

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 29 (1930)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE.

**Artikel:** ÉTUDE D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE:  
$$\frac{dy}{dx} = a(1 + \tan^2 y) + \tan y \tanh x \quad (F)$$
  
**Autor:** Milloux, H.  
**Kapitel:** Premier cas :  $a > \frac{1}{2}$   
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-23257>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 20.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

$\frac{dy}{dx}$  est positif à l'extérieur de la courbe (C), nul sur la courbe et négatif à l'intérieur.

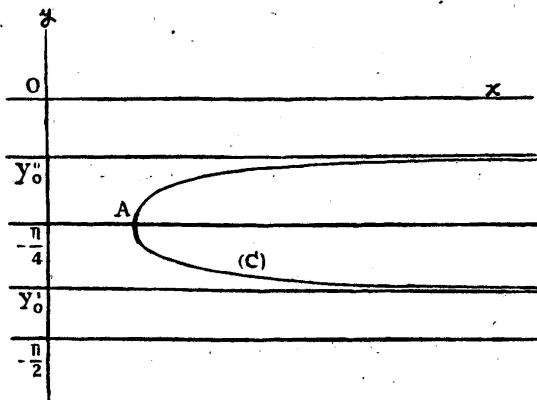


Fig. 1.

Les courbes sur lesquelles  $\frac{dy}{dx}$  est égal à une constante donnée (supérieure à  $\frac{4a^2 - 1}{4a}$ ) sont analogues à (C) et s'emboitent les unes dans les autres.

6. — *Remarque générale de comparaison des diverses équations (F).* — Le deuxième membre de (F) est une fonction croissante de  $a$ . Donc si deux intégrales des équations  $F(a)$  et  $F(a')$  où  $a'$  est supérieur à  $a$ , passent en un même point d'abscisse  $x_0$ , pour  $x$  supérieur à  $x_0$  la première intégrale (correspondant à  $a$ ) est située constamment au-dessous de la deuxième (correspondant à  $a'$ ).

Nous utiliserons souvent cette remarque.

Passons à l'étude détaillée de chaque cas.

PREMIER CAS :  $a > \frac{1}{2}$ .

7. — Limitons d'abord l'étude à celle des portions des courbes intégrales situées dans la bande définie plus haut (n° 2).

Désignons par  $x\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ ,  $x(0)$ ,  $x\left(+\frac{\pi}{2}\right)$  les abscisses des points d'intersection d'une telle portion avec les droites d'ordonnées  $-\frac{\pi}{2}$ , 0,  $+\frac{\pi}{2}$ . Ces abscisses sont rangées par ordre de grandeur croissante: sur la portion de courbe étudiée,  $x$  est fonction croissante de  $y$ .

Lorsque  $y$  est compris entre  $-\frac{\pi}{2}$  et 0,  $\frac{dy}{dx}$  vérifie les inégalités:

$$a(1 + \operatorname{tg}^2 y) + \operatorname{tg} y \operatorname{th} x(0) < \frac{dy}{dx} < a(1 + \operatorname{tg}^2 y) + \operatorname{tg} y \operatorname{th} x\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

d'où l'on déduit:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos^2 y \ dy}{a + \sin y \cos y \ \operatorname{th} x\left(-\frac{\pi}{2}\right)} &< x(0) - x\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ &< \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos^2 y \ dy}{a + \sin y \cos y \ \operatorname{th} x(0)} \end{aligned}$$

et l'on constate, sur ces inégalités, que  $x(0) - x\left(-\frac{\pi}{2}\right)$  est borné supérieurement et inférieurement, quelle que soit la valeur de  $x(0)$ ; de plus, lorsque  $x(0)$  tend vers  $+\infty$ , cette différence converge uniformément vers:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos^2 y \ dy}{a + \sin y \cos y} .$$

Lorsque  $y$  est compris entre 0 et  $+\frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{dy}{dx}$  vérifie les inégalités:

$$a(1 + \operatorname{tg}^2 y) + \operatorname{tg} y \operatorname{th} x(0) < \frac{dy}{dx} < a(1 + \operatorname{tg}^2 y) + \operatorname{tg} y \operatorname{th} x\left(+\frac{\pi}{2}\right) ,$$

d'où l'on déduit:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 y \ dy}{a + \sin y \cos y \ \operatorname{th} x\left(+\frac{\pi}{2}\right)} &< x\left(+\frac{\pi}{2}\right) - x(0) \\ &< \int_0^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 y \ dy}{a + \sin y \cos y \ \operatorname{th} x(0)} . \end{aligned}$$

Mêmes conclusions que précédemment. Lorsque  $x(0)$  tend vers  $+\infty$ , la différence  $x\left(+\frac{\pi}{2}\right) - x(0)$  converge uniformément vers:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 y \ dy}{a + \sin y \cos y} .$$

En résumé  $x\left(+\frac{\pi}{2}\right) - x\left(-\frac{\pi}{2}\right)$  est borné supérieurement et inférieurement (respectivement par  $\frac{4a\pi}{4a^2 - 1}$  et par  $\frac{\pi}{4a}$ ) et, lorsque  $x\left(-\frac{\pi}{2}\right)$  tend vers  $+\infty$ , se rapproche indéfiniment de

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 y \, dy}{a + \sin y \cos y} = \frac{\pi}{\sqrt{4a^2 - 1}}$$

8. — On passe des portions de courbes intégrales précédentes aux portions situées dans la bande:

$$x \leq 0 \quad -\frac{\pi}{2} \leq y < +\frac{\pi}{2}$$

par symétrie par rapport à 0; puis aux courbes intégrales tout entières par une suite de translations parallèles à  $Oy$ , et de grandeur  $k\pi$ ,  $k$  étant un entier positif ou négatif.

Les points de la courbe intégrale, qui ont pour ordonnées  $\frac{\pi}{2} + k\pi$ , jouissent de la propriété suivante, qui est une traduction de la propriété du no 7: la différence  $x\left[\frac{\pi}{2} + k\pi\right] - x\left[\frac{\pi}{2} + (k-1)\pi\right]$  de deux points consécutifs tend vers  $\frac{\pi}{\sqrt{4a^2 - 1}}$  lorsque  $k$  tend vers  $\pm\infty$ .

En ces points, la tangente à la courbe intégrale est parallèle à  $Oy$ .

9. — La régularité limite des points précédents nous conduit à la question suivante: la courbe intégrale de (F) se rapproche-t-elle indéfiniment d'une courbe périodique lorsque  $x$  tend vers  $\pm\infty$ ? (il suffit de considérer le cas de  $+\infty$ ).

La fonction  $\operatorname{th} x$  tendant vers 1 quand  $x$  tend vers  $+\infty$ , cette courbe périodique ne peut être qu'une intégrale de l'équation:

$$\frac{dy}{dt} = a(1 + \operatorname{tg}^2 y) + \operatorname{tg} y. \quad (1)$$

Comparons les valeurs des abscisses  $x$  et  $t$  correspondant à la valeur  $y$  de l'ordonnée, sur une courbe intégrale de (F) et sur une courbe intégrale de (1); la relation:

$$\frac{d(x-t)}{dx} = \frac{\sin y \cos y}{a + \sin y \cos y} (1 - \operatorname{th} x)$$

entraîne les inégalités:

$$\frac{d(x-t)}{dx} > -\frac{2}{2a-1} e^{-2x} \quad (2)$$

$$\frac{d(x-t)}{dx} < \frac{2}{2a+1} e^{-2x}. \quad (2')$$

Désignons par  $X$  et  $T$  les valeurs des abscisses (respectivement supérieures à  $x$  et  $t$ ) correspondant à une valeur  $Y$  de l'ordonnée, supérieure à  $y$ . De (2) et de (2') on déduit:

$$X - T - \frac{1}{2a-1} e^{-2X} > x - t - \frac{1}{2a-1} e^{-2x} \quad (3)$$

$$X - T + \frac{1}{2a+1} e^{-2X} < x - t + \frac{1}{2a+1} e^{-2x} \quad (3')$$

inégalités qui vont nous servir à établir qu'à une courbe intégrale de (F) correspond une courbe périodique asymptote, intégrale de l'équation (1).

Soit une suite de valeurs de  $X$  tendant vers  $+\infty$ :

$$X_1, X_2, \dots \quad X_n, \dots \quad (4)$$

et soit  $(c_1), (c_2), \dots (c_n) \dots$  la suite correspondante de courbes intégrales de l'équation (1), coupant aux points d'abscisses (4) la courbe intégrale étudiée de l'équation (F); autrement dit:  $T_1 = X_1; \dots T_n = X_n; \dots$

A l'ordonnée  $y$  correspondent: d'une part l'abscisse  $x$  de la courbe intégrale de (F), d'autre part une suite infinie  $t_1, t_2, \dots t_n, \dots$  d'abscisses de points situés sur les courbes  $(c_1), (c_2) \dots (c_n) \dots$ ; ces abscisses vérifient les inégalités:

$$\frac{1}{2a+1} [e^{-2X_n} - e^{-2x}] < x - t_n < \frac{1}{2a-1} [e^{-2x} - e^{-2X_n}]$$

déduites des inégalités (3) et (3'). La quantité  $|x - t_n|$  est donc bornée et les  $t_n$  admettent au moins une valeur limite<sup>1</sup>, soit  $t$ . Parmi les indices  $n$ , choisissons une suite infinie d'indices tels que les  $t_n$  correspondant tendent vers  $t$ ; quitte à supprimer s'il le faut des  $X_n$ , nous pouvons supposer que les  $t_n$  tendent tous vers  $t$  (pour ne pas introduire de nouvelles notations). Soit  $(c)$  la courbe intégrale de l'équation (1) passant par le point de coordonnées  $t$  et  $y$ . Toutes les courbes intégrales de l'équation (1) se déduisent de l'une d'elles par translation parallèle à  $Ox$ , de sorte qu'en désignant par  $T$  l'abscisse du point de  $(c)$  possédant même ordonnée que le point de  $(c_n)$  d'abscisse  $T_n = X_n$ , les différences  $T - T_n$  et  $t - t_n$  sont égales.

<sup>1</sup> Ils n'en admettent d'ailleurs qu'une. Ce point résulte de la suite du raisonnement.

Des inégalités (3) et (3') on déduit alors les inégalités:

$$(t_n - t) - \frac{1}{2a+1} (e^{-2x} - e^{-2X_n}) < x - t < (t_n - t) + \frac{1}{2a-1} (e^{-2x} - e^{-2X_n}).$$

La courbe (*c*) est fixe; l'indice *n* est quelconque. Lorsque *n* tend vers  $+\infty$ , les inégalités précédentes donnent:

$$-\frac{1}{2a+1} e^{-2x} \leq x - t \leq \frac{1}{2a-1} e^{-2x}. \quad (5)$$

*La courbe intégrale étudiée de l'équation (F) est donc asymptote à la courbe intégrale (*c*) de l'équation (1), courbe périodique<sup>1</sup>.*

Les inégalités (6) fournissent une limite de la distance de la courbe étudiée et de sa courbe asymptote.

DEUXIÈME CAS:  $a = \frac{1}{2}$ .

10. — Etudions d'abord les portions situées dans la bande définie au n° 2.

L'équation (F) peut s'écrire sous la forme:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} (1 + \operatorname{tg} y)^2 - \operatorname{tg} y (1 - \operatorname{th} x). \quad (F')$$

Les inégalités:

$$\frac{1}{2} (1 + \operatorname{tg}^2 y) < \frac{dy}{dx} < \frac{1}{2} (1 + \operatorname{tg} y)^2$$

valables lorsque *y* est positif, fixent pour la différence  $x\left(+\frac{\pi}{2}\right) - x(0)$  la borne supérieure  $\pi$  et la borne inférieure 1. Précisons: *x* étant une

<sup>1</sup> Dans le problème d'Agrégation de 1928 figurent l'étude des courbes (*γ*) et (*δ*), intégrales respectives des équations

$$(\gamma) \quad \frac{dz}{dx} = \operatorname{tg} y, \quad (\delta) \quad \frac{dz}{dx} = -\operatorname{cotg} y,$$

*y* étant lié à *x* par l'équation (F). On consultera, pour l'étude de ces courbes, la solution de M. Gambier. Je me borne à indiquer qu'*une courbe (*γ*) quelconque est asymptote à une courbe périodique*. Les courbes (*δ*) jouissent d'une propriété analogue.