4. — Existence du rayon de convergence R.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **30 (1931)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Nous pouvons alors écrire d'une manière effective, pour z intérieur à Γ_2,

$$\sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m \Phi_m(z) = \frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \Phi_n^1(z) \right],$$

les $\Phi_m(z)$ étant précisément les fonctions rationnelles (3), et comme la série du second membre représente une fonction holomorphe par rapport aux deux variables z et λ respectivement dans Γ_2 et C', *il résulte que le point ζ est effectivement un pôle pour la fonction définie par la série* (4').

Ce procédé s'applique évidemment aussi dans le cas où il y aurait encore d'autres zéros $\zeta_{m,\,i}$ en nombre fini sur le cercle Γ_1, quels que soient leurs ordres de multiplicité. Il faut bien entendu supposer que les zéros $\zeta_{m,\,i}$ n'annulent pas une infinité de polynomes $P_m(z)$.

4. — Existence du rayon de convergence R.

Indiquons maintenant les cas simples où le rayon R existe et est bien déterminé. Nous supposerons bien entendu que les cercles Γ_i introduits dans le paragraphe précédent, appartiennent *entièrement* au domaine d'existence D relatif aux fonctions (5) et (10).

Ier cas. — Les polynomes $P_m(z)$ *tendent uniformément vers un polynome* P (z) *ou vers une fonction entière de genre zéro.* Dans ce cas, les racines de la fonction $P(z)$ apparaissent comme des points singuliers essentiels pour *la fonction représentée par la série* (4'), *qui est méromorphe dans le cercle* Γ, *de centre* O_z, *passant par le plus proche de l'origine zéro de* P(z). Nous ne pouvons établir avec la méthode de prolongement analytique introduite, le caractère effectif de la série (4') à l'extérieur de Γ.

Dans toutes ces considérations, il faut tenir compte évidemment de la fonction limite $\overline{Q}(z)$ relative à la suite des maxima $\overline{Q}_m(z)$. Nous reviendrons dans un autre article pour préciser la nature de cette fonction.

II$^{\text{me}}$ *cas. — Les polynomes* $P_m(z)$, *multipliés par des fonctions exponentielles analogues à celles de Weierstrass-Picard, tendent uniformément vers une fonction uniforme* $P(z)$ *qui peut admettre des points singuliers essentiels à distance finie.*

Ce cas nous a conduits à une généralisation des produits infinis de Weierstrass ou de M. Picard, qui s'introduit d'une manière naturelle dans notre étude. La limite (13) n'ayant plus de sens dans notre cas, il a fallu multiplier les deux membres de la relation récurrente (2′) par une fonction exponentielle convenable, ce qui nous a conduits à d'autres séries (5) et (10), mais qui définissent aussi des fonctions holomorphes sur D si les anciennes possèdent cette propriété. Nous avons ensuite suivi la même voie que dans les paragraphes précédents obtenant pour R une expression limite analogue à (13), bien déterminée dans la plupart des cas. Les mêmes conclusions peuvent être tirées comme dans le cas précédent.

Avant de terminer, remarquons que le prolongement analytique introduit n'est applicable que si l'expression limite (13), ou son analogue du deuxième cas, conserve un sens pour z intérieur aux cercles Γ_i. Il résulte de là que tout zéro de la fonction $P(z)$ ainsi que tout point singulier des fonctions $P(z)$ et $Q(z)$ arrêtent le prolongement, ces points apparaissant comme des points singuliers essentiels pour la fonction représentée par la série (4′).

Nous reviendrons dans un mémoire plus détaillé sur toutes les questions laissées de côté ou seulement mentionnées, mémoire dans lequel nous essaierons de nous affranchir complètement du caractère *local* de cette étude, la méromorphie de la fonction représentée par la série (4′) n'étant établie que dans des domaines particuliers, les cercles Γ_i, rattachés à l'origine du plan z.

Juillet 1931.