Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 30 (1931)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR CERTAINES SÉRIES DE FONCTIONS RATIONNELLES

Autor: Badesco, Radu

Kapitel: 1. — Remarques préliminaires.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-23894

les C_m étant des constantes données et $\Phi_m^0(z)$, $(m = 0, 1, \ldots)$, une suite de fonctions de la variable complexe z, qui vérifient le système récurrent infini

$$P_m(z)\,\Phi_m^0(z) = \sum_{n=1}^{m} Q_{m,\,n}(z)\,\Phi_{m-n}^0(z) + R_m(z)\,, \qquad (m = 0, 1, \ldots) \tag{2}$$

où $P_m(z)$, $Q_{m,\,n}(z)$ et $R_m(z)$ sont des polynomes connus de z. Il est facile à voir que toutes les fonctions $\Phi_m^0(z)$ sont rationnelles. En effet, supposant que z est distinct de tous les zéros des polynomes $P_m(z)$, nous pourrons calculer de proche en proche toutes les fonctions $\Phi_m^0(z)$, dont les expressions seront données par la relation [1]

$$\Phi_m^0(z) = \frac{1}{P_0(z)\,P_1(z)\ldots P_m(z)} \begin{vmatrix} Q_{m,\,1}(z) & Q_{m,\,2}(z) & \ldots & Q_{m,\,m}(z) & R_m(z) \\ -P_{m-1}(z) & Q_{m-1,\,1}(z) & \ldots & Q_{m-1,\,m-1}(z) & R_{m-1}(z) \\ 0 & -P_{m-2}(z) & \ldots & Q_{m-2,\,m-2}(z) & R_{m-2}(z) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & -P_0(z) & R_0(z) \end{vmatrix} \tag{3}$$

Nous voyons bien que $\Phi_m^0(z)$ apparaît comme un quotient de polynomes. *La série* (1) *est donc une série de fonctions rationnelles qui, dans l'hypothèse faite, est définie formellement d'une manière univoque à partir des polynomes donnés.* C'est des séries de cette forme que nous nous occuperons dans notre article.

1. — Remarques préliminaires.

Considérons la série un peu plus générale

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\rho}\right)^m C_m\,\Phi_m^0(z)\,, \tag{4}$$

où λ est un paramètre complexe et ρ un nombre réel positif. Si

[1] Obtenue en résolvant par la règle de Cramer le système d'équations linéaires déduit des $(m + 1)$ premières relations de (2).

nous désignons par ρ_1 le rayon de convergence dans le plan λ de la série

$$\sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m C_m \cdot$$

le rayon R_1 correspondant à (4) sera évidemment donné par la relation $R_1 = \rho_1 . R$, où R est le rayon de convergence de la série particulière ·

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\rho}\right)^m \Phi_m^0(z) \, . \tag{4'}$$

Nous pouvons donc, sans restreindre la généralité de notre étude, considérer seulement la série (4′) pour laquelle toutes les constantes C_m sont égales à l'unité.

Nous sommes obligés d'introduire dès le début *une condition nécessaire* dans notre recherche: la série

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\rho}\right)^m R_m(z) \tag{5}$$

doit converger uniformément en λ sur un certain cercle C, dont le centre est à l'origine O_λ, ceci quel que soit z appartenant à un domaine simplement connexe D qui contient l'origine O_z. Cette série représente donc une fonction holomorphe de la variable λ sur tout le cercle fermé C. Prenons ρ égal au rayon de ce cercle. Il est évident que dans ces conditions, la série (5) admet un cercle de convergence C_1 dont le rayon est plus grand que ρ.

Posons maintenant $\Phi_m^0(z) = \rho^m . \Phi_m(z)$; nous déduisons de (2) que les nouvelles fonctions $\Phi_m(z)$ satisfont au système récurrent

$$P_m(z)\, \Phi_m(z) = \sum_{n=1}^{m} \frac{Q_{m,n}(z)}{\rho^n} \Phi_{m-n}(z) + \frac{R_m(z)}{\rho^m} \, . \quad (m = 0, 1, \ldots) \tag{2'}$$

De cette manière, nous rattachons le rayon de convergence de notre série (4′) à celui de la série connue (5), ce qui d'ailleurs est inhérent au problème.