Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 30 (1931)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR CERTAINES SÉRIES DE FONCTIONS RATIONNELLES

Autor: Badesco, Radu

Kapitel: 3. — Prolongement analytique dans le plan z.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-23894

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

La convergence uniforme de la série (4) dans C' entraîne l'holomorphie de la fonction qu'elle représente, aussi par rapport à z à l'intérieur du cercle Γ_1, résultat qu'on établit à l'aide du théorème classique de Weierstrass qui se réfère aux séries de fonctions holomorphes. *Il résulte donc que la série* (4') *représente une fonction holomorphe par rapport à l'ensemble des deux variables* z *et* λ *respectivement à l'intérieur des cercles* Γ_1 *et* C'.

3. — Prolongement analytique dans le plan z.

La méthode utilisée pour établir le caractère effectif de la série (4') à l'intérieur du cercle Γ_1 peut être employée, après une simple transformation du système récurrent (2'), aussi au prolongement analytique dans le plan z de l'élément de fonction qu'on obtient en développant cette série suivant les puissances entières et positives de z. En effet, supposons que de tout l'ensemble des zéros des polynomes $P_m(z)$ il n'y ait qu'un seul situé sur le cercle Γ_1, le point ζ, qui annule seulement le polynome $P_p(z)$. Nous supposerons de plus que c'est un zéro de degré *un* de multiplicité.

Ceci précisé, remarquons qu'en multipliant la série (4') par $\left(1 - \frac{z}{\zeta}\right)$ et effectuant les réductions, le point ζ n'annulera plus les dénominateurs des expressions qui correspondent aux divers coefficients des puissances de λ ainsi modifiés. *Formellement*, le point ζ n'apparaît plus comme un pôle de la fonction représentée par la série (4') multipliée par le facteur considéré. Nous allons montrer que ceci a lieu aussi d'une manière *effective*. Pour cela, posons

$$\Phi_m^1(z) = \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right)\Phi_m(z) \qquad (m = p\,,\ p+1\,,\ \ldots)$$

et désignons par $P_p^1(z)$ le polynome $P_p(z)$ dans l'expression duquel on aurait supprimé le facteur $\left(1 - \frac{z}{\zeta}\right)$. Le système récurrent (2') pourra alors s'écrire

$$\rho^m P_m(z)\,\Phi_m(z) = \sum_{n=1}^{m} \rho^{m-n} Q_{m,n}(z)\,\Phi_{m-n}(z) + R_m(z)$$

$$(m = 0,\ 1,\ \dots\ p - 1)$$

$$\rho^p P_p^1(z)\,\Phi_p^1(z) = \sum_{n=1}^{p} \rho^{p-n} Q_{p,n}(z)\,\Phi_{p-n}(z) + R_p(z) \qquad (2'')$$

$$\rho^m P_m(z)\,\Phi_m^1(z) = \sum_{n=m-p+1}^{m} \rho^{m-n}\left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) Q_{m,n}(z)\,\Phi_{m-n}(z) +$$

$$\sum_{n=0}^{m-p} \rho^{m-n} Q_{m,n}(z)\,\Phi_{m-n}^1(z) + R_m(z)\cdot\left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) \qquad (m > p)$$

et nous voyons qu'il rentre dans le même type (2), les racines des polynomes $P_m(z)$ correspondants étant situées à l'extérieur du cercle Γ_1. Soit Γ_2 le cercle concentrique à Γ_1 qui passe par le zéro de la suite

$$P_0(z)\,,\ P_1(z)\,,\ \dots,\ P_{p-1}(z)\,,\ P_p^1(z)\,,\ P_{p+1}(z)\,,\ \dots$$

le plus proche de l'origine. Pour z intérieur à ce cercle, la série

$$\sum_{n=0}^{p-1} \lambda^n \Phi_n(z) + \sum_{m=p}^{\infty} \lambda^m \Phi_m^1(z) \qquad (14)$$

converge uniformément dans le même cercle C$'$, car la limite (13) ne dépend pas de $P_p^1(z)$, et le maximum sur D du facteur $\left(1 - \frac{|z|}{|\zeta|}\right)$ est égal à l'unité. Le cercle de convergence de cette série et, par conséquent, aussi le cercle C$'$, ne changent pas si l'on remplace dans (14) les $\Phi_n(z)$, $(n = 0,\ 1,\ \dots\ p - 1)$, par d'autres fonctions $\Phi_n^1(z)$ vérifiant les relations

$$\Phi_n^1(z) = \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right)\cdot\Phi_n(z) \qquad (n = 0,\ 1,\ \dots\ p - 1)\,.$$

Nous pouvons alors écrire d'une manière effective, pour z intérieur à Γ_2,

$$\sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m \Phi_m(z) = \frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \Phi_n^1(z) \right],$$

les $\Phi_m(z)$ étant précisément les fonctions rationnelles (3), et comme la série du second membre représente une fonction holomorphe par rapport aux deux variables z et λ respectivement dans Γ_2 et C′, *il résulte que le point ζ est effectivement un pôle pour la fonction définie par la série* (4′).

Ce procédé s'applique évidemment aussi dans le cas où il y aurait encore d'autres zéros $\zeta_{m,\,i}$ en nombre fini sur le cercle Γ_1, quels que soient leurs ordres de multiplicité. Il faut bien entendu supposer que les zéros $\zeta_{m,\,i}$ n'annulent pas une infinité de polynomes $P_m(z)$.

4. — Existence du rayon de convergence R.

Indiquons maintenant les cas simples où le rayon R existe et est bien déterminé. Nous supposerons bien entendu que les cercles Γ_i introduits dans le paragraphe précédent, appartiennent *entièrement* au domaine d'existence D relatif aux fonctions (5) et (10).

Ier cas. — Les polynomes $P_m(z)$ *tendent uniformément vers un polynome* P (z) *ou vers une fonction entière de genre zéro.* Dans ce cas, les racines de la fonction $P(z)$ apparaissent comme des points singuliers essentiels pour *la fonction représentée par la série* (4′), *qui est méromorphe dans le cercle* Γ, *de centre* O_z, *passant par le plus proche de l'origine zéro de* P(z). Nous ne pouvons établir avec la méthode de prolongement analytique introduite, le caractère effectif de la série (4′) à l'extérieur de Γ.

Dans toutes ces considérations, il faut tenir compte évidemment de la fonction limite $\overline{Q}(z)$ relative à la suite des maxima $\overline{Q}_m(z)$. Nous reviendrons dans un autre article pour préciser la nature de cette fonction.