé par la relation:

$$\bar{\nu} \cdot (\bar{\nu} \nabla) k \bar{\nu} = 0 \quad \text{ou} \quad \nu^2 \cdot (\bar{\nu} \nabla) k + k \bar{\nu} \cdot (\bar{\nu} \nabla) \bar{\nu} = 0 ;$$

en d'autres termes  $k$  est l'intégrale d'une équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre.

Si maintenant  $\bar{\nu}$  désigne la vitesse du mouvement considéré, définie en fonction des  $x, y, z$ , l'accélération qui correspond au mouvement sera

$$\bar{w} = (\bar{\nu} \nabla) \bar{\nu} ,$$

un vecteur toujours normal à  $\bar{\nu}$ , le mouvement étant uniforme; par conséquent on a

$$\bar{\nu} \cdot \bar{w} = \bar{\nu} \cdot (\bar{\nu} \nabla) \bar{\nu} = 0 \quad \text{et} \quad \bar{\nu} \cdot \text{grad } \bar{\nu}^2 = 0 .$$

En d'autres termes les surfaces de la famille  $\varphi^2 = \text{const.}$  sont engendrées par les courbes de la congruence. Dans le cas où la congruence constituée par les lignes de forces est une normalie, les courbes de la congruence sont, d'après ce qui précède, des géodésiques sur les surfaces normales aux lignes de forces et le théorème (*d*) est démontré.

Si la vitesse  $\bar{v}$  dérive d'un potentiel  $\varphi$ :

$$\bar{v} = - \text{grad } \varphi,$$

l'accélération sera

$$\bar{w} = \frac{1}{2} \text{grad} (\text{grad } \varphi)^2$$

et les courbes de la congruence sont des géodésiques des surfaces  $(\text{grad } \varphi)^2 = \text{const.}$

Le théorème (*b*) peut être aussi énoncé de la façon suivante:

*Pour que les trajectoires orthogonales d'une famille des surfaces  $\varphi(x, y, z) = \text{const.}$  soient des géodésiques d'une autre famille de surfaces il est nécessaire et suffisant que les surfaces de la famille  $(\text{grad } \varphi)^2 = \text{const.}$  coupent orthogonalement les surfaces de la famille  $\varphi = \text{const.}$*

## SUR L'ITÉRATION DE $\log(1 + z)$

PAR

A. VAN HASELEN (Loosdrecht, Hollande).

Nous aurons à faire usage du théorème suivant:

*Si  $f(z)$  est holomorphe dans un cercle  $C$  et si toutes ses valeurs sont dans  $C$ , alors les itérés  $z_1 = f(z)$ ,  $z_2 = f(z_1)$ , ...  $z_n = f(z_{n-1})$ , ... tendent pour  $n$  infini vers un point limite unique  $\alpha$ , indépendant du point initial  $z$  dans  $C$ . Si l'équation  $f(z) = z$  possède une racine à l'intérieur de  $C$ , alors  $\alpha$  coïncide avec cette racine. Si une telle racine n'existe pas,  $\alpha$  est sur la frontière de  $C$ .*<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Voir J. WOLFF, Sur l'itération des fonctions bornées (*C. R.*, 182, 1926, p. 42). J. WOLFF, Sur une généralisation d'un théorème de Schwarz (*C. R.*, 182, 1926, p. 918). Voir aussi A. DENJOY, *C. R.*, 182, 25 janvier 1926.