

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 29 (1930)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE.

Rubrik: BIBLIOGRAPHIE

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 07.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

analitica e quantistica, 3. — MINETTI: Teoria delle funzioni, 3. — PERNA: Equazioni algebriche, 3. — SEGRE: Integrali abeliani, 3. — VOLTERRA: Termodinamica, 3.

Torino; Università. — BOGGIO: Potenziale. Spazi curvi, 3. — FANO: Geometria non euclidea, 3. — FUBINI: Funzioni analitiche con particolare riguardo alle funzioni fuchsiane e ipergeometriche. Teoria delle serie normali di funzioni analitiche e sue applicazioni, 3. — PEANO: Fondamenti della matematica; esame critico, 3. — SOMIGLIANA: Teoria generale delle vibrazioni; applicazione all'acustica ed all'ottica. Moderne teorie ondulatorie, 3.

BIBLIOGRAPHIE

Pierre HUMBERT et Gaston JULIA. — **Oeuvres de G. Humbert.** — Tome I, préfacé par Paul PAINLEVÉ. Un volume in-4° carré de x-556 pages. Prix: 150 francs. Gauthier-Villars et C^{ie}. Paris, 1929.

Ces Œuvres d'un géomètre aussi sympathique que prématurément disparu commencent aujourd'hui à être publiées avec un remarquable à propos. Elles contiennent nombre d'aperçus géométriques qui peuvent être fondés sur des transformations intégrales analogues à celles d'où l'on peut faire sortir les développements de la Physique théorique. Georges Humbert précurseur de cette Physique! Ce ne serait pas plus extraordinaire que de voir les matrices de Charles Hermite s'introduire dans les théories quantiques.

Ce tome premier, après quelques lignes d'avertissement et la préface de M. Painlevé, commence par une liste de Mémoires et par une Notice sur Travaux que G. Humbert rédigea lui-même lors de sa candidature au Collège de France. Le volume contient ensuite les Mémoires ci-après:

1. Sur les courbes du genre un. — 2. Application de la théorie des fonctions fuchsiennes à l'étude des courbes algébriques. — 3. Sur quelques propriétés des aires sphériques. — 4. Sur le théorème d'Abel et quelques-unes de ses applications géométriques. — 5. Sur les courbes cycliques de direction. — 6. Sur les courbes algébriques planes rectifiables. — 7. Sur une interprétation géométrique de l'équation modulaire pour la transformation du troisième ordre. — 8. Sur les polygones de Poncelet. — 9. Sur le théorème d'Abel et quelques-unes de ses applications à la géométrie. — 10. Expression de quelques aires sur le paraboloïde elliptique. — 11. Quelques propriétés des arcs des courbes algébriques planes ou gauches. — 12. Sur les arcs de courbes planes.

En 1, Thèse de Doctorat, on aperçoit déjà les caractéristiques d'esprit de l'auteur. Recherche de résultats spécialement élégants dans le domaine ardu des fonctions Θ qu'on n'utilise, par exemple, que par leur somme. Utilisation, dans le même ordre d'idées, des fonctions Θ pour l'étude

géométrique des quartiques, des cycliques homofocales, etc. Les inspireurs étaient alors Clebsch et Darboux, ce dernier par son ouvrage *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques*.

En 2 l'inspiration vient de Poincaré. Ce dernier ayant montré qu'une courbe algébrique d'ordre n est paramétriquement représentable au moyen des fonctions fuchsiennes, Georges Humbert emploie ce mode de représentation pour rechercher comment les résultats, qu'il a déjà obtenus pour les courbes de genre un, peuvent être étendus aux courbes algébriques quelconques.

En 3, il semble, au premier abord, qu'il ne s'agisse que d'un problème très particulier. Un cône OC, de sommet O et de directrice C transperce une sphère S sur laquelle sont ainsi déterminés deux cloisons, intérieures au cône, d'aires respectives $\sigma_2 > \sigma_1$. On se propose d'étudier la différence $\sigma_2 - \sigma_1$ tout comme la différence d'arcs analogue dans le cas du cercle et d'un angle alors mesuré par la moitié de cette différence d'arcs. Au fond des choses il y a là une aire $\sigma_2 - \sigma_1$ exprimable par une intégrale de ligne attachée au contour C qui, évidemment, est complètement indépendant de S. C'est une manière de procéder que nous retrouverons dans la suite, notamment en 9; la méthode consiste à associer des intégrales par combinaisons abéliennes et, de plus, dans les cas spatiaux, par des recours *implicites* à la formule de Stokes qui, remplaçant des intégrales de surfaces par des intégrales de contours, joue un rôle simplificateur perfectionnant celui de la combinaison abélienne. Nous soulignons le mot *implicites* car G. Humbert ne parle pas de formules stokiennes qui, il y a un demi-siècle, n'étaient guère explicitées. Mais il n'en est que plus intéressant de remarquer le rôle latent de ces formules qui auraient pu apparaître aussi bien en Géométrie qu'en Mécanique ou en Physique.

Remarques analogues en 4 et 5. Nouvel emploi des fonctions fuchsiennes pour effectuer des combinaisons abéliennes sur faisceaux algébriques. Intervention des courbes de direction et particulièrement de celles qui sont cycliques; leurs arcs se prêtent alors à des évaluations circulaires.

En 6 réapparaissent les courbes de direction, leurs développées, les caustiques, les familles épicycloïdales; les courbes à arc s tel que $F(x, y, s) = 0$, avec F algébrique, forment des catégories plutôt limitées mais riches en propriétés géométriques.

En 7 et 8 élégantes applications de la transformation d'une intégrale elliptique.

En 9 il faut revenir sur ce qui a été déjà dit à propos de 3. Le Mémoire se termine par la délicate question des aires ellipsoïdales dans leurs rapports avec les évaluations algébrico-logarithmiques; le théorème de Graves et de Chasles se révèle aussi harmonieux sur la quadrique que sur la conique. Il est montré, en 10, que certains de ces résultats dégèrent d'une manière élémentaire remarquable quand on passe de l'ellipsoïde au paraboloid.

En 11 il s'agit de l'arc d'une courbe algébrique plane ou gauche qui, sauf sur les courbes de direction, n'est pas une intégrale abélienne attachée à la courbe; on peut toutefois étudier des intersections par des surfaces telles que le radical du cas précédent s'élimine en de certaines combinaisons abéliennes. Alors il y aura, sur la courbe, des associations d'arcs qui seront des associations rectifiables.

En 12 nous revenons au théorème de Graves et Chasles étendu avec une simplicité inattendue à une courbe algébrique quelconque. Admirable

volume de propriétés géométriques, surtout intégrales, qui ne sont jamais calculées sans être vues de manière extrêmement ingénieuse.

A. BUHL (Toulouse).

Paul TANNERY. — **Pour l'Histoire de la Science Hellène.** Deuxième édition publiée par A. DIÈS avec une préface de Federigo ENRIQUES et un portrait de P. Tannery. — Un volume gr. in-8° de xxii-436 pages. Prix : 80 francs. Gauthier-Villars et C^{ie}. Paris, 1930.

La première édition de cette œuvre admirable fut publiée en 1887. La seconde, grâce à M. A. Diès, Professeur à la Faculté libre des Lettres d'Angers, renouvelle aujourd'hui le « miracle grec ». Tout est à louer dans un tel livre, à commencer par la modestie du titre. Paul Tannery n'a pas voulu faire, d'autorité, l'Histoire de la Science grecque ; il prétend seulement y contribuer, la préparer par une méthode documentaire. Mais l'intelligence de ses recherches et de son analyse est telle que le plan est devenu monument, que l'esquisse est devenue la plus magnifique des peintures. Nous sommes, de plus, à une époque où la Philosophie et la Science s'unissent de la manière la plus harmonieuse et, semble-t-il, sans arrière-pensée. L'antagonisme qui règne entre elles, avec des alternatives de réconciliations et de ruptures aboutira-t-il, en fin de compte, à un divorce ou à un accord qui serait d'une importance capitale pour l'humanité ? Telle est la question que M. F. Enriques pose dans sa préface. Tout plaide, en ce moment, pour l'accord. C'est ainsi que nous avons vu, tout récemment, M. Léon Lichtenstein, à propos d'hydromécanique¹, dire son enthousiasme pour M. Emile Meyerson. M. Henri Villat, délicat helléniste et d'autant meilleur géomètre, place ses *Leçons sur l'Hydrodynamique*, analysées plus loin, sous une épigraphe qui nous rappelle précisément quel rôle immense jouait l'eau dans la cosmologie grecque. "Ἀριστον μὲν ὕδωρ. Et les rapprochements que nous trouvons, si aisément, à côté du présent article, peuvent, à l'heure actuelle et fort heureusement, s'observer partout. Nous viendrons, tout à l'heure, à un magnifique discours historique et philosophique prononcé récemment par M. Emile Picard.

La Préface de M. Enriques est particulièrement heureuse. Elle s'élève encore contre tant de reconstructions qui, ne sachant pas se placer au-dessus des données brutes des sources, présentent les idées des Grecs sous une forme bizarre, de sorte que leur Science apparaît quelquefois comme un mélange incompréhensible de paradoxes et de non-sens.

Il faut, en effet, savoir reconnaître, dans les analogies d'apparence naïve, dans des constructions astronomiques faites d'après des identités arithmétiques, des germes de concepts et de symboles qui sont, aujourd'hui, à la base des théories électromagnétiques² et de la Gravifique d'Einstein. Présentement ce dernier est le parfait continuateur de l'esprit hellène.

Le livre de Paul Tannery, comme l'indique un sous-titre, va de Thalès à Empédocle. Il débute cependant par une Introduction sur les quatre âges de la Science antique et fait une part intéressante aux « doxographes »

¹ *L'Enseignement mathématique*, T. XXVIII, 1929, p. 333.

² P. BARBARIN et A. BUHL. *La Géométrie non-euclidienne*. Troisième édition. Collection *Scientia*, n° 15. Gauthier-Villars et C^{ie}. Paris, 1928, p. 141.

c'est-à-dire aux descripteurs d'opinions plus occupés de faire l'histoire des pensées émises avant eux que d'augmenter le bagage. Puis viennent la chronologie des « physiologues » et de prodigieux chapitres consacrés à Thalès de Milet, Anaximandre de Milet, Xénophane de Colophon, Anaximène, Héraclite d'Ephèse, Hippasos et Alcmeon, Parménide d'Elée, Zénon d'Elée, Méliossos de Samos, Anaxagore de Clazomène, Empédocle d'Agrigente, tous traités d'ailleurs tant au point de vue doxographique qu'à celui de leur génie propre. Que de comparaisons à faire avec les idées modernes ! Combien, par exemple, le « tout dans tout » d'Anaxagore fait penser à la compénétration de toutes choses en Mécanique ondulatoire ! Deux appendices intitulés « Théophraste sur les Sensations » et « Sur l'Arithmétique pythagoricienne » terminaient la première édition. Il faut maintenant y adjoindre deux comptes rendus à propos de Méliossos et une lettre à Gaston Milhaud. Ce dernier nom n'est pas sans me rappeler des souvenirs personnels. J'ai entendu Milhaud, à Montpellier, professer une admiration sans bornes pour Paul Tannery. Puis Milhaud passait à la Sorbonne et disparaissait peu après, ce à quoi la mémoire de Tamery perdait beaucoup. Je me rappelle, non sans émotion, avoir été reçu par le génial historien lui-même dans son cabinet directorial de ... la Manufacture des Tabacs de Pantin. Si étrange qu'ait été une telle situation pour un tel penseur on peut remarquer qu'il était là aux portes de Paris, qu'il avait à sa portée les ressources de la capitale, mais combien le mérite paraît encore augmenter quand on songe que la première édition du présent livre est datée de Tonneins. Heureusement, il y a des bizarreries favorables à la grandeur des savants ; elles augmentent encore leur gloire.

A. BUHL (Toulouse).

Emile PICARD. — **Un coup d'œil sur l'Histoire des Sciences et des Théories physiques.** — Un volume gr. in-8° de iv-402 pages. Prix : 25 francs. Gauthier-Villars et C^{ie}. Paris, 1930.

Ceci est la reproduction d'une magnifique lecture faite en la dernière séance annuelle de l'Académie des Sciences (16 décembre 1929). Un tel exposé constitue un régal qui nous livre la pensée d'un grand savant autrement que dans les formes mathématiques où nous sommes habitués à l'étudier ; nous pouvons alors, sans peine, collationner deux formes de l'Idée. Ceci dit pour les gens de science, à proprement parler ; ceux-ci sont indéniablement privilégiés devant de telles pages. Mais, d'autre part, tous les esprits à tournure philosophique peuvent aussi s'émerveiller et, comparant les dernières lignes aux premières, conclure que les théories d'aujourd'hui sont l'aboutissement normal de celles d'autrefois sans qu'il reste la moindre place pour le pessimisme ou le découragement dont certains littérateurs ont fait preuve. Un hasard rapproche ici le discours de M. Emile Picard d'une analyse concernant une partie de l'œuvre de Paul Tannery ; des deux côtés on perçoit la nécessité de remonter à l'antiquité pour situer convenablement l'œuvre moderne. En Egypte, en Chaldée, on reconnaît déjà la tendance à expliquer tous les phénomènes en partant d'un petit nombre de principes mais il faut passer en Grèce et revivre avec l'Ecole de Pythagore pour retrouver vraiment le germe des conceptions d'aujourd'hui. C'est là que les nombres sont la véritable essence des choses. Platon parle déjà de « sauver les phénomènes ».

Les premiers siècles de l'Ere chrétienne, le Moyen Age, brillent beaucoup moins que la période hellène. On peut cependant, avec Pierre Duhem, y trouver bien des choses. Combien l'on peut douloureusement regretter que Duhem et Poincaré soient morts prématurément; avec quel intérêt nous aurions suivi les liaisons qu'ils n'auraient point manqué d'établir, probablement de façons très différentes, entre la Mécanique des précurseurs et le dynamisme géométrique de l'heure présente, dynamisme qui, pour certains, est nouveau mais qui, répétons-le encore, n'est peut-être qu'une nouvelle floraison de l'esprit pythagoricien.

Avec Descartes nous trouvons encore dans l'Univers une mathématique universelle.

Puis on commence à abuser de l'adjectif « universel ». Newton n'entraîne pas toutes les convictions. Huyghens écrit à Leibnitz que le principe d'attraction lui paraît absurde ! Dans ces conditions Einstein pouvait-il ne pas rencontrer d'illustres contradicteurs ? Quoi qu'il en soit, Newton, lui aussi, sauvait les phénomènes à sa manière et avec une approximation qui reste merveilleuse; on peut discuter indéfiniment l'idée d'attraction sans changer la Mécanique céleste. Derrière le mot, peu clair, en effet, il y a une représentation analytique d'une immense valeur.

Les théories de la lumière rassemblent les noms de Huyghens, Newton, Fresnel, Maxwell. On sait que l'opposition entre émission et ondulations vient de cesser. C'est là, sans doute, un résultat prodigieux. On trouve encore des savants qui ont des théories particulièrement chères (c'est leur droit) mais qui, pour mieux les mettre en valeur, n'hésitent pas à essayer d'en diminuer d'autres (ici le droit est plus contestable). L'opposition des théories peut, jusqu'à un certain point, être féconde. Mais combien est plus remarquable encore la vue générale qui montre, tout à coup, que des théories qui s'opposaient sont parfaitement conciliables. Nous en sommes là avec la lumière, grâce aux quanta ou photons d'Einstein, si naturellement entraînés avec les ondes dans les mécaniques ondulatoires de Schrödinger ou de Louis de Broglie. Comment douter de la valeur de la Science quand un tel résultat vient d'être obtenu.

Ceci n'empêchera pas qu'il y aura probablement toujours des esprits absolus, surtout inconsciemment absolus, qui demanderont la vérité. Comment ne sentent-ils pas qu'ils demandent le repos ? La Science, indéfiniment, offre l'effort. Elle consiste à construire des *groupes* qui, heureusement, étant en nombre infini, promettent une moisson, toujours renouvelable, d'harmonies et de jouissances intellectuelles. Il ne peut y avoir de plus beau rêve.

Et ceci ne concerne pas uniquement les mathématiciens. Réfléchir c'est combiner des pensées et l'association de deux pensées humaines ne peut être, pour nous, autre chose qu'une pensée humaine. Ainsi toutes nos pensées forment un groupe immense dont, probablement, les diverses disciplines philosophiques et scientifiques constituent des sous-groupes, à domaines empiétant souvent l'un sur l'autre. Quoi qu'il en soit, on peut aboutir, dans cet ordre d'idées, à des conceptions élevées et sereines et c'est un bien grand mérite, pour la publication faite aujourd'hui par M. Emile Picard, que de conduire tout naturellement à de telles contemplations.

A. BUHL (Toulouse).

Commentationes in honorem Ernesti Leonardi Lindelöf. — Un volume gr. in-8° de vi-384 pages, avec un portrait de M. Ernst Lindelöf. Suomalainen Tiedekatemia. Helsinki, 1929.

Bel et touchant hommage offert à M. Ernst Lindelöf, par ses disciples et admirateurs, le 7 mars 1930, à l'occasion de son soixantième anniversaire.

Les travaux de M. Lindelöf ont particulièrement trait à la théorie des fonctions et sont universellement connus; on peut en rappeler aisément le brillant caractère rien qu'en renvoyant au *Calcul des résidus* publié dans la Collection de Monographies dirigée par M. Emile Borel. Le savant s'est, de plus, dépensé sans compter, comme professeur, à l'Université de Helsingfors; il a refait, dans sa pensée et dans son enseignement, presque toutes les branches des Mathématiques. A tous les points de vue, le témoignage de reconnaissance dont il vient d'être l'objet semble aussi naturel que mérité.

Donnons au moins les noms d'auteurs et les titres des Mémoires que le présent livre adresse au Maître.

J. W. LINDBERG. *Zur Korrelationstheorie.*

R. J. BACKLUND. *Ueber die Differenzen zwischen den Zahlen, die zu den n ersten Primzahlen teilerfremd sind.*

E. KIVIKOSKI. *Zur Theorie der projektiven Vielseite.*

NILS PIPPING. *Zur Theorie der Diophantischen Approximationen.*

K. A. POUKKA. *Ueber die Berechnung der Wurzeln einer algebraischen oder transcendenten Gleichung.*

LARS AHLFORS. *Ueber die asymptotischen Werte der ganzen Funktionen endlicher Ordnung.*

ROLF NEVANLINNA. *Ueber beschränkte analytische Funktionen.*

K. VÄISÄLÄ. *Zur Theorie des Jacobischen Kettenbruchalgorithmus zweiter Ordnung.*

P. J. MYRBERG. *Ein Satz über die fuchs'schen Gruppen und seine Anwendung in der Funktionentheorie.*

E. J. NYSTRÖM. *Ueber die Anwendung logarithmischer Masstäbe, insbesondere bei graphischer Integration.*

KARL SUNDMANN. *La gravitation universelle et sa vitesse de propagation.*

FRITHIOF NEVANLINNA. *Ueber die logarithmische Ableitung einer meromorphen Funktion.*

GUSTAF JÄRNEFELT. *Einige Bemerkungen über den Zusammenhang zwischen den geometrischen Verknüpfungssaxiomen und gewissen taktischen Konfigurationen.*

FELIX IVERSEN. *Sur les valeurs asymptotiques des fonctions périodiques.*

Il y a là quatorze Mémoires qu'il serait trop long d'analyser séparément, les noms seuls des auteurs répondant de leur importance. Bornons-nous donc à cette énumération mais non sans y joindre les respectueux compliments de *L'Enseignement mathématique* pour l'éminent et sympathique mathématicien finlandais.

A. BUHL (Toulouse).

Paul LÉVY. — **Cours d'Analyse.** — Tome I. Un volume in-4° carré de viii-376 pages. Prix: 120 francs. Gauthier-Villars et C^{ie}. Paris, 1930.

Les Cours de l'Ecole Polytechnique ont toujours été de nature à porter fort haut le renom de cette école. Sans remonter jusqu'à Bertrand et Hermite, on peut déjà considérer comme une époque héroïque celle de

Jordan et Humbert, lesquels nous ont laissé d'admirables chefs-d'œuvres. Le Cours de M. Jacques Hadamard vient à peine d'être publié, comme se rapportant aussi bien au Collège de France, que voici celui de M. Paul Lévy.

Une Préface nous renseigne d'abord sur les tendances. Il est entendu que l'Ecole forme une majorité de techniciens; elle doit être capable de former des savants. Et certes le nouveau Cours est à la hauteur de cette conception aussi légitime que traditionnelle. Son premier volume est divisé en sept parties.

La Première partie traite des différentielles, des fonctions implicites, des déterminants fonctionnels, des changements de variables, des maxima et minima. Tout est traité avec la plus grande généralité et la plus parfaite symétrie grâce à l'aspect naturel des différentielles totales et l'emploi judicieux des déterminants. Le point de vue physique n'est pas oublié, comme en témoignent la transformation de l'équation des cordes vibrantes et l'introduction du paramètre différentiel. Ces deux sujets sont d'ailleurs essentiels pour la théorie des ondes.

La seconde partie traite des intégrales indéfinies et définies, de l'extension de la notion d'intégrale définie et des notions géométriques se rattachant à cette intégrale. La réduction des intégrales hyperelliptiques, avec emploi de l'homographie, est fort brève. L'intégrale définie est précédée de la notion de continuité uniforme non sans un plaidoyer en faveur de l'intuition (note de la page 65). La recherche de y vérifiant $y'' = f(x)$ et s'annulant pour $x = a$, $x = b$, conduit, dans cette question tout à fait élémentaire, à l'embryon de la notion de *fonction de Green*. Dans les formules de quadrature approchées, il faut signaler un développement d'Euler-Maclaurin, construit avec les nombres de Bernoulli, développement qui présente un phénomène, de convergence asymptotique, le rendant utilisable dans ses premiers termes, bien qu'en général il soit divergent.

Les intégrales à limites infinies, à discontinuités, ..., sont étudiées avec de nombreux et curieux exemples.

La troisième partie traite des intégrales multiples. Le changement de variables y est envisagé avec originalité en utilisant les produits de déterminants fonctionnels. Règle de convergence intéressante pour le cas où la fonction, sous le signe d'intégration multiple, est comparable à $r^{-\alpha}$.

La quatrième partie traite des fonctions définies par des séries ou par des intégrales. La formule d'Euler-Maclaurin, de la seconde partie, intervient ici dans l'étude du reste d'une série convergente. Ceci est d'ailleurs suivi d'une étude de la somme d'un nombre fini de termes d'une série divergente. D'où une application aux factorielles et l'obtention de la formule de Stirling. Pour les séries de fonctions, on distingue soigneusement la convergence simple et la convergence uniforme. Ces généralités sont immédiatement précisées sur les séries entières. Pour les séries trigonométriques, un désaccord fondamental entre Fourier et Lagrange ne rappelle que trop les caractères épineux de la question (p. 160). Ici M. Paul Lévy suppose d'abord $f(x)$ développable puis, appelant $g(x)$ la série obtenue, examine les conditions (notamment les conditions de convergence uniforme) qui entraînent $f = g$. D'ailleurs l'intégrale de Dirichlet achève bientôt d'éclairer les choses, non sans d'originales transformations de cette intégrale. Suit la représentation par intégrales définies et notamment par intégrale de Fourier.

La cinquième partie traite des applications géométriques du Calcul différentiel. Après des généralités sur le contact et les enveloppes, vient un

chapitre très intéressant sur les transformations de contact très naturellement partagées en trois classes dont la troisième est celle des transformations ponctuelles. La courbure et la torsion d'une courbe gauche ont une théorie associée aux formules de Frenet, théorie très simplement étendue ensuite en passant de la variable arc à une variable quelconque. Le ds^2 sur une surface conduit à la représentation des surfaces les unes sur les autres. La courbure engendre l'association des deux formes différentielles quadratiques fondamentales.

La sixième partie traite des applications géométriques des intégrales multiples. Il s'agit surtout des formules de Riemann, d'Ostrogradsky et de Stokes, le tout aboutissant aux champs de vecteurs et même au seuil de la théorie tensorielle. Ce sont des questions d'invariance qui mènent ainsi les choses et M. P. Lévy fait nettement ressortir la fécondité de ces considérations quand, justement, les grandeurs physiques peuvent être d'abord assemblées sous forme amétrique.

La septième et dernière partie du volume est consacrée à une théorie élémentaire des équations différentielles. Des notions générales constituent une réduction d'une méthode d'intégration approchée; les intégrales singulières y trouvent également une place toute naturelle. Viennent alors les principaux cas d'intégration élémentaire puis un aperçu du rôle de *groupe* dans la réduction aux quadratures. A propos des équations linéaires, signalons la formation rapide de l'équation adjointe.

Une première note supplémentaire prolonge la théorie de la courbure et particulièrement celle des lignes de courbure. Une seconde note revient aux invariances du calcul tensoriel. Dans tout le volume, d'excellents et ingénieux exercices sont mêlés aux fins de chapitre. Partout l'étude est facile, attrayante, emplie de symétries analogues à celles déjà signalées. C'est bien le cours qui peut aboutir à la belle technique comme au développement indéfini de l'esprit scientifique.

A. BUHL (Toulouse).

Henri VILLAT. — **Leçons sur l'Hydrodynamique.** — Un volume gr. in-8 de VIII-296 pages. Prix: 50 francs. Gauthier-Villars et C^{ie}. Paris, 1929.

A peine les *Grundlagen der Hydromechanik*, de M. Léon Lichtenstein, sont-ils signalés, que M. Henri Villat impose à l'admiration deux volumes de Mécanique des fluides. C'est là, sans doute, l'aboutissement le plus direct que l'Ecole française pouvait donner à l'œuvre de M. Paul Appell. A une époque, à la fois riche des progrès de l'Analyse et tourmentée par les problèmes ardues que pose la Technique, on n'écrit pas des livres comme ceux-ci sans un prodigieux travail de documentation, un grand talent d'exposition et une puissance de création absolument nécessaire pour faire apparaître de nouvelles liaisons en des domaines jugés longtemps lacunaires ou inextricables.

Le premier mérite du présent ouvrage est de se suffire à lui-même. Il comprend vingt chapitres, dont quatre se rapportent à des propriétés essentielles des fonctions analytiques, au problème de Dirichlet dans un cercle ou dans un anneau, aux fonctions elliptiques, à la représentation conforme. Le chapitre V rappelle les merveilleuses symétries des équations concernant les fluides parfaits avec aboutissement immédiat au mouvement plan irrotationnel qui ramène la théorie du sillage à la détermination d'une

fonction analytique. Le Chapitre VI, en précisant ces notions, montre même qu'il y a là plus qu'une application quelconque du concept de fonction analytique; c'est ce concept même qui est en jeu avec l'élégante méthode de M. Levi-Civita. L'unicité de la dérivée en z , pour $f(z)$, s'impose, pour ainsi dire, physiquement; la théorie des sillages mènerait à celle des fonctions analytiques si on ne la connaissait pas. Entre le fluide mobile et le sillage, il y a une véritable coupure, la région mobile est à représenter conformément sur des plans coupés d'abord très simplement, mais susceptibles eux-mêmes de transformations diverses; le problème fonctionnel est évident, net, d'un attrait aussi manifeste au point de vue logique qu'au point de vue expérimental.

Le chapitre VII applique les considérations précédentes au cas d'une lame rectiligne, puis tente de passer au cas des lames à profils brisés, à angles vifs. Il y a là des cas singuliers ne relevant pas obligatoirement des méthodes précédentes, mais sur lesquels le talent personnel de M. Villat s'est grandement exercé.

Le chapitre VIII étudie des solutions multiples qui ne sont pas moins curieuses; la moindre granulation sur l'obstacle ou sur le solide en mouvement peut faire naître des plages mortes et des régimes différents pouvant subsister alors que la granulation tend à disparaître. Ici les régimes permanents semblent être analogues aux systèmes statiques à configurations multiples.

Avec le chapitre IX, nous passons aux fluides visqueux. Les équations générales du mouvement résultent de propriétés tensorielles que l'auteur redéveloppe en détail. L'intégration générale de ces équations semble être, au premier abord, un problème quelque peu effrayant. Il est examiné ici dans des cas particuliers qui le rattachent à des problèmes classiques. Ainsi le liquide en mouvement, parallèlement à Ox , avec adhérence au plan Oxy , conduit à l'équation de la chaleur (Ch. X). La couche liquide entre deux plans parallèles animés de translations données relève de cette même équation dont les solutions interviennent avec des physionomies intégrales connues (Ch. XI).

De telles solutions combinées avec les intégrales de la théorie du potentiel (Ch. XII) permettent d'aborder, au chapitre XIII, les équations intégrales de C. W. Oseen. Il s'agit de fluides visqueux, à mouvements lents et à tourbillons négligeables. Le système des équations du mouvement admet un système *adjoint* à *solutions fondamentales*, le tout se concevant et même se construisant comme dans le cas de la petite équation de la chaleur. Très belle généralisation que M. Villat expose sans longueurs et qui paraît pouvoir être encore le point de départ de bien des travaux qui ne se rapporteraient d'abord qu'à la structure et aux transformations encore possibles du système dû à l'habile mathématicien d'Upsala.

Un pas prodigieux est fait ici dans le sens des méthodes de Cauchy ou de Dirichlet. Le résultat d'Oseen, dans des circonstances très générales, renseigne sur l'état des vitesses en un point d'un volume fluide, connaissant l'état des vitesses et des pressions à la périphérie de ce volume. Le système intégral ainsi formé ouvre des voies analytiques insoupçonnées.

Quant à l'application effective de ce système, à son intégration proprement dite, dans des cas déterminés, nous voyons, dans les six derniers chapitres du livre (XIV à XX), avec nombre de ressources empruntées à la théorie du potentiel, aux fonctions de Legendre, aux fonctions elliptiques, qu'une

analyse puissante et harmonieuse peut être développée dans les cas de viscosité faible, dans le voisinage, pour ainsi dire, de celle qui est développée d'abord dans le cas de la viscosité nulle. Les solides symétriques (cylindres, hémisphères,...), le cas du fluide limité, donnent encore des théories analytiquement maniables sinon toujours d'accord avec l'expérience d'où, évidemment, de nombreux perfectionnements à rechercher; mais on a l'impression que, quoi qu'il en soit, la Science a été dirigée dans une voie utile, féconde, très ingénieuse, et qu'il y a peu de chances d'aller plus avant si la voie en question n'est pas parcourue d'abord en prenant pour guide l'enseignement profond et original de M. Henri Villat.

A. BUHL (Toulouse).

Henri VILLAT. — **Leçons sur la Théorie des Tourbillons.** — Un volume gr. in-8° de vi-300 pages. Prix: 65 francs. Gauthier-Villars et C^{ie}. Paris, 1930.

Ce serait un point de vue tout à fait insuffisant que de considérer la Théorie des tourbillons comme ne formant qu'un chapitre particulier de la Mécanique des fluides. Le « tourbillon » est essentiellement « stokien »; il peut naître, avec la formule de Stokes, de l'identité

$$\int_C X dY = \int_A \int dX dY \quad (1)$$

exprimant, de deux manières, l'aire A de contour C. Ainsi la Théorie peut avoir son origine dans la Géométrie et se diriger, avec les généralisations de (1), vers toutes les branches de la Physique théorique. Et, au fait, à notre époque de Mécanique ondulatoire, n'oublions-nous pas, un peu trop, la Mécanique tourbillonnaire à prétentions également universelles très défendables et très bien défendues par d'illustres savants tels que Lord Kelvin.

Il n'y a d'ailleurs pas lieu d'opposer ces deux Mécaniques; elles peuvent avoir des origines communes, en des identités du type (1). Bien que les mouvements tourbillonnaires ne soient pas les plus simples de tous, le concept de tourbillon a, *partout*, une immense puissance constructive. Ainsi le simple tableau de définition

$$\begin{array}{ccc} 2\xi & 2\eta & 2\zeta \\ \hline \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{array} \quad (2)$$

si l'on y intervertit les deux premières lignes, en introduisant une fonction H dans les symboles de dérivation partielle (cette introduction de H étant d'ailleurs nécessaire pour que l'interversion indiquée ait un sens), donne les équations du liquide parfait en mouvement permanent. Celles-ci, par élimination de H, donnent les équations de Helmholtz en relation avec le théorème de Lagrange sur la permanence du potentiel des vitesses et avec les résultats de Cauchy généralisés, en 1916, par Friedmann. Peu importe, ici, la description détaillée de tels développements, mais, encore une fois,

ce que l'on peut affirmer, avec force, c'est qu'il n'y a *rien*, littéralement *rien*, en Physique théorique, qui ne puisse être atteint avec des points de départ tels que les précédents. Et l'on peut déjà juger, par là, de l'immense importance des théories tourbillonnaires.

Le Chapitre premier de ce second livre de M. H. Villat nous familiarise d'abord avec ces grandioses conceptions préliminaires.

Le Chapitre II traite de la détermination des vitesses à partir des tourbillons; supposer que le vecteur (u, v, w) a, lui-même, une forme tourbillonnaire, introduit, dans la question, les laplaciens de la théorie du potentiel, suggère l'analogie existant entre l'anneau de tourbillons et le circuit électrique, enfin conduit, pour le cas du vase mobile, à une certaine équation de Fredholm, théorie déjà entrevue par Poincaré et récemment perfectionnée par MM. H. Villat et J. Delsarte.

Au chapitre III, nous voyons apparaître des équations canoniques pour le mouvement de tourbillons infiniment déliés et, au chapitre IV, avec les tourbillons de Bénard-Karman, toute une analyse de séries de fractions rationnelles pour la représentation de vitesses ou de potentiels complexes. Il y a ici des *files* de tourbillons, files régulières comme, par exemple, la file des pôles d'une tangente. Physiquement ces files se forment derrière les solides en mouvement dans les fluides (chapitre V), du moins sous certaines conditions de vitesses.

Avec le chapitre VI nous passons au cas du fluide limité et, plus particulièrement, limité par deux plans parallèles. Il est alors aisé de prévoir, en gros, ce qui va se passer. La configuration tourbillonnaire comprise entre ces deux plans peut être répétée indéfiniment et régulièrement en dehors de ceux-ci; les files de pôles d'une configuration donneront une infinité de files régulièrement distribuées dans un champ complexe et ce sera la distribution polaire d'une fonction méromorphe telle une fonction elliptique. De fait, dans ce chapitre VI, les fonctions elliptiques jouent un rôle élégant et étendu.

La représentation conforme conserve les tourbillons (chapitre VII) mais non leurs vitesses; déterminer celles-ci engendre de curieuses associations de limites et de dérivations, ces opérations n'étant point permutables.

Les chapitres VIII et IX ont trait aux tourbillons de dimensions finies, particulièrement aux configurations de révolution et à l'anneau. Il y a là des curiosités, telles le tourbillon sphérique de Hill et surtout le tourbillon elliptique de Kirchhoff, manifestant, pour ainsi dire, contre la trop grande symétrie que l'on pourrait prêter à la question en n'y introduisant que des configurations de révolution.

Le chapitre X atteint aux généralités avec lesquelles se combinent ondes et tourbillons, ce qui fait penser, à nouveau, aux généralités de la Physique théorique actuelle. Les ondes sont des discontinuités d'accélération d'ordre n et la simple conception de dérivations des équations (2) porte à penser que de telles discontinuités vont retentir sur les tourbillons. Inversement, il y a les agrégats tourbillonnaires qui ne peuvent exister sans engendrer des ondes; en général, les deux choses sont liées et — revenons sur cette idée — le magistral et esthétique exposé de M. Villat peut faire beaucoup pour redonner une allure tourbillonnaire aux théories ondulatoires de l'heure présente.

Les chapitres XI, XII, XIII reprennent, conformément aux travaux de M. Lichtenstein, la question de l'influence des *domaines* tourbillonnaires.

D'où des équations *intégrales* en lesquelles on reconnaît toujours les symétries du tableau (2). Les questions d'intégration deviennent ici des plus difficiles; on ne peut guère songer qu'à des méthodes d'approximations successives et l'on se sent aux limites de l'Analyse.

Les tourbillons en fluide visqueux (chapitre XIV) n'allant point sans les équations d'Oseen introduites dans le volume précédent, nous nous trouvons finalement en présence d'un immense champ de recherches dont les grandes lignes sont, dès maintenant, disposées de la manière la plus heureuse. Vraiment, on ne peut mieux terminer ces trop brèves analyses qu'en y rappelant aussi l'opinion de M. Léon Lichtenstein sur l'attrait prodigieux que l'hydromécanique peut offrir non seulement au technicien mais encore au philosophe et même au chercheur simplement épris de fantaisie. Et pour longtemps maintenant, grâce à M. Henri Villat, notre Ecole d'hydromécanique brille d'un éclat qui lui attirera, sans aucun doute, de nombreux et fervents adeptes.

A. BUHL (Toulouse).

Eugène BLOCH. — **L'ancienne et la nouvelle Théorie des Quanta.** — Un volume gr. in-8° de vi-418 pages. Prix: 90 francs. Hermann et C^{ie}. Paris, 1930.

Les développements essentiels de ce livre me ramènent aux conceptions déjà analysées, l'an dernier et ici-même, à propos des ouvrages de Fowler, Weyl, Frenkel, Wintner, Birtwistle, de Camas. M. Eugène Bloch, connaissant, citant et utilisant plusieurs de ces ouvrages, a composé des leçons élégantes et claires qui semblent même, en bien des endroits, avoir une forme définitive, tant on y est près des formes analytiques primordiales, notamment des équations canoniques. On peut donner à ces dernières équations diverses origines des plus simples; Jacobi, Hamilton, peut-être Cauchy, ne se sont pas trompés en y voyant un des aspects essentiels de la Mécanique et c'est cette manière de voir à laquelle la Mécanique ondulatoire donne, aujourd'hui, une confirmation de plus. A y regarder de près, cette Mécanique ondulatoire est l'aboutissement logique de bien des choses. C'est une mécanique de la périodicité et la périodicité s'est introduite en Mécanique Céleste avec les Méthodes nouvelles — si bien décrites et reprises par Henri Poincaré — méthodes qui, à propos du mouvement de masses ponctuelles, ne toléraient, dans les développements en séries, que des termes périodiques à chacun desquels aurait déjà pu correspondre une propagation ondulatoire. La Science s'est précisée; l'onde accompagnant tout mouvement ponctuel est apparue très simplement quand l'équation de Jacobi nous a laissé voir qu'une de ses solutions $V(x, y, z, t)$ pouvait se propager selon la conception de Huyghens et que l'équation de Schrödinger pouvait suivre, très simplement aussi, en faisant correspondre des *opérateurs* de dérivation aux composantes p_x, p_y, p_z , qui figurent dans l'expression de la demi-force vive T . C'est sans doute là qu'est le nœud essentiel du beau livre de M. Bloch (Chapitre XIV). Mais cette manière de décrire les choses n'en explique peut-être pas suffisamment le titre, ce à quoi il est aisé de remédier en reprenant l'ouvrage par le début.

L'ancienne théorie des quanta est celle des variations énergétiques simplement discontinues.

Les transformations intra-atomiques libèrent ou absorbent l'énergie par

éléments indivisibles mais ces éléments n'ont peut-être qu'un rôle *comptable*, comme les francs qui peuvent intervenir dans une opération financière sans révéler grand chose du mécanisme de l'opération. Dans la nouvelle théorie quantique, au contraire, le quantum a une individualité physique très nettement en rapport avec la nature du phénomène quantifié.

C'est ce qui est apparu, en 1905, avec les quanta de lumière d'Einstein, avec les photons d'aujourd'hui considérés comme de véritables corpuscules. C'est ainsi qu'il a fallu une nouvelle mécanique pour particules et ondes associées.

Les dernières conceptions donnent la prééminence à l'onde; il y a beaucoup moins de restrictions à imposer à celle-ci qu'au mouvement ponctuel. Nous percevons la matière par paquets d'ondes dont la vitesse, pour une même onde, peut dépasser c , vitesse de la lumière, mais non sans qu'il y ait une vitesse de groupe égale à celle de la particule matérielle et alors inférieure à c .

Toutes ces si intéressantes parties de la Science ont, pour principal substratum expérimental, l'étude des spectres. La représentation analytique de leurs apparences a conduit à utiliser les matrices hermitiennes dont la théorie a révélé soudain un accord insoupçonné avec les développements de la précédente mécanique ondulatoire.

Aussi vient-on aux théories de Heisenberg vers la fin du livre de M. Bloch.

Ce livre contient de nombreux aperçus expérimentaux, de nombreux schémas correspondant manifestement à des travaux de laboratoire; il n'est pas de ceux qui peuvent inspirer de la défiance aux physiciens.

Il se préoccupe, en plusieurs endroits, de rechercher si certains résultats de la nouvelle mécanique sont indépendants ou non des théories relativistes. Pour moi, Gravifiques et Mécaniques sont liées, *à la base*, par les mêmes identités analytico-géométriques; les mêmes transformations d'intégrales multiples peuvent conduire, d'une part, aux équations canoniques, d'autre part, par exemple, à l'électromagnétisme et c'est pourquoi je ne m'étonne pas de voir les électrons faire bon ménage avec les ondes et adopter les allures phénoménales de celles-ci.

Mais on peut évidemment rechercher, à différents stades de divers développements théoriques, ce que sont devenus les liens originels et c'est ce que M. Bloch nous montre, çà et là, avec beaucoup de sagacité.

A. BUHL (Toulouse).

Julien PACOTTE. — **Les Méthodes nouvelles en Analyse quantique.** — Un volume gr. in-8° de VIII-140 pages. Prix: 22 francs. Albert Blanchard. Paris, 1929.

Cet ouvrage, consacré encore à la Mécanique quantique et à la Mécanique ondulatoire, appelle évidemment une description analogue à la précédente. S'il est moins étendu, c'est parce qu'il se préoccupe moins de descriptions expérimentales; il fait surtout de l'Analyse, ce qui est d'ailleurs conforme au titre. Cette analyse apparaît, plus que jamais, aisée à assimiler; elle n'est rien pour les einsteiniens habitués aux difficultés très réelles et aux longueurs du Calcul différentiel absolu. Elle peut être commencée, suivant les préférences, sous des formes en apparence très différentes. Ici, nous commençons par la mécanique et les matrices d'Heisenberg. Le point de vue est tout ce qu'il y a de plus défendable; ces matrices sont intimement associées aux

transformations linéaires et aux déterminants et le Calcul différentiel absolu, préface de la Gravifique, peut être aisément considéré comme un prolongement de la théorie des déterminants.

Dans ces conditions, commencer comme Heisenberg, c'est venir aux mécaniques nouvelles comme on vient d'ordinaire à la Gravifique; c'est, en outre, beaucoup moins compliqué. L'auteur passe ensuite aux théories de Louis de Broglie et de Schrödinger et notamment aux perturbations quantiques. Tout ceci, en une centaine de pages, forme une première partie de l'exposé.

Dans une seconde partie, particulièrement originale, il s'agit d'accorder ce qui précède avec les conceptions relativistes et statistiques; c'est facile car, encore une fois, tout sort des mêmes principes, des mêmes identités fondamentales de Calcul intégral.

En prenant les choses à un stade plus développé, la Relativité dite restreinte est celle de la transformation de Lorentz qui change, en elle-même, l'équation dalembertienne de la propagation ondulatoire; dès lors si cette relativité peut se généraliser, l'équation dalembertienne doit suivre. Et elle suit avec une plasticité vraiment remarquable.

Ici M. Julien Pacotte passe en revue des conceptions particulièrement subtiles, dont certaines étaient presque oubliées mais peuvent, de nouveau, s'imposer à l'attention, justement parce qu'elles ont des correspondances en Mécanique ondulatoire. Tel est l'espace de Weyl avec son étalonnement si curieusement variable, tel est encore l'espace à cinq dimensions de Kaluza; les correspondances indiquées se ramènent surtout à des substitutions d'opérateurs. L'idée, au point de vue analytique, remonte loin et est l'une des plus profondes qui soient. Les formules stokiennes prennent naissance quand, dans un déterminant ordinaire, on remplace une rangée d'éléments par une rangée d'opérateurs de dérivation. Et, au fond, c'est cela qui fait que le courant électrique, lui-même, et les phénomènes électroniques, en général, relèvent naturellement des mécaniques nouvelles. Les ondes de Louis de Broglie prennent corps et se substituent, dans la théorie du champ électromagnétique, au courant électrique (p. 112). Entre ondes de L. de Broglie et équations de Maxwell convenablement généralisées, il y a maintenant possibilité d'existence pour des relations analogues à celles qui permirent les premières théories électromagnétiques de la lumière. Quelle audace c'était alors ! Que d'incompréhensions accablèrent Maxwell ! Que de chemin parcouru depuis !

M. Pacotte termine son exposition, si adroitement condensée, en situant la Mécanique quantique et ses origines statistiques dans l'espace fonctionnel de Hilbert. Dans cet espace les transformations canoniques prennent des physionomies géométriques simples; ce sont des affinités, des rotations, ..., si bien que, là encore, dans les premiers principes d'une géométrie suffisamment générale, on trouve les fondements d'une prodigieuse synthèse physique.

A. BUHL (Toulouse).

Maurice JANET. — **Leçons sur les Systèmes d'équations aux dérivées partielles** (Cahiers scientifiques publiés sous la direction de M. Gaston Julia; fasc. IV). — Un volume gr. in-8° de VIII-126 pages. Prix: 30 francs. Gauthier-Villars et C^{ie}. Paris, 1929.

Après avoir publié le fascicule XXI du *Mémorial des Sciences mathéma-*

tiques, M. Maurice Janet revient à un sujet où il excelle, cette nouvelle publication étant d'ailleurs la reproduction de Leçons professées, en 1926, à l'Université de Cracovie. Ce qui est en jeu, c'est essentiellement l'intégration *logique* des équations ou systèmes d'équations aux dérivées partielles par opposition avec les problèmes que pose la Physique mathématique, problèmes en lesquels il faut intégrer en satisfaisant à des conditions aux limites qui sont souvent loin de mettre en évidence la généralité de la solution cependant jugée satisfaisante.

Cette intégration logique remonte à Méray et à Riquier qui lui a consacré, en 1910, un gros volume analysé dans *L'Enseignement mathématique* (T. XII, 1910, p. 258). M. J. Drach est également à ranger parmi les intégrateurs logiciens et l'on s'aperçoit maintenant, de par les progrès des méthodes à la Méray-Riquier et des méthodes dues à M. Elie Cartan, que ces procédés tendent à se rejoindre, ce qui, sans aucun doute, démontre leur valeur.

Néanmoins, nous sommes encore là dans un domaine mathématique non encombré et où M. Maurice Janet peut évoluer à l'aise en montrant qu'il ne faut pas trouver le terrain trop aride. C'est d'abord une question de symbolisme exposée ici dans un chapitre sur le Calcul inverse de la dérivation; on étudie les compatibilités d'un système formé de dérivées, d'ordre quelconque, égales à des fonctions données des variables, au moyen d'un calcul de monomes symboliques. La notion des *caractéristiques* est un autre concept fondamental attaché aux possibilités d'intégration des systèmes; elle peut précéder les systèmes eux-mêmes. Mais ici, il n'y a nullement lieu de séparer le point de vue logique du point de vue physique, la théorie des ondes les réunissant tous deux de la manière la plus étroite.

La théorie algébrique des *modules* de formes offre encore une manière de symbolisme permettant d'aborder la question du degré de généralité de la solution d'un système d'équations aux dérivées partielles. Il y a, en tout cas, des systèmes de formes algébriquement en involution, auxquels correspondent des systèmes différentiels, qualifiés de même, qui coïncident avec ceux construits et étudiés par M. E. Cartan au moyen des formes de Pfaff.

Vraiment tout cela est difficile et même angoissant à exprimer en quelques lignes de langage ordinaire. La description par « survol » est ici à peu près impossible. La comparaison avec les formes de Pfaff *qui ont leur algèbre*, tout en étant des formes différentielles (à moins qu'on ne les qualifie de formes intégrales puisqu'elles sont faites pour être introduites sous des intégrales multiples) me semble encore ce qui conduit le plus facilement à penser qu'il pourrait bien y avoir quelque méthode d'aspect algébrique pour juger, tout au moins, des conditions de possibilité des systèmes différentiels.

Telle est la question, ou l'une des faces de la question, que discute M. Maurice Janet dans son savant exposé. Toutefois, l'impression d'abstraction ne doit pas être exagérée, car le livre se termine par une quinzaine d'exercices très abordables. Il me semble même qu'on pourrait en résoudre quelques-uns par des méthodes improvisées; raison de plus pour penser que les développements d'abord établis sont propres à codifier systématiquement nombre de résultats entre lesquels on n'avait, jusqu'ici, que des liens insuffisants.

J. HORN. — **Partielle Differentialgleichungen** (Zweite, umgearbeitete Auflage). — Un volume gr. in-8° de VIII-228 pages. Prix: Broché RM. 11, relié 12 (Göschens Lehrbücherei). Walter de Gruyter et Co. Berlin W. 10 et Leipzig, 1929.

Après la seconde édition des *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, qui date de 1927 et a été analysée ici-même, voici aussi une seconde édition des *Partielle Differentialgleichungen* dont la première a également été analysée dans *L'Enseignement mathématique* (T. XIII, 1911, p. 74). En passant de la première à la seconde édition, ces volumes sont passés de la Collection Schubert à la Collection Göschens; celui dont nous nous occupons maintenant appartient donc à cette dernière (Gruppe 1, Band 14).

Nous n'avons pas à découvrir le talent de l'auteur en les matières traitées; il est bien connu. Et il y a encore ici un bel exemple de haute science donné par un professeur d'Université technique.

Cette seconde édition ne diffère pas essentiellement de la première à cela près que des points élémentaires semblent avoir été réduits alors qu'en revanche le point de vue physique a été développé. Et cela se conçoit sans peine. Quelles prodigieuses transformations physiques depuis vingt ans!

Signalons brièvement les huit chapitres de l'ouvrage.

1. *Equations aux dérivées partielles linéaires, du second ordre, à deux variables indépendantes.*

Il s'agit des équations

$$Ar + 2Bs + Ct + Dp + Eq + Fz = 0$$

dont les coefficients sont des fonctions de x et y . Réductions. Transformations intégrales par la formule de Green.

2. *Equations hyperboliques.* Cas des cordes vibrantes. Méthodes d'approximations successives et particulièrement méthode de Riemann. Propagation ondulatoire. Cordes vibrantes et séries de Fourier.

3. *Equations intégrales linéaires.* Ces équations se placent excellemment après les sujets du chapitre 2. Dans le cas non homogène, la méthode de Fredholm, première en date, s'offre avec ses déterminants d'aspects si caractéristiques. Elle entraîne le lemme de J. Hadamard. Comparaisons habiles entre les cas homogènes et non homogènes.

4. *Problèmes aux limites pour équations différentielles linéaires ordinaires.* Etude préliminaire de l'expression

$$L(u) = \frac{d}{dx} \left(p \frac{du}{dx} \right) + qu.$$

Rôle de la fonction de Green. Equation $L(u) + \lambda ku = 0$.

5. *Problèmes aux limites pour équations aux dérivées partielles elliptiques.* Il s'agit d'abord de l'équation de Laplace $\Delta u = 0$. Potentiels logarithmiques; leurs discontinuités. Problèmes de Dirichlet et de Neumann. Equation $\Delta u + 2\pi h(x, y) = 0$. Membranes vibrantes. Troisième problème aux limites avec, sur la frontière, une condition de la forme

$$\frac{\partial v_i}{\partial n} = h(s) v_i + f(s).$$

6. *Equations paraboliques*. Ce sont les équations de la conductibilité thermique pour les conducteurs homogènes ou non. On revoit brièvement les solutions figurées par des intégrales portant sur des exponentielles quadratiques.

7. *Equations aux dérivées partielles du premier ordre avec deux variables indépendantes*. Théorèmes d'existence pour les intégrales des équations $F(x, y, z, p, q) = 0$. Méthodes d'intégration. Problème de Cauchy. Equation linéaire traitée après le cas général $F = 0$, ce qui est remarquable. Intégrale complète et intégrale générale déduite. Exemples.

8. *Equations* $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$. Généralisations des questions du chapitre précédent. Caractéristiques. Equations de Monge-Ampère et intégrales intermédiaires.

La littérature utilisée par M. J. Horn n'est pas sans faire honneur aux géomètres français. Les noms de MM. E. Picard, Ed. Goursat, J. Hadamard, sont inséparables des questions précédentes. Associés à ceux de A. R. Forsyth, D. Hilbert, A. Kneser, ..., ils témoignent de l'élévation de vues qui a présidé à l'élaboration de ce bel et très utile ouvrage.

A. BUHL (Toulouse).

T. BONNESEN. — **Les Problèmes des Isopérimètres et des Isépiphanes** (Collection de Monographies sur la Théorie des Fonctions publiée sous la direction de M. Emile Borel). — Un volume gr. in-8° de VIII-176 pages. Prix: 40 francs. Gauthier-Villars et C^{ie}. Paris, 1929.

Résoudre les problèmes indiqués par le titre de ce livre c'est démontrer que le cercle possède la plus grande aire parmi toutes les figures de même périmètre et que la sphère possède le plus grand volume parmi toutes les surfaces fermées de même superficie. On peut penser, au premier abord, qu'il ne doit pas être sans intérêt logique de chercher des démonstrations rigoureuses de ces assertions, mais que ces démonstrations doivent être assez simples et faciles à appuyer sur l'impression de bon sens qui résout immédiatement les questions précédentes. Or ceci serait une grave erreur. On est étonné, rien qu'en établissant la bibliographie du sujet, de l'étendue de celle-ci, des noms illustres qu'elle contient, bref du volume et de la qualité des efforts qu'il a fallu faire pour parvenir au but. Encore la discussion reste-t-elle ouverte en ce sens que les nombreuses méthodes employées laissent concevoir qu'on peut en trouver beaucoup d'autres qui auront aussi leur intérêt. Banach, Bernstein (F.), Blaschke, Bonnesen, Brunn (H.), Carathéodory, Cauchy, Colucci, Chisini, Crone, Doetsch, Enriques (F.), Fiedler, Frobenius, Funk, Gross, Hamel, Herglotz, Hilbert, Hjelmslev, Hurwitz, Jensen, Jordan (Ch.), Kormes, Kritikos, Kubota, Lebesgue (H.), Liebmann, Minkowski, Salkowski, Scorza, Sierpinski, Schwartz, Steiner, Study, Süss, Tonelli ont publié d'importants mémoires ou fait, à l'occasion, des remarques essentielles touchant les objets précités.

Considéré au point de vue du Calcul des variations, le sujet relève des extrema liés et montre précisément les difficultés cachées qui s'attachent à de tels extrema; à quoi ne faut-il pas s'attendre pour ceux dont la solution n'est pas indiquée, à l'avance, par l'intuition.

D'autre part, l'étude des figures convexes semble avoir engendré la notion de fonction convexe comme celle d'ensemble enveloppé ou d'ensemble

fermé et borné pouvant être contenu dans la plus petite figure convexe. Minkowski reprend la notion de distance et définit, pour deux points, un *empan*. Les unions entre concepts géométriques et concepts relatifs aux ensembles deviennent, de toutes parts, extrêmement nombreuses, ce qui pourrait déjà suffire à fixer l'attention sur les présents développements.

Le problème des isopérimètres conduit à rechercher la courbe AB, de longueur donnée, qu'il faut adjoindre au segment rectiligne AB pour obtenir l'aire maximum. M. Lebesgue cherche une figure pour laquelle $L^2 : S$ est minimum. Steiner a donné des méthodes polygonales dont l'élégance sera difficilement surpassée. Minkowski emploie des intégrales à éléments de la forme HdL . Hermann Brunn, en un remarquable théorème, associe fonction concave à fonction linéaire.

Un intéressant sujet d'étude naît encore en remarquant que plusieurs des conceptions précédentes se généralisent aisément dans l'espace tandis que, pour d'autres, la généralisation est encore à trouver. A noter que les intégrales de Minkowski sont du côté des extensions fécondes ce qui coïncide avec l'idée qu'il convient de se faire quant à l'importance, en tant et tant d'autres domaines, des éléments de la forme XdY où X et Y ont des significations *géométriques* diverses et transformables. L'appareil géométrique de Steiner conduit aussi à de curieuses conceptions spatiales.

Nous souhaitons que ces rudimentaires aperçus donnent le désir d'approfondir l'exposition si originale de M. T. Bonnesen. N'oublions pas, comme le fait M. Bonnesen lui-même, de signaler la collaboration de M. Jean Favard qui a d'ailleurs ajouté, à l'ouvrage, une curieuse Note sur « Un problème de couvercle ».

A. BUHL (Toulouse).

R. DELTHEIL. — **Erreurs et Moindres carrés.** Fascicule II, tome I du **Traité du Calcul des Probabilités et de ses applications**, publié par M. Emile BOREL, avec la collaboration de C.-V.-L. CHARLIER, R. DELTHEIL, P. DUBREIL, M. FRÉCHET, H. GALBRUN, J. HAAG, R. LAGRANGE, F. PERLIN, Ch. RISSER, P. TRAYNARD. — Un volume gr. in-8° de VIII-162 pages. Prix : 30 francs. Gauthier-Villars et C^{ie}. Paris, 1930.

Ceci est le second fascicule que rédige M. Deltheil dans le grand *Traité* dont M. Emile Borel a entrepris la publication. Le premier avait traité aux Probabilités géométriques ; il a été analysé ici-même (T. XXV, 1926, p. 135). Il n'est pas sans intérêt de remarquer que, depuis, la mise en lumière des élégants résultats de Crofton et l'appoint personnel, apporté à de telles recherches par M. Deltheil lui-même, n'ont pas été sans retentissement.

C'est ainsi que, sans sortir de *L'Enseignement Mathématique*, nous trouvons, dans notre dernier volume (T. XXVIII, 1929, p. 309) et dans les Comptes rendus du Premier Congrès des mathématiciens des pays slaves (Varsovie, 23-27 septembre 1929) l'annonce d'une communication, de M. H. Steinhaus, *Sur la portée pratique et théorique de quelques théorèmes de M. Deltheil*.

Le présent fascicule est divisé en trois parties dont la première est consacrée à la Probabilité des causes. L'exposé apparaît encore fortement teinté de géométrie et de continuité, impression qui se prolongera d'ailleurs tout naturellement avec des problèmes dans l'énoncé desquels les causes et les résultats forment deux ensembles infinis et continus. D'ailleurs, avec les

lois de probabilité à une variable et l'adoption de quelques points de vue de M. Paul Lévy, le cas de la probabilité continue, à forme élémentaire $f(x) dx$, apparaît toujours comme particulièrement plastique. Il ferait retrouver l'intégrale de Stieltjes si on ne la connaissait pas. On peut suivre, dans le problème des moments et dans d'autres, les discussions et constructions modernes concernant la notion d'intégrale, en parlant le langage de la Théorie des probabilités. Remarque analogue à propos de la relation intégrale qui lie la fonction caractéristique et la fonction des probabilités élémentaires; ces deux fonctions, dans les cas de continuité ordinaire, sont assujetties à la loi de réciprocity de Fourier qui trouve là une occasion d'être étendue avec possibilité de remonter jusqu'aux intégrales de Dirichlet. Le problème général des erreurs peut se greffer aisément sur ces prémisses en donnant, à la fonction des probabilités élémentaires, la forme exponentielle quadratique bien connue; nous arrivons à la loi de Gauss.

Aussi la deuxième partie de l'œuvre est-elle consacrée à cette loi qui vit certainement, à côté des lois exponentielles plus simples, de propriétés de symétrie que l'exponentielle ordinaire ne possède pas. Ceci se voit à propos des moments et de la fonction caractéristique de la loi de Gauss tout comme au rapport de cette loi avec la théorie des épreuves répétées. Et l'on peut continuer à juger de son caractère à peu près inéluctable dans les pénétrants chapitres que M. Deltheil consacre au Principe de la moyenne arithmétique ainsi qu'aux justifications particulièrement méthodiques qui relèvent toujours de moments ou de fonctions caractéristiques de lois probabilitaires variables.

Nous sommes ici dans des travaux récents amorcés par Tchebychef, repris par MM. Borel, P. Lévy, Fréchet. Nous connaissons les critiques de Bertrand et de Poincaré. Tout impose une même conclusion. Un Calcul de Probabilités sans loi de Gauss est aussi difficile à concevoir qu'une Physique mathématique sans exponentielles. L'exposition, très éclectique, du présent ouvrage, paraît grandement confirmer cette manière de voir.

A propos de la combinaison des observations notons encore que la méthode de la moyenne arithmétique s'étend aisément, au cas d'observations d'inégale précision, par l'attribution de *poids* aux grandeurs observées. Tout ceci n'empêche pas qu'on peut rechercher, au-delà de la loi de Gauss, mais comme une généralisation de celle-ci et non contre elle, des lois de seconde approximation. D'où, par exemple, des séries de Gram-Charlier.

Nous arrivons à la troisième partie, c'est-à-dire à la méthode des moindres carrés. C'est encore Gauss qui domine avec le *principe du moindre risque d'erreur*. Quant à la méthode elle-même, on sait qu'elle consiste en combinaisons d'équations linéaires avec recherche d'un minimum pour l'erreur quadratique moyenne; la théorie en est très simple. Mais la disposition des calculs laisse de la marge à bien des initiatives et M. Deltheil n'a pas reculé devant la construction de tableaux schématiques qui, excellente idée, sont d'abord plus réduits que ne le permettrait la pratique mais montrent nettement, en revanche, les détails de leur constitution. Ensuite, avec l'aide de M. Caubet, astronome-adjoint à l'Observatoire de Toulouse, il donne des exemples effectifs couvrant une douzaine de pages de tableaux numériques se rapportant à des déterminations de coordonnées célestes. Le livre, qui ne manque point de remarquables spéculations analytiques, se termine en rappelant qu'un art véritable peut présider à l'exécution de calculs numériques.

Ajoutons, en dernière heure, que le fait de pouvoir retrouver les généralités de la Théorie des Fonctions, dans le Calcul des Probabilités, est confirmé par les plus récents travaux. C'est ainsi que, dans ce même fascicule, *L'Enseignement mathématique* publie encore un article de M. J. Kantorowicz (Varsovie) où l'opinion précédente apparaît dès les premiers mots. Ce nous est d'ailleurs un grand plaisir que de constater qu'il y a, en Pologne, un centre d'études probabilitaires où l'on paraît travailler, dans le plus parfait accord, avec M. Emile Borel et ses si distingués collaborateurs.

A. BUHL (Toulouse).

RENÉ GARNIER. — **Cours de Mathématiques générales.** Tome I. Calcul différentiel. Géométrie. — Un volume gr. in-8° de XII-464 pages et 172 figures. Prix: 80 francs. Gauthier-Villars et C^{ie}. Paris, 1930.

Lorsque l'enseignement des Mathématiques générales a été inauguré, à la Sorbonne, il y a près de trente ans, par M. Paul Appell, on pouvait ne voir, en cette création, qu'un geste généreux fait par un grand savant en faveur de débutants et de futurs techniciens, geste qui serait répété par des successeurs d'une manière assez uniforme, d'autant plus que le dit enseignement comporte un programme très précis reproduit d'ailleurs par M. René Garnier en tête du présent livre. On aurait pu n'engendrer ainsi que des cours assez analogues. Or, premier point très remarquable, les choses ne semblent nullement prendre cette allure monotone et les continuateurs de M. Appell apportent dans l'exécution de leur tâche, quelque élémentaire qu'elle soit, divers reflets de leur talent propre, d'où un cachet généralement très personnel, d'accord avec les meilleures traditions d'originalité de l'Enseignement supérieur.

Le présent volume justifie particulièrement cette manière de voir. Il commence par les limites et la continuité; pour le futur technicien, il n'y a là rien qui ne puisse s'expliquer sur des tracés mais, dans un ordre d'idées plus pénétrant, l'exposition est faite avec un langage emprunté à la théorie des ensembles, langage qui fait pressentir, au delà des tracés, tout un monde décomposable en concepts plus subtils.

A propos de la dérivation, nous voyons que le mot *pente* a, sur une droite, sur une tangente, sur une courbe, le même sens que sur une route. La dérivée ne va évidemment pas sans considérations de limite mais, quand la notion est acquise, tout symbole de dérivation n'est plus qu'un *opérateur*, comparable, par exemple, à un radical. Excellent et très... tensoriel.

Les maxima, minima, théorèmes de Rolle et autres considérations de ce genre, n'apparaissent point comme sujets véritablement spéciaux; une bonne conception de la dérivée et tout cela coule de source.

Les nombres complexes satisfont à un *Principe de permanence* qui conservera pour eux les opérations du domaine réel. A coup sûr il ne s'agit encore que peu de fonctions analytiques mais quelle merveilleuse ouverture, sur celles-ci, n'est-elle pas dessinée par le principe en question. Le champ complexe élucide ce qui se passe le long de l'axe réel, c'est un exemple d'espace à $n + 1$ dimensions éclairant l'espace à n . Le procédé est caractéristique de la géométrie et de la physique actuelles (p. 79).

La théorie des séries vise une obtention prompte de la série de Taylor

envisagée, il est facile de le voir, tant comme instrument de calcul que comme instrument de représentation.

D'où des substitutions de séries tayloriennes en d'autres, en vue de résultats qui doivent aussi être tayloriens. D'où aussi la représentation approchée par polynômes et celle des polynômes par d'autres de degré moindre, ceci généralisant le théorème des accroissements finis; les méthodes graphiques de résolution des équations, avec étude de l'approximation numérique, suivent naturellement. Il est à peine besoin de dire qu'on a maintenant le bénéfice de l'exponentielle complexe et que celle-ci devient un nouvel instrument pour les transformations tayloriennes. Viennent ensuite les généralisations, à opérateurs aux dérivées partielles, pour le cas de plusieurs variables, et l'application immédiate, à la théorie des erreurs, de la notion de différentielle totale.

Les considérations géométriques ne vont point non plus sans remarquables originalités. Elles sont d'abord vectorielles et accompagnées, de ce fait, de nombreuses symétries *aboutissant* à celles des déterminants.

Les courbes et les surfaces du second ordre sont immédiatement rapprochées. Il y a de nombreuses et élégantes figures représentant les diverses quadriques réglées et la disposition de leurs génératrices.

La méthode vectorielle revient avec la géométrie infinitésimale, d'où l'introduction immédiate de la dérivée vectorielle. Les généralités sont relatives aux courbes gauches; ces généralités sont ensuite restreintes aux courbes planes, méthode qui a bien son intérêt en montrant, par exemple, ce qui subsiste alors des formules de Frenet et des notions générales de courbure et de contact. Et si ceci n'incite pas à un développement exagéré de la théorie des courbes planes, reconnaissons cependant que l'auteur a envisagé nombre de celles-ci tant au point de vue de la construction qu'à celui de l'enchaînement des propriétés.

Les surfaces sont traitées jusqu'aux théorèmes de Meusnier et d'Euler; elles illustrent les questions de maximum ou de minimum pour les fonctions de deux variables.

Attendons avec confiance le tome second qui doit compléter l'ouvrage; nul doute que celui-ci n'ait l'influence la plus heureuse sur les jeunes esprits avides d'appuyer leurs connaissances sur des bases mathématiques solides, commodes et modernes.

A. BUHL (Toulouse).

S. LEFSCHETZ. — **Géométrie sur les Surfaces et les Variétés algébriques.**

(Mémorial des Sciences mathématiques dirigé par Henri Villat; fasc. XL.)

— Un fascicule gr. in-8° de 66 pages. Prix: 15 francs. Gauthier-Villars & C^{ie}, Paris. 1929.

M. S. Lefschetz est ici dans un domaine où chacun reconnaît en lui un brillant spécialiste ainsi qu'un fervent disciple de M. Emile Picard. Nous lui devons, d'ailleurs, dans le même ordre d'idées, un ouvrage aussi didactique que possible sur *L'Analysis Situs et la Géométrie algébrique*, ouvrage publié dans la Collection de Monographies dirigé par M. Emile Borel et dont *L'Enseignement Mathématique* a déjà rendu compte (T. XXIII, 1923, p. 337).

En parcourant le fascicule aujourd'hui publié on a l'impression que les questions en litige ont fait, assez récemment, de grands progrès, ce qui ne

les empêche pas, à coup sûr, de receler toujours d'immenses difficultés. Mais l'allure moderne de la Théorie des Fonctions se reconnaît partout, la formule exacte perd du terrain au bénéfice des considérations topologiques. M. Emile Picard s'est habilement tenu sur les deux terrains. Henri Poincaré, dont cependant les recherches d'Analysis Situs sont célèbres, a vaillamment défendu la formule intégrale et notamment de profonds théorèmes abéliens. Les pages que M. Lefschetz consacre à ceux-ci sont vraiment remarquables. Mais une intégrale ne va pas sans champ, sans variété d'intégration, sans singularités qui sont aussi de la nature de variétés ou de sous-variétés et l'on revient fatalement à la géométrie topologique. Un signe des temps est l'introduction *explicite*, dans ces questions, du Calcul tensoriel. Nous soulignons *explicite* car l'usage implicite dudit calcul date d'époques où il ne formait pas encore un véritable corps de doctrine.

Les premières recherches de Poincaré ont fait concevoir des formules stokiennes dans l'hyperespace; les classifications de M. Picard, en ce qui concerne notamment les intégrales doubles de seconde espèce, reviennent surtout à repérer les intégrales de surfaces algébriques qui se ramènent à des intégrales de ligne conformément à une formule de Stokes à variables algébriques. Il est clair qu'aller vers les extensions de telles formules c'est aller au Calcul tensoriel. On peut même ajouter que les cas non singuliers, sont ceux des transformations d'intégrales multiples conduisant à la Physique théorique à forme gravifique. Avec des singularités, on voit apparaître une résiduation d'ordre supérieur, des discontinuités, des entiers spéciaux, ...; la théorie devient *quantique*.

Ne cherchons pas toutefois à dépasser la pensée, déjà si élevée, de l'auteur de ce brillant fascicule. Il s'agit de géométrie *algébrique* et, rien que dans le domaine algébrique, les recherches nouvelles, à poursuivre et qui nous sont indiquées par M. Lefschetz, sont de nature à passionner les plus puissants esprits. Les nombres de Betti, les congruences sur les V_3 , le groupe d'homotopie de Poincaré, les variétés uniformisables par fonctions automorphes ou analogues, les intégrales multiples sans périodes, ..., sont des exemples de sujets ardu rendus cependant beaucoup plus abordables par le présent et élégant exposé.

A. BUHL (Toulouse).

A. SAINTE-LAGUË. — **Géométrie de Situation et Jeux.** (Mémorial des Sciences mathématiques dirigé par Henri Villat; fasc. XLI.) — Un fascicule gr. in-8° de 75 pages. Prix: 15 fr. Gauthier-Villars & C^{ie}, Paris. 1929.

Ceci paraît être une suite obligée du fascicule 18 déjà publié, dans le « Mémorial », par M. Sainte Laguë sur *Les Réseaux (ou Graphes)*. Cependant celui d'aujourd'hui peut être étudié indépendamment du précédent. Ici la Géométrie de situation confine aux jeux. Est-ce à dire que nous pouvons aller, en jouant, de l'un à l'autre des nouveaux exposés, dus à M. S. Lefschetz et à M. E. Cartan, exposés qui encadrent celui-ci sans, peut-être, que cette disposition soit due au hasard? Je n'oserais l'affirmer. Il faut sans doute conclure, plus sérieusement, à la très grande plasticité de l'Analysis situs, à son rôle ordonnateur, de plus en plus imposé, et à un indéniable intérêt qui permet à cette discipline de fournir des jeux qui, s'ils peuvent parfois servir de délassément, n'en ont pas moins, le plus souvent, des théories fort compliquées. De nombreux et illustres mathématiciens ont attaché

leur nom à ces questions, comme en témoigne ici une bibliographie terminale qui ne comprend pas moins de 348 citations. Descartes, Euler, Cauchy se sont occupés des configurations polyédriques, Cayley et Maxwell ont cherché une relation entre les nombres de montagnes, de vallées, de cols appartenant à un paysage mais, à propos de géographie, c'est le problème du coloriage des cartes qui semble avoir engendré le plus d'efforts. Le théorème des quatre couleurs suffisantes, malgré de Morgan, Cayley, Frédéric et Francis Guthrie, Tait, Kempe, ..., recélait des difficultés insoupçonnées révélées par Petersen, Veblen, Heawood, Sainte-Laguë, Birkhoff, Errera, Reynolds, ...; les difficultés augmentent encore pour les cartes sphériques, ou toriques simples, ou toriques à p trous, ou unilatères.

Les jeux linéaires partent des traversées (type loup, chèvre et chou), des décompositions de trains, des piles de monnaie à composer suivant certaines règles, des files de crapauds et de grenouilles qui se rencontrent en un étroit sentier et cependant continuent leur chemin par de certains bonds. Puis nous ne pouvons que nommer la Tour d'Hanoï, le Baguenaudier, le Fan-Tan, les Treize quilles, la Tchouka. Les jeux circulaires sont naturellement plus symétriques. Les problèmes de Josèphe et de Caligula déciment une assemblée circulaire de façon préconçue; on peut rapprocher de là les rondes d'enfants, les ménages à placer galamment à table, les promenades, les quinze demoiselles.

Sur les échiquiers, on joue aux échecs, au Trafalgar, au Halma, ...; les jeux de situation proprement dits où l'on doit former certains alignements, certaines figures parfois spatiales sont le reversi, le Go-Bang, les marelles, les jonctions, l'X, la Croix-en-quatre, les cubes. Terminons sur le jeu icosien proposé par Hamilton. Comment ne pas croire, en écrivant ce dernier et illustre nom, à la valeur des considérations qui conduisent jusqu'à lui et qui sont d'ailleurs fort élégamment présentées par M. Sainte-Laguë.

A. BUHL (Toulouse).

Elie CARTAN. — **La Théorie des Groupes finis et continus et l'Analysis Situs.**

(Mémorial des Sciences mathématiques dirigé par Henri Villat; fasc. XLII.) — Un fascicule gr. in-8° de 62 pages. Prix: 15 fr. Gauthier-Villars & C^{ie}, Paris. 1930.

La Théorie des Fonctions, telle que l'entendent les ensemblistes, est, sans doute, la vraie théorie. Elle gagne du terrain partout en dépassant, de beaucoup, la notion de calcul et le concept de formule. La Théorie des Groupes emboîte le pas. Les variables mêmes, transformées par le groupe, étaient déjà passées au second plan, au bénéfice des espaces paramétriques; leur rôle doit encore être repris, dans les groupes de Lie, du fait que ceux-ci sont construits *localement*, au voisinage de la transformation identique, chose nettement visible sur les développements à structure taylorienne ou exponentielle qui étaient, pour le grand géomètre norvégien, des développements canoniques. De plus le groupe qui s'écrit, se formule explicitement, est presque un mythe en dehors des groupes linéaires (ceux-ci soulevant déjà nombre de questions redoutables) ou de leurs isomorphismes immédiats. Restait, à partir de ces domaines incomplets, à rechercher, de proche en proche, de voisinage en voisinage, des méthodes d'extension relevant surtout de l'Analysis Situs et de la Théorie des Ensembles. Combien il est

remarquable de voir M. Elie Cartan, lui-même, ouvrir la voie nouvelle aussi aisément que des géomètres plus jeunes tels M. H. Weyl. M. Cartan est cependant le prodigieux calculateur de la Théorie des Groupes; quels patients et prodigieux monuments de transformations algébriques explicites il a bâtis en de longs et nombreux mémoires amorcés par une thèse déjà magnifique! Un autre se serait tenu à ce point de vue, suivant peut-être d'un œil mélancolique les méthodes nouvelles. M. Cartan précède maintenant celles-ci. En ce fascicule il part des groupes *abstrait*s, définis comme contenant le *produit* AB quand ils contiennent les éléments A et B. On peut déjà concevoir des *espaces* possédant une *homogénéité* précisément parce que le jeu des groupes précédents y est possible. Les groupes de Lie ne sont alors que des cas particuliers relevant de considérations paramétriques, bien connues, susceptibles de se traduire par des équations différentielles. Le troisième théorème de Lie appelle particulièrement des efforts consolidateurs. La notion de groupe *clos* est fondamentale dans ces considérations où peuvent n'intervenir qu'un nombre fini de voisinages.

Les espaces riemanniens symétriques ont des symétries qui conservent leur métrique. Un tel espace admet un groupe continu transitif de transformations isométriques. Faut-il rappeler que les variétés riemanniennes se sont rapprochées des groupes de par les progrès et les nécessités de la Physique théorique. Dans cette dernière branche de la Science, le troisième théorème de Lie admet des généralisations permettant, par exemple, la Théorie d'Einstein de janvier 1929. Et comme toutes ces généralisations, loin de se clore sur elles-mêmes, font apparaître des horizons de plus en plus vastes, nous marchons vraisemblablement à une Physique dont les cadres mathématiques auront une ampleur tendant toujours à dépasser ce qui est soupçonné, en dernière heure, par les plus puissants esprits.

A. BUHL (Toulouse).

Charles FABRY et H. BUISSON. — **L'Absorption des radiations dans la haute atmosphère.** (Mémorial des Sciences physiques dirigé par Henri Villat et Jean Villey; fasc. XI.) — Un fascicule gr. in-8° de 64 pages. Prix: 15 francs. Gauthier-Villars & C^{ie}, Paris. 1930.

Il s'agit de la brusque disparition du spectre solaire vers l'ultra-violet. D'une part la question semble assez limitée car, grâce maintenant à de nombreux travaux, parmi lesquels ceux des auteurs de ce fascicule sont de première importance, on sait que l'absorption dans la haute atmosphère est due à une cause unique ou, du moins, de beaucoup prépondérante: la présence de l'ozone. D'autre part il n'y a guère là qu'une limitation de principe car les causes perturbatrices, qui tendent à influencer sur le fait unique, sont si nombreuses que les choses ne sont point sans une extraordinaire complication expérimentale. Le présent exposé a précisément pour but de montrer comment, au milieu de toutes ces difficultés, on peut cependant toujours retrouver le fil conducteur qui mène à l'action principale.

L'absorption proprement dite ne va évidemment pas sans quelques formules préliminaires du type exponentiel; au point de vue physique elle est surtout compliquée de diffusion, phénomène beaucoup plus complexe que l'absorption vraie et qui se produit dans les gaz les plus purs uniquement de par leur constitution moléculaire.

Dès que l'on commence à soupçonner le rôle de l'ozone, il faut faire une étude spéciale et très serrée des propriétés spectrales de ce corps. Un observateur célèbre a attribué à Sirius tout un ensemble de bandes telluriques. En ce qui concerne le Soleil, une étude d'absorption peut, dans l'espace d'une seule journée, donner une suite continue de bons résultats, de par la variation, de l'épaisseur atmosphérique traversée, avec la hauteur de l'astre. Les questions concernant la couleur et la luminosité du ciel sont évidemment très voisines des précédentes; faut-il rappeler qu'elles ont donné lieu à des hypothèses extrêmement étranges, pour ne pas dire plus.

Quant au dosage de l'ozone et surtout à sa formation dans la haute atmosphère, on est en présence d'hypothèses remarquables. Un bombardement électronique du Soleil changerait O_2 en O_3 . Finalement toutes ces recherches pourraient aboutir à des conclusions concernant la climatologie; ce serait peu de chose à côté de l'épuration des analyses spectrales célestes mais ce serait encore beaucoup pour l'orientation de considérations, souvent imprécises, concernant la pluie et le beau temps.

A. BUHL (Toulouse).

J. PÉRÈS. — **Les Sciences exactes.** Troisième fascicule de *La Civilisation européenne*. Tome XIII d'une *Histoire du Monde* publiée sous la direction de M. E. Cavaignac. — Un volume in-8° de 196 pages. Prix: 25 francs. E. de Boccard. Paris, 1930.

L'Histoire des Sciences connaît un heureux regain d'actualité. Après la réédition d'un prodigieux volume de Paul Tannery et le magistral discours de M. Emile Picard, signalés plus haut, nous sommes maintenant en présence d'un lumineux exposé concernant encore les sciences exactes, exposé qui n'est qu'un fragment du tome treizième d'une vaste *Histoire du Monde*. Mais ce fragment est l'œuvre très personnelle de M. Pérès, il se distingue nettement des fascicules voisins, concernant les arts, la musique, la chimie, ... dus à d'autres auteurs; bref, l'œuvre, qui nous intéresse ici, peut être lue et étudiée isolément et non sans révéler un charme aussi pénétrant qu'original. Ce n'est pas par hasard que nous la rapprochons de celle de Paul Tannery. On peut se demander, très sincèrement, si des exposés historiques, faits presque exclusivement en langage ordinaire, peuvent avoir quelque valeur quand il s'agit de mathématiques. Or, comme le dit très explicitement M. Pérès (p. 164), une réponse affirmative n'est pas douteuse et les conditions d'une telle synthèse ont justement été précisées, d'une façon que l'on peut dire définitive, par le maître français de l'histoire des Sciences: Paul Tannery. On peut donner une haute idée de l'activité mathématique à des esprits élevés cultivant cependant d'autres régions. Bien plus ces esprits semblent portés naturellement à penser ainsi et manifestent spontanément des regrets quant à leur non pénétration dans le véritable domaine des nombres et des symboles. Enfin une exposition délicate et aussi bien enchaînée que celle présentée aujourd'hui par M. Pérès ne peut que renforcer la thèse de Paul Tannery et augmenter les regrets précédents.

Cette exposition débute par la Science grecque au quadruple point de vue de la science des nombres, de la géométrie, de l'algèbre et du calcul infinitésimal: sophismes de Zénon, recours confus mais certains à la notion de limite, intégrations à la manière d'Archimède. On sait que l'astronomie

hellène n'est pas moins remarquable. Une curieuse liaison entre Diophante et Viète nous mène au Moyen-Age. L'influence arabe est étudiée d'une manière particulièrement profonde.

Les Arabes furent plutôt d'utiles intermédiaires que de véritables créateurs mais leur rôle original est cependant certain en nombre de problèmes; le moins qu'on puisse dire est qu'ils perfectionnèrent *l'art du calcul*.

Le Moyen-Age ne manque point d'extraordinaires curiosités telles que les démonstrations augustinienne de l'existence de Dieu. Les mécaniciens y prennent une physionomie propre, tels Jean Buridan. Les algébristes, tels Tartaglia, mettent leur méthode en vers. Ce ne sont là, à coup sûr, que des à-côtés de la science véritable mais combien suggestifs. La physionomie scientifique moderne commence à se mieux dessiner avec Copernic, Képler et Galilée; elle s'accuse définitivement avec Fermat et Descartes. Newton, Leibnitz, Euler sont encore à méditer maintenant dans les circonstances les plus courantes. Lagrange, Laplace, Legendre ouvrent le XIX^e siècle où s'opposent, de manière si intéressante, l'école française et l'école allemande. De part et d'autre, des géants, Cauchy et Riemann, par exemple, ce dernier tendant véritablement à renouveler la géométrie avec les espaces qui ont conservé son nom et supportent les théories d'Einstein. Puis viennent Lie et les groupes, les analystes modernes, les ensemblistes, les fonctionnalistes, ..., ce qui défie toute description brève.

Les conclusions sont franches. M. Pérès s'élève contre le réalisme utilitaire. « Il peut compromettre toute manifestation libre et désintéressée de la « pensée. En ce qui concerne spécialement les Sciences, ce serait une singulière illusion que de les croire gardées par leur valeur pratique: il est bien « trop facile d'en séparer tout ce qui a un intérêt technique immédiat et de « laisser tomber le reste. Mauvais calcul, sans doute, mais dont le désavantage ne deviendrait évident qu'à longue échéance. Les vues utilitaires ne « vont pas si loin. » (p. 191).

On ne saurait trop féliciter l'auteur de ces lignes énergiques d'autant plus qu'il existe des universitaires qui se sont déjà essayés au jeu de séparation dont il s'agit. Et, tout au long, le présent volume est un ardent plaidoyer en faveur des sublimes harmonies dont la base essentielle ne relève que de la Pensée.

A. BUHL (Toulouse).

N. ABRAMESCO. — **Lectziuni de Geometria Analitică.** Préface de G. Tzitzéica. — Un volume gr. in-8° de VIII-620 pages. Prix: 535 Lei. Institutul de Arte grafice « Ardealul ». Cluj. 1927.

Le titre de ce bel ouvrage, titre dont nous ne reproduisons ici que les premiers mots, indique qu'il ne s'agit pas seulement de Géométrie analytique mais aussi d'une Introduction à la Géométrie non-euclidienne et de Notions de Géométrie vectorielle.

M. N. Abramesco dédie respectueusement cette œuvre à M. G. Tzitzéica. Le Maître remercie en insistant sur l'enthousiasme naturellement soulevé par l'exposition des questions précédentes et rien ne semble plus juste, tant, à l'heure actuelle, un enseignement classique peut être imprégné de beautés d'ordre supérieur quand le professeur est un homme d'élite, un véritable savant.

La Géométrie analytique proprement dite occupe ici 461 pages avec plusieurs centaines de figures dont beaucoup sont d'une originalité donnant, tout de suite, l'envie de prendre connaissance de l'analyse génératrice. A côté des courbes usuelles, il y en a beaucoup d'autres excitant la curiosité à simple vue. De même, dans les cas spatiaux, les différents aspects des quadriques sont révélés sur d'élégants croquis à effets de perspective très réussis. L'ensemble des notions fondamentales est très complet. Après les pôles et les polaires, nous trouvons les théorèmes de Pascal et de Brianchon. Plus loin viennent les transformations géométriques avec les systèmes de coordonnées qui s'y associent de manière particulièrement naturelle, puis le rôle des éléments imaginaires. Dans le cas des quadriques, il faut signaler une intéressante théorie des focales très simplement suivie de celle des coordonnées elliptiques.

Le livre devient prodigieusement intéressant en les pages (462-539) consacrées à la Géométrie non-euclidienne. L'homographie et le rapport anharmonique jouent alors un rôle particulièrement primordial et profond bientôt lié aux recherches de Laguerre et aux génératrices imaginaires de la sphère. D'où, très naturellement, la Géométrie de Cayley avec son analyse assez semblable à celle de la théorie des pôles et des plans polaires, avec sa trigonométrie à caractère sphérique ou hyperbolique et finalement avec ses interprétations euclidiennes, ses représentations conformes appartenant au groupe homographique et conduisant aux images fuchsiennes. Tout ceci est très imprégné d'esprit français et M. Abramesco cite Appell, Barbarin, Bouligand, Cartan, Darboux, ..., à côté de Bonola, Carslaw, Klein, Mac Leod, Mansion.

La Géométrie vectorielle (p. 540-620) se recommande de Hamilton, Willard Gibbs, Heaviside, Grassmann et d'auteurs modernes tels Bouligand, Bricard, Burali-Forti et Marcolongo, Châtelet et Kampé de Fériet, Coffin, Guiot, Lafay, Tresse, Silberstein. Les formules vectorielles proprement dites font habilement ressortir les symétries des ensembles de formules ordinaires qu'elles remplacent. Les déterminants concourent à ce rapprochement. Les considérations de courbure gardent leur caractère intuitif.

Le rapprochement de la Géométrie non euclidienne et de la Géométrie vectorielle est bien digne des temps. Les non-euclidiens ont semblé, pendant longtemps, cultiver quelque transcendante abstraction cependant que les vectorialistes se rapprochaient plutôt des praticiens en leur offrant des méthodes de calcul réduites; c'est du moins là un but souvent indiqué, bien que les méthodes vectorielles soient autre chose qu'un ensemble de recettes utilitaires. Mais aujourd'hui il n'y a plus lieu d'épiloguer sur de telles distinctions; il y a une Géométrie générale qui doit pouvoir être, à la fois, non-euclidienne et vectorielle. Les *Leçons* de M. Abramesco le prouvent surabondamment.

Ajoutons que, si ce bel enseignement, fait à l'Université de Cluj, est tout naturellement rédigé dans la langue du pays, celle-ci, éclaircie d'ailleurs par les formules, semble différer bien peu du français ou, plus généralement, des langues à origine latine immédiate. L'œuvre peut donc avoir un véritable retentissement mondial. Elle fait partie de ces grandes manifestations mathématiques qui honorent actuellement la Roumanie, telles le Premier Congrès des Mathématiciens roumains signalé plus haut (p. 159),

A. BUHL (Toulouse).

G. PAPELIER. — **Éléments de Trigonométrie sphérique.** — Un volume in-8° de 166 pages. Prix: 20 francs. Vuibert. Paris. 1930.

L'honorariat n'empêche pas le savant et délicat professeur qu'a toujours été M. Papelier d'écrire des pages appelées à jouer un excellent rôle pédagogique. Il semble même qu'ici la pensée de l'auteur soit particulièrement facile à mettre en évidence. La trigonométrie sphérique n'est certainement pas celle qui s'impose en premier lieu, dans l'ordre élémentaire des choses, mais c'est elle qui a le caractère trigonométrique parfait.

Il n'y a guère lieu de chercher à perfectionner les études de trigonométrie rectiligne en restant toujours dans le domaine rectiligne; la perfection et les ouvertures sur beaucoup d'extensions sont dans le domaine sphérique.

Le présent ouvrage est disposé comme un traité de trigonométrie rectiligne; la formule fondamentale est

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

Toutefois le néophyte attentif sera frappé tout de suite d'une nouveauté essentielle constituée par la nécessité de pouvoir disposer, dès le début, de la notion d'aire ou de celle d'excès sphérique. Les formules de Delambre et les analogies de Néper viennent rapidement montrer la richesse du sujet. Ces points de départ suffisent à la logique de ce sujet; ils en donnent les symétries et les conditions d'existence. Viennent alors les résolutions proprement dites, en commençant par les triangles rectangles, puis les théories des cercles inscrit, exinscrits et circonscrit. Les médianes, les bissectrices, les hauteurs, les théorèmes de Ménélaüs et de Céva sont prétextes à d'élégants développements ayant d'ailleurs toujours quelque chose de plus intéressant sur la sphère que sur le plan. Cette dernière impression non seulement s'accroît mais domine dans un chapitre spécialement consacré à l'excès sphérique. Là se trouve la très jolie formule de L'Huilier (avec trois démonstrations), une expression de $\cos E$ par une sorte d'analogie des cosinus (p. 115), les théorèmes de Gudermann et de Lexell, où interviennent des triangles à aire constante. La puissance sphérique, l'axe radical, le quadrilatère sphérique, le volume du tétraèdre, la sphère circonscrite à celui-ci, quelques aperçus sur les polyèdres réguliers, des cas spéciaux de résolution triangulaire conduisent à une fin enrichie de nombreux exercices constituant tous de jolis compléments. Tout en restant élémentaire, M. Papelier vient de faire beaucoup pour la sphérique.

A. BUHL (Toulouse).

R. THIRY. — **Éléments de Mathématiques financières.** Opérations à long terme. — Un volume in-8° de VIII-92 pages. Prix: 16 francs. Vuibert, Paris. 1930.

Excellent petit ouvrage très pratique et susceptible cependant d'intéresser les mathématiciens qui y trouveront partout de la croissance exponentielle. Mais je me hâte d'ajouter, pour ne pas faire à M. Thiry un tort immérité, qu'il ne paraît nullement tenir à parler ce langage. Au contraire, il s'attache à être aussi élémentaire que possible et, dans un Appendice de dix pages, il nous présente les rudiments mathématiques nécessaires à la compréhension du livre. Cet Appendice, pour beaucoup, sera une Introduction.

Il s'agit d'un Cours professé à l'Institut d'Enseignement commercial supérieur de Strasbourg. L'intérêt et l'escompte servent naturellement de points de départ. Les amortissements, les rentes, les emprunts, offrent des problèmes un peu plus complexes en lesquels la formule fait excellemment ressortir des symétries parfois un peu arrondies mais qui augmentent la portée pratique des raisonnements. Il y a, fort heureusement, de belles opérations financières et la confiance du public est un hommage, au moins confus, à cette beauté révélée, de façon précise, en les formules et les graphiques de M. Thiry.

Plusieurs tables numériques terminent l'exposé. Non seulement elles faciliteront beaucoup de calculs, tels les calculs d'annuité, mais, examinées sommairement, hors de toute idée d'application immédiate, elles donneront de précieuses indications sur la variation financière d'une somme prêtée, placée, empruntée; la table fait immédiatement vivre la formule et finalement impose le rôle générateur de celle-ci.

M. R. Thiry a cultivé les hautes régions de la Science, notamment de la Physique théorique. M. H. Villat, dans ses ouvrages d'hydrodynamique, le cite constamment. Il a eu le grand honneur d'ajouter un cinquième volume au *Traité de Mécanique* de M. P. Appell. La présente production est bien le cas de l'ouvrage élémentaire excellemment écrit par un savant.

A. BUHL (Toulouse).

LOUIS GÉRARD. — **Problème de Malfatti. Pendule de Foucault. Questions diverses.** — Une brochure in-8° de 64 pages. Prix: 8 francs. Vuibert, Paris. 1929.

Il s'agit évidemment de questions disparates sur lesquelles un professeur a été conduit à réfléchir sans pouvoir en faire un sujet unique mais en développant partout les mêmes habitudes méthodiques. L'intérêt est, à peu près, celui d'un recueil d'exercices; il sera apprécié par ceux qui cherchent d'élégants résultats en dehors des longs exposés.

Le Problème de Malfatti est un problème de cercles tangents à algèbre indéfiniment renouvelable. Les calculs de π et de e sont repris à partir d'un développement, en fraction continue, donné par Legendre pour la tangente d'un nombre rationnel. Une question de courants électriques donne d'intéressants déterminants et même une équation caractéristique. Vingt-trois postulats sont réunis à propos des nombres réels ou complexes.

Les questions pendulaires s'inspirent de Puiseux et d'Halphen. J'omets d'autres sujets de moindre importance bien que les plus simples ne soient jamais dépourvus d'élégance.

A. BUHL (Toulouse).

Aladar ERRETH. — **Die Aberration und die Geschwindigkeit des Lichtstrahles.** — Une brochure de 48 pages. Druck der Athenaeum A.-G., Budapest. 1929.

Cet exposé semble revenir sur le sujet, maintenant un peu désuet, de la Relativité restreinte. Mais l'auteur y apporte des regains d'imagination. L'aberration est analysée avec de la pluie tombant dans une cheminée plus ou moins inclinée et fixée à un wagon. Puis voici les histoires d'un

nageur contrarié ou aidé par le courant du Danube, d'amis qui vont, viennent et s'offrent des cigarettes dans un wagon-restaurant, le tout au bénéfice de la notion de système de référence. Une locomotive parcourt, en une heure, un rayon de cercle de 60 kilomètres pendant que le cercle est entraîné; différents observateurs se contredisent sur la direction du voyage. A la brochure est adjoint un petit instrument de carton, fort bien construit, qui représente des canons faisant feu autour d'un même centre et vers une circonférence concentrique. Qu'arrive-t-il si les canons sont, dans leur ensemble, animés d'un mouvement de translation? Après avoir ingénieusement discuté ces questions et quelques autres du même genre, l'auteur passe à des considérations algébrico-cinématiques qui sont celles de la transformation de Lorentz. L'ensemble est présenté de façon amusante et digne de succès. D'ailleurs cette brochure allemande, étant traduite du hongrois, apparaît comme une manière de seconde édition. En fin de compte, elle a bien son originalité.

A. BUHL (Toulouse).

Edmund LANDAU. — **Grundlagen der Analysis** (Das Rechnen mit ganzen, rationalen, irrationalen, komplexen Zahlen). — Un volume gr. in 8° de xiv et 134 pages; broché M. 8.60, relié M. 9.80; Akademische Verlagsgesellschaft M.B.H., Leipzig, 1930.

Dans les cours de calcul infinitésimal de nos Facultés des sciences on n'a pas toujours le temps de faire une étude approfondie des fondements de l'analyse. On se borne le plus souvent à donner une idée des conceptions de Dedekind et d'Hamilton, mais il est bien rare qu'on aborde l'axiomatique des nombres entiers et rationnels.

Certes, dans quelques grands traités cette introduction à l'analyse est exposée avec une certaine ampleur, mais il n'existait pas jusqu'à présent de livre consacré uniquement à cette théorie. L'ouvrage de M. Landau vient donc combler une lacune.

Quels sont les axiomes à partir desquels l'ensemble des nombres réels et imaginaires se construit de la manière la plus simple et la plus rapide? M. Landau, et l'on ne peut que l'approuver, part des cinq axiomes de Peano qui lui fournissent l'ensemble des nombres naturels. C'est à l'étude de ces nombres et des premières opérations arithmétiques, l'addition et la multiplication, qu'est consacré le chapitre 1.

Une première difficulté se présente ici, dans la définition de l'addition d'après Peano. Cette définition repose implicitement sur le principe d'induction complète et il pourrait sembler à première vue qu'elle est lacunaire. Il n'en est rien en réalité et M. Landau le prouve à l'aide d'un raisonnement ingénieux qui lui a été communiqué récemment par M. Kalmár.

Une difficulté d'un autre genre pourrait encore arrêter un débutant au commencement du premier chapitre: M. Landau se sert des nombres 1, 2, ... à la première page du livre, bien que l'ensemble des nombres naturels ne soit défini qu'à la page suivante. Se trouverait-on en présence d'une pétition de principe? M. Landau, qui a prévu cette objection, fait remarquer avec raison, que ces nombres 1, 2, ... ne sont que des symboles qu'il suffirait de remplacer par des noms quelconques pour que la pétition de principe disparaisse.

Dans le chapitre 2 l'auteur introduit les fractions et les nombres ration-

nels, le chapitre 3 traite des coupures, le chapitre 4 des nombres réels et le chapitre 5 des nombres complexes. Un lecteur qui aura étudié attentivement le premier chapitre du livre, n'aura du reste aucune difficulté à lire les quatre qui suivent. Il y retrouvera la même concision, la même rigueur, le même enchaînement impeccable de raisonnements précis. Je voudrais pourtant signaler quelques particularités qui pourraient surprendre un lecteur qui s'est déjà occupé de ces problèmes. Pour M. Landau deux fractions ne sont égales que lorsqu'elles sont identiques; deux fractions telles que $\frac{2}{3}$ et $\frac{4}{6}$, égales au sens ordinaire du mot, sont dites équivalentes, et il entend par nombre rationnel non pas une fraction telle que $\frac{x}{y}$, mais l'ensemble de toutes les fractions équivalentes à $\frac{x}{y}$. Dans la définition de la coupure il s'écarte de Dedekind. Avec Russell, Peano et, si je ne me trompe, Pasch, il entend par coupure non pas une séparation de l'ensemble des nombres rationnels en deux classes, mais la classe inférieure même, supposée sans dernier élément. Une coupure est donc un ensemble d'ensembles ou un ensemble de classes. Toutes ces définitions ont des avantages considérables.

Le livre de M. Landau est écrit dans ce style concis que l'auteur lui-même appelle « Telegrammstil », mais qui dans ce volume est à sa place.

Je recommande cet excellent petit livre non seulement aux étudiants de nos Universités, mais aussi à tous ceux qui enseignent les mathématiques. Un maître qui aura lu le volume de M. Landau, continuera encore, s'il s'adresse à des enfants, à se servir de l'image, qu'ici on cherche à bannir, il fera encore appel à l'intuition, qu'ici on cherche à écarter, mais les choses élémentaires qu'il enseignera lui apparaîtront sous leur vrai jour.

D. MIRIMANOFF (Genève).

E. G. PHILLIPS. — **A Course of Analysis.** — Un vol. in-8° de 361 pages et 35 fig.; 16 Sh; Cambridge University Press, 1930.

L'ouvrage s'adresse aux étudiants avancés, à ceux qu'en Angleterre on désigne sous le nom de « Honour students ». Il correspond aux leçons professées par l'auteur à l'University College of North Wales, à Bangor.

Cette introduction à l'Analyse est limitée aux objets suivants: Les notions de nombres, de limites et de continuité. — Calcul différentiel. — Séries. — Inégalités. — Calcul intégral. — Extensions et applications du calcul intégral. — Fonctions de plusieurs variables. — Fonctions implicites. — Intégrales doubles. — Intégrales triples. La notion d'aire. — Séries entières. — Chaque chapitre se termine par de nombreux exercices.

Comparé aux traités de langue française, l'exposé de M. Phillips se rapproche du premier volume du Cours d'Analyse de Ch. de la Vallée Poussin dont il n'existe pas d'équivalent dans les traités anglais.

P. BRUNET. — **Maupertuis. I. Etude biographique, II. L'œuvre et sa place dans la pensée scientifique et philosophique du XVIII^e siècle.** — Deux vol. in-8° de 199 et 487 pages; Fr. 75.— les deux volumes; Librairie scientifique Albert Blanchard, Paris, 1929.

Les deux volumes que M. Pierre Brunet vient de consacrer à Maupertuis (1698-1759) apportent une importante contribution à l'histoire de la pensée

scientifique et philosophique du XVIII^e siècle. Avant d'aborder l'examen méthodique des opinions scientifiques de Maupertuis, l'auteur a estimé qu'il était indispensable de connaître la vie du grand géomètre, ses relations avec les savants de son époque, ses nombreux voyages. Chacune des œuvres se trouve ainsi d'abord signalée dans sa place chronologique. C'est l'objet du premier volume.

Dans le second, il examine successivement les recherches de Maupertuis sur les courbes planes, ses travaux astronomiques et géodésiques, ses contributions à la mécanique et à la physique, ainsi que ses travaux d'une remarquable originalité en biologie sur la génération et sur l'hérédité. La dernière partie est consacrée au philosophe; elle comprend trois chapitres: L'épistémologie. — La Matière et la Pensée. — La théologie naturelle et le problème moral.

Cette énumération très rapide montre quelle est l'étendue de l'œuvre de Maupertuis. C'est précisément cette diversité qui permet à l'auteur de donner un aperçu de la pensée scientifique et philosophique du XVIII^e siècle. Dans sa conclusion sur Maupertuis, il écrit en terminant: « Son esprit est, pour ainsi dire, une image de cette époque, pour laquelle l'Encyclopédie fût un idéal et restera un symbole ».

BERNARD BOLZANO'S SCHRIFTEN herausgegeben von der königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften in Prag. Band I: **Funktionenlehre** herausgegeben u. mit Anmerkungen versehen von Dr. Karel RYCHLIK. — Un vol. in-4° de 183 pages. Prague, 1930.

En examinant les manuscrits de Bolzano déposés à la Bibliothèque nationale de Vienne, M. JASEK, professeur à Pilsen, a découvert, en 1921, que le savant mathématicien tchèque possédait déjà un exemple d'une fonction continue qui n'est dérivable pour aucune valeur de la variable, alors que l'exemple donné par Weierstrass n'est venu que plus de trente ans plus tard. Depuis la découverte de Jasek la fonction de Bolzano a donné lieu à d'intéressantes recherches. C'est ainsi que les mathématiciens ont porté de nouveau leur attention sur les travaux de l'auteur des « Paradoxien des Unendlichen ». Ils sauront gré à la Société royale des Sciences de Prague d'avoir entrepris la publication des œuvres de Bernard Bolzano (1781-1848).

La commission chargée de ce travail a fait établir un catalogue des manuscrits déposés dans les bibliothèques nationales de Prague et de Vienne. Elle envisage aussi la question de faire une place à la correspondance scientifique de Bolzano.

Ce premier volume débute par une intéressante Préface rédigée par le Prof. K. PETR. Il est entièrement consacré à l'ouvrage resté à l'état de manuscrit et intitulé « Funktionenlehre » et qui devait faire partie d'un ouvrage plus important « Grössenlehre ». Cette introduction à la théorie des fonctions ne manquera pas d'intéresser tous ceux qui s'occupent des fondements de l'analyse. Elle a été revue et annotée avec soin par le Prof. K. RYCHLIK, de l'Ecole technique supérieure de Prague. On y trouvera précisément la fonction de Bolzano dont il a été question plus haut.

Cet ouvrage est dédié au Président de la République tchécoslovaque, T. G. MASARYK, en raison de l'intérêt tout particulier que l'éminent homme d'Etat a témoigné à la publication des travaux de Bolzano.

H. F.

Richard DEDEKIND. — **Gesammelte mathematische Werke.** Herausgegeben von R. FRICKE, E. NÖTHER et Ö. ÖRE. Erster Band, mit einem Bildnis Dedekinds. — Un vol. in-8° de 397 pages; broché, RM. 30.—; relié, RM. 32.50; jusqu'au 30 septembre 1930 les souscripteurs à l'ensemble des trois volumes bénéficient d'une réduction de 20%; Friedr. Vieweg & Sohn, A. G., Braunschweig, 1930.

On sait l'influence considérable qu'ont exercé les travaux de Dedekind sur le développement moderne de la théorie des nombres. Disséminées dans un grand nombre de revues, ses recherches étaient d'un accès souvent très difficile, aussi faut-il être reconnaissant à M^{lle} Emmy NOETHER et à MM. Robert FRICKE et Oestlin OERE d'avoir entrepris la publication des œuvres complètes de l'illustre mathématicien Richard Dedekind, décédé dans sa ville natale, à Brunswick, le 12 février 1916, dans sa 85^{me} année.

Les tomes I et II comprendront les mémoires de Dedekind publiés dans leur ordre chronologique. Dans le troisième tome seront réunis les mémoires célèbres intitulés « Stetigkeit und irrationale Zahlen », « Was sind und was sollen die Zahlen ? », « Sur la théorie des nombres algébriques », ainsi que ses notices sur la théorie des idéaux publiées en appendice dans les éditions successives des *Vorlesungen* de DIRICHLET, dès la deuxième édition.

Le présent tome I contient les mémoires publiés de 1852 à 1882. La plupart de ces travaux sont accompagnés d'annotations destinées à renseigner le lecteur sur des recherches plus récentes qui se rattachent directement à celles du savant mathématicien de Brunswick. H. F.

Gino LORIA. — **Curve piane speciale algebriche e trascendenti.** Teoria e storia. Vol. II: Curve trascendenti. Curve dedotte da altra. — Un vol. in-8° de 439 p. avec 58 figures; 70 L.; Ulrico Hoepli, Milan.

Les deux volumes que M. Gino Loria consacre à la théorie et à l'histoire des courbes planes se suivent à quelques mois de distance. Le premier, limité aux courbes algébriques, a été signalé dans le précédent fascicule.

Le tome II débute par l'étude des courbes transcendentes classiques telles que les spirales, les cycloïdes, les épicycloïdes, les tractrices, la chaînette, etc., avec toutes les propriétés qui s'y rattachent. Puis viennent les courbes qui peuvent être déduites d'une autre courbe: développées et développantes, courbes parallèles, caustiques, podaires, courbes différentielles et courbes intégrales, etc.

Documenté avec soin au point de vue historique et bibliographique, l'ouvrage de M. Loria sera toujours consulté avec profit par tous ceux qui ont à faire des recherches dans le domaine des courbes planes. H. F.

M. D'OCAGNE. — **Cours de Géométrie.** Première partie: *Géométrie pure.* Deuxième partie: *Géométrie appliquée.* (Cours de l'Ecole Polytechnique.) — Un volume in-4° de 428 pages avec 180 fig.; 120 fr.; Librairie Gauthier-Villars & C^{ie}, Paris, 1930.

Cet ouvrage constitue en quelque sorte une édition réduite du cours publié par M. D'Ocagne en 1917 et 1918, en deux volumes. *L'Enseignement mathématique* en a donné une analyse détaillée en son temps (voir Tome 20, p. 30-42 et p. 151-154). Nous pouvons donc nous borner à rappeler les grandes divisions de l'ouvrage. — Première partie: Géométrie pure. —

Transformations géométriques. — Géométrie infinitésimale. — Géométrie réglée. — Géométrie cinématique. — Deuxième partie: Géométrie appliquée. — Cinématique appliquée. — Statique graphique. — Calcul graphique. — Calcul graphomécanique. — Nomographie.

Dans son *Avertissement*, M. D'Ocagne tient à rappeler la déclaration d'un des plus grands analystes dont l'histoire de la science ait enregistré le nom, Lagrange, qui écrivait en 1773, dans ses *Nouveaux Mémoires de l'Académie de Berlin*: « Quelques avantages que l'analyse algébrique ait sur les méthodes géométriques des anciens, qu'on appelle vulgairement, quoique fort improprement, *synthèse*, il est néanmoins des problèmes où celle-ci paraît préférable, tant par la clarté lumineuse qui l'accompagne que par l'élégance et la facilité des solutions qu'elle donne ». Et le savant géomètre ajoute: « Il est donc tout à fait naturel de réserver une place assez large à ces méthodes plus intuitives de la géométrie synthétique, à côté de celles plus formelles de l'analyse, dans la formation intellectuelle d'étudiants en mathématiques ».

P.-J. RICHARD. — **La gamme.** Introduction à l'étude de la musique.

Préface de Marius CASADESUS. — Un vol. in-8° de 223 pages avec 22 fig.; 28 fr.; Librairie scientifique Hermann & C^{ie}, Paris, 1930.

M. P.-J. Richard, ancien élève de l'Ecole Polytechnique, a réuni dans ce petit volume des notions qui ne sont exposées que partiellement et souvent d'une façon assez confuse dans les traités élémentaires d'enseignement de la musique. Après avoir rappelé quelques notions d'arithmétique, il passe à l'étude des diverses gammes, la gamme de Pythagore, la gamme d'Aristoxène, etc.

Beaucoup de personnes qui s'intéressent à la musique n'ont sur la gamme que des notions extrêmement vagues. Elles liront avec profit ce petit traité, qui, bien que destiné plus spécialement aux écoles de musique, mérite d'être placé dans les bibliothèques de l'enseignement secondaire.

En présentant l'ouvrage aux lecteurs, M. Marius Casadesus écrit ce qui suit: « La marche en quelque sorte historique, que l'auteur a suivie est particulièrement intéressante et ne peut manquer de laisser dans l'esprit du jeune lecteur une impression profonde en lui ouvrant des horizons insoupçonnés. C'est ainsi que l'étude parallèle des diverses gammes qui ont été utilisées au cours des siècles, malgré leur mode de génération si différents, si éloignés les uns des autres, fait ressortir les points communs fixes, les invariants, dirait un mathématicien, autour desquels s'établit toute construction musicale ».

« La précision et la clarté sont les qualités maîtresses de l'auteur; ces qualités sont particulièrement appréciables lorsqu'il s'agit, comme dans le cas présent, d'un traité didactique, d'un ouvrage d'initiation et d'enseignement. »

Conférences d'actualités scientifiques et industrielles. *Année 1929* (Conservatoire National des Arts et Métiers.) Préface de M. J. LEMOINE. — Un vol. in-8° de VIII-271 p. avec 126 figures; Fr. 35. — *Année 1930.* Conférences de MM. GUTTON et DAVID, deux fasc. de 20 et 39 p.; Fr. 4 et 5. Librairie scientifique Hermann & C^{ie}, Paris, 1930.

On trouvera réunies dans ce volume une série de conférences sur les progrès de la physique moderne dans ses rapports avec la science et l'indus-

trie. Comme le fait remarquer M. Lemoine dans sa Préface, il eût été regrettable que ces belles conférences, faites avec tant de soins et de talent par des conférenciers qui savent en dégager les principes philosophiques sans entrer dans les menus détails des expériences ou dans les grands calculs mathématiques, fussent perdues ou ignorées de tous ceux qui n'ont pas pu les entendre.

Indépendantes les unes des autres, ces conférences ont été rangées dans l'ordre suivant, qui est celui dans lequel elles ont été exposées :

L. DE BROGLIE, Une crise de l'optique ondulatoire. — FOEX, Les substances mésomorphes, leurs propriétés magnétiques. — E. BLOCH, Les atomes de lumière et les quanta. — L. DUNOYER, La cellule photo-électrique. — G. RIBAUD, Le rayonnement des corps incandescents. — Colonel JULLIEN, Principe de la production électrique des sons. — L. BLOCH, Les problèmes de la structure et la mécanique nouvelle. — V. KAMMERER, Les hautes pressions de vapeur. — MESNY, Les ondes dirigées et leurs applications.

Comme suite aux conférences de 1929, la Librairie Hermann vient de publier séparément les conférences faites les 6 et 9 mai 1930 par M. C. GUTTON, Sur les ondes électriques de très courtes longueurs et leurs applications, et de M. P. DAVID, Sur l'électro-acoustique, rapports de l'acoustique moderne et de l'électricité.

Ces conférences seront bien accueillies de tous ceux qui s'intéressent aux questions d'actualités scientifiques du domaine de la physique moderne.

H. F.

Index Generalis. 1929-1930. Annuaire général des Universités, publié sous la direction de M. DE MONTESSUS DE BALLORE. — Un vol. in-12, de 2320 pages; Editions Spes, 17, rue Soufflot, Paris.

Cet Annuaire dirigé par une personnalité scientifique connue, M. de Montessus de Ballore, paraît régulièrement tous les ans depuis 1919. Il est publié en deux éditions, l'une française, l'autre anglaise.

Comme les années passées, nous y trouvons une masse considérable de renseignements sur les Universités et les grandes Ecoles, les Observatoires, les Bibliothèques, les Instituts scientifiques, les Académies et les Sociétés savantes: 6.000 notices où sont désignées 60.000 personnes appartenant au monde intellectuel, avec Table alphabétique permettant de retrouver chacune d'elles dans le corps du volume.

Le classement est fait par pays, ce qui assure une juste proportion à chacun d'eux, d'après son activité intellectuelle. Ce sont les chefs de service eux-mêmes qui mettent les notices à jour, en corrigeant chaque année le texte qui les intéresse.

L'ouvrage débute par une préface de M. Appell, l'éminent Recteur de l'Université de Paris, qui souligne la valeur documentaire de l'*Index Generalis*.