Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 30 (1931)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR CERTAINES SÉRIES DE FONCTIONS RATIONNELLES

Autor: Badesco, Radu

Kapitel: 2. – DÉTERMINATION DU RAYON DE CONVERGENCE R.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-23894

2. — Détermination du rayon de convergence R.

Pour déterminer le rayon de convergence R de la série (4′), remarquons que, si l'on peut former *une suite réelle de fonctions positives* [1]

$$\overline{\Phi}_0(z)\,,\ \overline{\Phi}_1(z)\,,\ \ldots\,,\ \overline{\Phi}_m(z)\,,\ \ldots \tag{6}$$

vérifiant sur tout le domaine fermé D, les inégalités $\overline{\Phi}_m(z) \geqq |\,\Phi_m(z)\,|$ $(m \geqq 0)$, la série auxiliaire

$$\sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m \overline{\Phi}_m(z) \tag{7}$$

admettra dans le plan λ un cercle de convergence de rayon plus petit, au plus égal à celui qui correspond à la série (4′).

Soient $\underline{P}_m(z)$, $\overline{Q}_{m,n}(z)$ et $\overline{R}_m(z)$, trois suites réelles et positives de polynomes ou de fonctions dépendant de z, qui vérifient sur D les inégalités

$$\overline{Q}_{m,n}(z) \geqq |\,Q_{m,n}(z)\,| \qquad \overline{R}_m(z) \geqq |\,R_m(z)\,|\ . \tag{8}$$

$$0 < \underline{P}_m(z) \leqq |\,P_m(z)\,|$$

En les remplaçant dans la relation récurrente (2′), ce qui correspond [2] à une majoration des modules des polynomes donnés du second membre et à une minoration dans le premier membre, il est clair que les fonctions $\overline{\Phi}_m(z)$ qui satisfont à la relation récurrente ainsi obtenue, rentreront dans la catégorie (6) considérée plus haut.

Prenons en particulier

$$\overline{R}_m(z) = R(z)\ , \qquad \overline{Q}_{m,n}(z) = \overline{Q}_{m-n}(z)\ , \tag{9}$$

---

[1] En désignant ces fonctions avec $\overline{\Phi}_m(z)$, nous mettons seulement en évidence leur dépendance du point z, mais il importe de savoir qu'elles sont réelles et positives.

[2] Sur l'axe réel positif.

$R(z)$ étant le maximum sur le cercle C du module de la fonction représentée par la série (5), pour z appartenant à D, et $\overline{Q}_{m-n}(z)$ des polynomes ou des fonctions qui dépendent seulement de la différence $(m - n)$. Pour le premier groupe $\overline{R}_m(z)$, les inégalités correspondantes (9) sont précisément celles de Cauchy que l'on déduit de l'holomorphie de (5) sur le cercle C. Quant aux fonctions $\overline{Q}_{m,n}(z)$, leur choix dépend de la convergence uniforme des séries

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\rho}\right)^m Q_{m,\, m-p}(z) \qquad (p = 0, 1, \ldots) \tag{10}$$

sur tout le cercle fermé C et pour z appartenant à D. Si cette condition est remplie quel que soit p, nous remplacerons les $Q_{m,n}(z)$ respectivement par les maxima $Q_{m-n}(z)$ sur C des fonctions représentées par les séries (10) correspondant aux mêmes valeurs $m - n$ de p.

Passons maintenant aux polynomes $P_m(z)$, que nous supposerons être de la forme [1]

$$P_m(z) = \left(1 - \frac{z}{\zeta_{m,1}}\right)\left(1 - \frac{z}{\zeta_{m,2}}\right) \cdots \left(1 - \frac{z}{\zeta_{m,k}}\right). \tag{11}$$

c'est-à-dire ne s'annulant pas à l'origine [2]. Ils pourront être remplacés par les expressions suivantes

$$\underline{P}_m(z) = \left(1 - \frac{|z|}{|\zeta_{m,1}|}\right)\left(1 - \frac{|z|}{|\zeta_{m,2}|}\right) \cdots \left(1 - \frac{|z|}{|\zeta_{m,k}|}\right) \tag{11'}$$

pourvu que les inégalités (8) soient remplies. Ceci ne sera possible que si z est intérieur au cercle Γ_1 dont le centre est à l'origine O_z et dont le rayon est égal au module du plus proche de O_z zéro

[1] k dépend en général aussi de n.

[2] Si un nombre fini p de zéros des polynomes $P_m(z)$ coïncide avec O_z, multipliant la série (4) par z^p et effectuant sur les $\Phi_m(z)$ quelques transformations analogues à celles employées au § 4°, nous obtenons un système récurrent du type (2') pour lequel aucun des polynomes $P_m(z)$ ne s'annule à l'origine.

de tous les polynomes $P_m(z)$ car, dans cette hypothèse, nous avons quel que soit m et i,

$$0 < 1 - \frac{|z|}{|\zeta_{m,i}|} \leq \left|1 - \frac{z}{\zeta_{m,i}}\right| .$$

La relation de récurrence (2′) devient après toutes ces modifications

$$\underline{P}_m(z)\,\overline{\Phi}_m(z) = \sum_{n=1}^{m} \frac{\overline{Q}_{m-n}(z)}{\rho^n}\,\overline{\Phi}_{m-n}(z) + \frac{R(z)}{\rho^m} ,$$

d'où, remplaçant m par $m-1$, divisant la relation obtenue par ρ et la soustrayant de la première, nous déduisons

$$\rho\,\underline{P}_m(z)\,\overline{\Phi}_m(z) = \left[\underline{P}_{m-1}(z) + \overline{Q}_{m-1}(z)\right]\overline{\Phi}_{m-1}(z) .$$

En résolvant de proche en proche cette relation récurrente particulière, nous obtenons la série auxiliaire (7) sous la forme

$$R(z)\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\rho}\right)^m \frac{1}{\underline{P}_m(z)} \prod_{i=0}^{m-1}\left[1 + \frac{\overline{Q}_i(z)}{\underline{P}_i(z)}\right] , \tag{12}$$

son rayon de convergence R étant donné par la limite

$$R = \lim_{m\to\infty} \rho \left\{ \frac{\underline{P}_{m-1}(z)}{\underline{P}_m(z)} + \frac{\overline{Q}_{m-1}(z)}{\underline{P}_m(z)} \right\}^{-1} \tag{13}$$

que nous supposerons pour le moment bien déterminée et différente de zéro. Dans cette hypothèse, z étant supposé intérieur au cercle Γ_1, il résulte que la série de fonctions rationnelles (4) converge absolument et uniformément à l'intérieur de tout cercle concentrique au cercle C′

$$|\lambda| = R$$

mais de rayon plus petit. *Elle représente donc une fonction holomorphe de la variable λ dans* C′.

La convergence uniforme de la série (4) dans C′ entraîne l'holomorphie de la fonction qu'elle représente, aussi par rapport à z à l'intérieur du cercle Γ_1, résultat qu'on établit à l'aide du théorème classique de Weierstrass qui se réfère aux séries de fonctions holomorphes. *Il résulte donc que la série* (4′) *représente une fonction holomorphe par rapport à l'ensemble des deux variables* z *et* λ *respectivement à l'intérieur des cercles* Γ_1 *et* C′.

3. — Prolongement analytique dans le plan z.

La méthode utilisée pour établir le caractère effectif de la série (4′) à l'intérieur du cercle Γ_1 peut être employée, après une simple transformation du système récurrent (2′), aussi au prolongement analytique dans le plan z de l'élément de fonction qu'on obtient en développant cette série suivant les puissances entières et positives de z. En effet, supposons que de tout l'ensemble des zéros des polynomes $P_m(z)$ il n'y ait qu'un seul situé sur le cercle Γ_1, le point ζ, qui annule seulement le polynome $P_p(z)$. Nous supposerons de plus que c'est un zéro de degré *un* de multiplicité.

Ceci précisé, remarquons qu'en multipliant la série (4′) par $\left(1 - \frac{z}{\zeta}\right)$ et effectuant les réductions, le point ζ n'annulera plus les dénominateurs des expressions qui correspondent aux divers coefficients des puissances de λ ainsi modifiés. *Formellement*, le point ζ n'apparaît plus comme un pôle de la fonction représentée par la série (4′) multipliée par le facteur considéré. Nous allons montrer que ceci a lieu aussi d'une manière *effective*. Pour cela, posons

$$\Phi_m^1(z) = \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right)\Phi_m(z) \qquad (m = p\,,\ p + 1\,,\ \ldots)$$

et désignons par $P_p^1(z)$ le polynome $P_p(z)$ dans l'expression duquel on aurait supprimé le facteur $\left(1 - \frac{z}{\zeta}\right)$. Le système récurrent (2′)