Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 29 (1930)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE.

Artikel: ÉTUDE D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE: $\frac{dy}{dx}=a(1+\tan^2 y)+\tan y \tanh x$ (F)

Autor: Milloux, H.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-23257

De plus haut, on a

$$\rho = e^{\frac{1}{2}\theta - \log\cos\frac{\sqrt{3}}{2}(\theta+\theta_0)+c};$$

posons $e^c = \rho_0$ et enfin on trouve

$$\rho = \rho_0 e^{\frac{1}{2}\theta - \log\cos\frac{\sqrt{3}}{2}(\theta+\theta_0)}$$

qui donne une spirale logarithmique.

ÉTUDE D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE:

$$\frac{dy}{dx} = a(1 + \mathrm{tg}^2 y) + \mathrm{tg}\, y\ \mathrm{th}\, x \tag{F}$$

PAR

H. MILLOUX (Strasbourg).

Cette équation différentielle est extraite du problème de Calcul différentiel et Intégral donné, en 1928, au Concours de l'Agrégation des Sciences Mathématiques.

M. Gambier a publié, dans l'*Enseignement Mathématique*, une solution complète du problème. Il m'a semblé intéressant de reprendre à part, et d'une façon en général indépendante du problème, l'étude de l'équation (F): recherche de tous les types de courbes intégrales, propriétés aux environs des asymptotes $\left(a \leqq \frac{1}{2}\right)$ ou des courbes périodiques asymptotes $\left(a > \frac{1}{2}\right)$, variations, en fonction de a, lorsque a ne surpasse pas $\frac{1}{2}$, de certaines courbes intégrales spéciales.

1. — Traitons d'abord brièvement le cas: $a = 0$. L'équation (F) s'intègre immédiatement et donne:

$$\sin y = \frac{\sin y_0}{\mathrm{ch}\, x_0}\, \mathrm{ch}\, x\ .$$

Nous n'insisterons pas sur ce cas simple.

2. — Si a diffère de 0, le changement de y en $-y$ permet de passer de a à $-a$; on peut restreindre l'étude au cas où a est positif.

Les changements de signes de x et de y (simultanés), le changement de y en $y + k\pi$ (k entier positif ou négatif) ne transformant pas l'équation (F), on peut se borner à *l'étude des portions des courbes intégrales situées dans la bande :*

$$x \geqq 0 \qquad -\frac{\pi}{2} \leqq y < +\frac{\pi}{2}.$$

Dans cette bande, le deuxième membre de l'équation (F) surpasse

$$a(1 + \operatorname{tg}^2 y) - |\operatorname{tg} y|$$

et tend vers cette quantité lorsque x tend vers $+\infty$, y ayant une valeur fixe et négative. Le minimum de la quantité précédente est $\frac{4a^2 - 1}{4a}$. Il y a lieu de distinguer plusieurs cas, suivant le signe de ce minimum.

3. — *Premier cas.* $a > \frac{1}{2}$. $\frac{dy}{dx}$ est alors supérieur à une constante positive. y est une fonction croissante de x.

4. — *Deuxième cas.* $a = \frac{1}{2}$. $\frac{dy}{dx}$ est toujours positif, mais peut tendre vers zéro lorsque x tend vers $+\infty$, par exemple lorsque y est égal à $-\frac{\pi}{4}$.

5. — *Troisième cas.* $a < \frac{1}{2}$. $\frac{dy}{dx}$ est tantôt positif, tantôt nul, tantôt négatif. La courbe limite (C) sur laquelle $\frac{dy}{dx}$ s'annule est définie par l'équation :

$$\operatorname{tg} y = \frac{-\operatorname{th} x \pm \sqrt{\operatorname{th}^2 x - 4a^2}}{2a}.$$

Sur cette courbe, th x ne peut être inférieur à $2a$. Pour th $x = 2a$, $y = -\frac{\pi}{4}$ (point A). Lorsque th x surpasse $2a$, à une valeur de x correspondent deux valeurs de y, dont la demi-somme est $-\frac{\pi}{4}$, et dont la différence augmente avec x. Ces deux valeurs de y tendent vers les racines y'_0 et y''_0 ($y'_0 < y''_0$) de l'équation :

$$a(1 + \operatorname{tg}^2 y) + \operatorname{tg} y = 0,$$

lorsque x tend vers $+\infty$.

$\frac{dy}{dx}$ est positif à l'extérieur de la courbe (C), nul sur la courbe et négatif à l'intérieur.

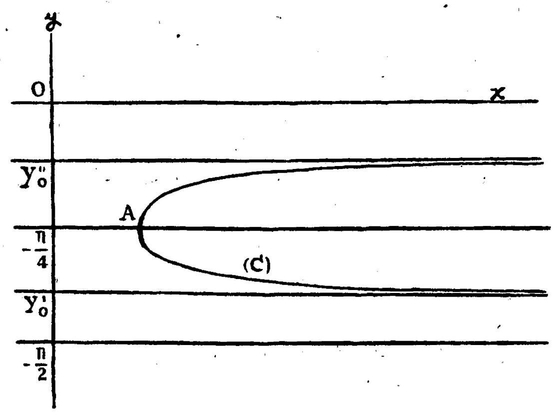

Fig. 1.

Les courbes sur lesquelles $\frac{dy}{dx}$ est égal à une constante donnée $\left(\text{supérieure à } \frac{4a^2-1}{4a}\right)$ sont analogues à (C) et s'emboîtent les unes dans les autres.

6. — *Remarque générale de comparaison des diverses équations* (F). — Le deuxième membre de (F) est une *fonction croissante de* a. Donc si deux intégrales des équations F(a) et F(a') où a' est supérieur à a, passent en un même point d'abcisse x_0, *pour* x *supérieur à* x_0 *la première intégrale* (correspondant à a) *est située constamment au-dessous de la deuxième* (correspondant à a').

Nous utiliserons souvent cette remarque.

Passons à l'étude détaillée de chaque cas.

Premier cas : $a > \frac{1}{2}$.

7. — Limitons d'abord l'étude à celle des portions des courbes intégrales situées dans la bande définie plus haut (n° 2).

Désignons par $x\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, $x(0)$, $x\left(+\frac{\pi}{2}\right)$ les abscisses des points d'intersection d'une telle portion avec les droites d'ordonnées $-\frac{\pi}{2}$, 0, $+\frac{\pi}{2}$. Ces abscisses sont rangées par ordre de grandeur croissante: sur la portion de courbe étudiée, x est fonction croissante de y.

Lorsque y est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et 0, $\frac{dy}{dx}$ vérifie les inégalités:

$$a(1+\operatorname{tg}^2 y)+\operatorname{tg} y \operatorname{th} x(0) < \frac{dy}{dx} < a(1+\operatorname{tg}^2 y)+\operatorname{tg} y \operatorname{th} x\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

d'où l'on déduit:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\cos^2 y \, dy}{a + \sin y \cos y \operatorname{th} x\left(-\frac{\pi}{2}\right)} < x(0) - x\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$< \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\cos^2 y \, dy}{a + \sin y \cos y \operatorname{th} x(0)}$$

et l'on constate, sur ces inégalités, que $x(0) - x\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ est borné supérieurement et inférieurement, quelle que soit la valeur de $x(0)$; de plus, lorsque $x(0)$ tend vers $+\infty$, cette différence converge uniformément vers:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\cos^2 y \, dy}{a + \sin y \cos y} .$$

Lorsque y est compris entre 0 et $+\frac{\pi}{2}$, $\frac{dy}{dx}$ vérifie les inégalités:

$$a(1 + \operatorname{tg}^2 y) + \operatorname{tg} y \operatorname{th} x(0) < \frac{dy}{dx} < a(1 + \operatorname{tg}^2 y) + \operatorname{tg} y \operatorname{th} x\left(+\frac{\pi}{2}\right) ,$$

d'où l'on déduit:

$$\int_{0}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 y \, dy}{a + \sin y \cos y \operatorname{th} x\left(+\frac{\pi}{2}\right)} < x\left(+\frac{\pi}{2}\right) - x(0)$$

$$< \int_{0}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 y \, dy}{a + \sin y \cos y \operatorname{th} x(0)} .$$

Mêmes conclusions que précédemment. Lorsque $x(0)$ tend vers $+\infty$, la différence $x\left(+\frac{\pi}{2}\right) - x(0)$ converge uniformément vers:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 y \, dy}{a + \sin y \cos y} .$$

En résumé $x\left(+\frac{\pi}{2}\right)-x\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ *est borné supérieurement et inférieurement* $\left(\text{respectivement par } \frac{4a\pi}{4a^2-1} \text{ et par } \frac{\pi}{4a}\right)$ *et, lorsque* $x\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ *tend vers* $+\infty$, *se rapproche indéfiniment de*

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 y \, dy}{a+\sin y \cos y} = \frac{\pi}{\sqrt{4a^2-1}} .$$

8. — On passe des portions de courbes intégrales précédentes aux portions situées dans la bande:

$$x \leqq 0 \qquad -\frac{\pi}{2} \leqq y < +\frac{\pi}{2}$$

par symétrie par rapport à 0; puis aux courbes intégrales tout entières par une suite de translations parallèles à Oy, et de grandeur $k\pi$, k étant un entier positif ou négatif.

Les points de la courbe intégrale, qui ont pour ordonnées $\frac{\pi}{2}+k\pi$, jouissent de la propriété suivante, qui est une traduction de la propriété du n° 7: *la différence* $x\left[\frac{\pi}{2}+k\pi\right]-x\left[\frac{\pi}{2}+(k-1)\pi\right]$ *de deux points consécutifs tend vers* $\frac{\pi}{\sqrt{4a^2-1}}$ *lorsque* k *tend vers* $\pm\infty$.

En ces points, la tangente à la courbe intégrale est parallèle à Oy.

9. — La régularité limite des points précédents nous conduit à la question suivante: *la courbe intégrale de* (F) *se rapproche-t-elle indéfiniment d'une courbe périodique lorsque* x *tend vers* $\pm\infty$? (il suffit de considérer le cas de $+\infty$).

La fonction $\operatorname{th} x$ tendant vers 1 quand x tend vers $+\infty$, *cette courbe périodique ne peut être qu'une intégrale de l'équation:*

$$\frac{dy}{dt} = a(1+\operatorname{tg}^2 y)+\operatorname{tg} y . \tag{1}$$

Comparons les valeurs des abcisses x et t correspondant à la valeur y de l'ordonnée, sur une courbe intégrale de (F) et sur une courbe intégrale de (1); la relation:

$$\frac{d(x-t)}{dx} = \frac{\sin y \cos y}{a+\sin y \cos y}(1-\operatorname{th} x)$$

entraîne les inégalités:

$$\frac{d(x-t)}{dx} > -\frac{2}{2a-1}e^{-2x} \tag{2}$$

$$\frac{d(x-t)}{dx} < \frac{2}{2a+1}e^{-2x} \,. \tag{2'}$$

Désignons par X et T les valeurs des abscisses (respectivement supérieures à x et t) correspondant à une valeur Y de l'ordonnée, supérieure à y. De (2) et de (2′) on déduit:

$$\mathrm{X}-\mathrm{T}-\frac{1}{2a-1}e^{-2\mathrm{X}} > x-t-\frac{1}{2a-1}e^{-2x} \tag{3}$$

$$\mathrm{X}-\mathrm{T}+\frac{1}{2a+1}e^{-2\mathrm{X}} < x-t+\frac{1}{2a+1}e^{-2x} \tag{3'}$$

inégalités qui vont nous servir à établir qu'à une courbe intégrale de (F) correspond une courbe périodique asymptote, intégrale de l'équation (1).

Soit une suite de valeurs de X tendant vers $+\infty$:

$$\mathrm{X}_1\,,\ \mathrm{X}_2\,,\ \ldots\qquad \mathrm{X}_n\,,\ \ldots \tag{4}$$

et soit (c_1), (c_2), ... (c_n) ... la suite correspondante de courbes intégrales de l'équation (1), coupant aux points d'abcisses (4) la courbe intégrale étudiée de l'équation (F); autrement dit: $\mathrm{T}_1 = \mathrm{X}_1$; ... $\mathrm{T}_n = \mathrm{X}_n$; ...

A l'ordonnée y correspondent: d'une part l'abscisse x de la courbe intégrale de (F), d'autre part une suite infinie t_1, t_2, ... t_n, ... d'abscisses de points situés sur les courbes (c_1), (c_2) ... (c_n) ...; ces abscisses vérifient les inégalités:

$$\frac{1}{2a+1}\left[e^{-2\mathrm{X}_n}-e^{-2x}\right] < x-t_n < \frac{1}{2a-1}\left[e^{-2x}-e^{-2\mathrm{X}_n}\right]$$

déduites des inégalités (3) et (3′). La quantité $|x-t_n|$ est donc bornée et les t_n admettent au moins une valeur limite [1], soit t. Parmi les indices n, choisissons une suite infinie d'indices tels que les t_n correspondant tendent vers t; quitte à supprimer s'il le faut des X_n, nous pouvons supposer que les t_n tendent tous vers t (pour ne pas introduire de nouvelles notations). Soit (c) la courbe intégrale de l'équation (1) passant par le point de coordonnées t et y. Toutes les courbes intégrales de l'équation (1) se déduisent de l'une d'elles par translation parallèle à Ox, de sorte qu'en désignant par T l'abscisse du point de (c) possédant même ordonnée que le point de (c_n) d'abscisse $\mathrm{T}_n = \mathrm{X}_n$, les différences $\mathrm{T}-\mathrm{T}_n$ et $t-t_n$ sont égales.

[1] Ils n'en admettent d'ailleurs qu'une. Ce point résulte de la suite du raisonnement.

Des inégalités (3) et (3′) on déduit alors les inégalités:

$$(t_n - t) - \frac{1}{2a+1}\left(e^{-2x} - e^{-2X_n}\right) < x - t < (t_n - t)$$
$$+ \frac{1}{2a-1}\left(e^{-2x} - e^{-2X_n}\right) .$$

La courbe (c) est fixe; l'indice n est quelconque. Lorsque n tend vers $+\infty$, les inégalités précédentes donnent:

$$-\frac{1}{2a+1} e^{-2x} \leqq x - t \leqq \frac{1}{2a-1} e^{-2x} . \tag{5}$$

La courbe intégrale étudiée de l'équation (F) *est donc asymptote à la courbe intégrale* (c) *de l'équation* (1), *courbe périodique* [1].

Les inégalités (6) fournissent une limite de la distance de la courbe étudiée et de sa courbe asymptote.

Deuxième cas: $a = \frac{1}{2}$.

10. — Etudions d'abord les portions situées dans la bande définie au nº 2.

L'équation (F) peut s'écrire sous la forme:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{tg} y)^2 - \operatorname{tg} y \,(1 - \operatorname{th} x) . \tag{F′}$$

Les inégalités:

$$\frac{1}{2}(1 + \operatorname{tg}^2 y) < \frac{dy}{dx} < \frac{1}{2}(1 + \operatorname{tg} y)^2$$

valables lorsque y est positif, fixent pour la différence $x\left(+\frac{\pi}{2}\right) - x\,(0)$ la borne supérieure π et la borne inférieure 1. Précisons: x étant une

[1] Dans le problème d'Agrégation de 1928 figurent l'étude des courbes (γ) et (δ), intégrales respectives des équations

$$(\gamma)\quad \frac{dz}{dx} = \operatorname{tg} y , \qquad (\delta)\quad \frac{dz}{dx} = -\operatorname{cotg} y ,$$

y étant lié à x par l'équation (F). On consultera, pour l'étude de ces courbes, la solution de M. Gambier. Je me borne à indiquer qu'*une courbe* (γ) *quelconque est asymptote à une courbe périodique*. Les courbes (δ) jouissent d'une propriété analogue.

fonction croissante de y, on a (même démonstration qu'au n° 7):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos^2 y\, dy}{1 + 2\sin y \cos y \operatorname{th} x\left(+\frac{\pi}{2}\right)} < x\left(+\frac{\pi}{2}\right) - x(0)$$

$$< \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos^2 y\, dy}{1 + 2\sin y \cos y \operatorname{th} x(0)} .$$

Lorsque x (0) tend vers $+\infty$, *la différence* $x\left(+\frac{\pi}{2}\right) - x(0)$, *comprise entre* 1 *et* π, *tend vers* 1.

En effet, les deux intégrales limitant cette différence convergent vers:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\, dy}{(1 + \operatorname{tg} y)^2} = 1 .$$

11. — *Toute portion de courbe intégrale coupant la droite d'ordonnée* $-\frac{\pi}{4}$ *coupe la droite d'ordonnée* O *et, par suite, la droite d'ordonnée* $+\frac{\pi}{2}$.

Cette proposition est une conséquence de l'équation (F'): au point d'ordonnée $-\frac{\pi}{4}$, le coefficient angulaire de la courbe intégrale étant positif, cette courbe atteint un point d'ordonnée $-\frac{\pi}{4} + \varepsilon$, à partir duquel le coefficient angulaire est supérieur à $\frac{2\varepsilon^2}{(\varepsilon + 1)^2}$.

12. — Les recherches les plus délicates ont trait aux portions comprises entre les droites d'ordonnées $-\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{4}$.

Toute portion de courbe intégrale ne coupant pas la droite d'ordonnée $-\frac{\pi}{4}$ *est asymptote à cette droite.*

Dans l'hypothèse contraire, il existerait une portion asymptote à la droite d'ordonnée $-\frac{\pi}{4} - \varepsilon$, ε étant une constante positive. Or, dans la bande:

$$x \geqq 0 \qquad -\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq -\frac{\pi}{4} - \varepsilon$$

le coefficient angulaire de toute courbe intégrale est supérieur à $\frac{2\varepsilon^2}{(1-\varepsilon)^2}$, ce qui conduit à la contradiction.

13. — L'inégalité:

$$\frac{dy}{dx} > \frac{1}{2}(1 + \operatorname{tg} y)^2$$

valable lorsque y est négatif établit que la courbe intégrale issue d'un point P_0 de coordonnées $x_0\, y_0$ et asymptote à la droite d'ordonnée $-\frac{\pi}{4}$, est située, lorsque x est supérieur à x_0, au-dessus de la courbe intégrale de l'équation:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{tg} y)^2$$

passant par le même point P_0. Or, sur une telle courbe, le produit $x\left(-\frac{\pi}{4} - y\right)$ tend vers $\frac{1}{2}$ lorsque x tend vers $+\infty$. Donc:

Sur toute courbe intégrale de (F) *asymptote à la droite d'ordonnée* $-\frac{\pi}{4}$, *le produit* $\mathrm{x}\left(-\frac{\pi}{4}-\mathrm{y}\right)$ *finit par être inférieur à* $\frac{1}{2} + \varepsilon$, *si petite que soit la constante positive* ε.

14. — Abordons maintenant l'étude de l'existence de courbes intégrales asymptotes à la droite d'ordonnée $-\frac{\pi}{4}$.

L'inégalité:

$$\frac{dy}{dx} \leqq A(1 + \operatorname{tg} y)^2 \tag{6}$$

où A est une constante positive, nécessairement supérieure à $\frac{1}{2}$, est valable lorsque le point (x, y) est situé sous ou sur la courbe d'équation:

$$-\operatorname{tg} y(1 - \operatorname{th} x) = \left(A - \frac{1}{2}\right)(1 + \operatorname{tg} y)^2 . \tag{7}$$

Pour fixer les idées, limitons l'étude de cette courbe à celle de la portion comprise dans la bande

$$x \geqq 1 \qquad -\frac{\pi}{3} \leqq y \leqq -\frac{\pi}{4} . \tag{8}$$

Sur cette portion, y est une fonction croissante de x et tend vers $-\frac{\pi}{4}$ quand x tend vers $+\infty$. Supposons qu'à partir d'un certain point M (A) de coordonnées x (A) et y (A), le coefficient angulaire de la courbe (7) soit supérieur à $A(1 + \operatorname{tg} y)^2$. D'après l'inégalité (6), *toute courbe intégrale de* (F) *issue d'un point d'abscisse supérieure à* x (A), *et situé sous ou sur la courbe* (7), *restera nécessairement* (lorsque x augmente indéfiniment) *sous la courbe* (7) *et par conséquent sera asymptote à la droite d'ordonnée* $-\frac{\pi}{4}$.

Démontrons l'existence du point M (A) et recherchons les valeurs de ses coordonnées en fonction de A. Le coefficient angulaire de la courbe (7) est, dans la bande (8), supérieur à: $-0{,}31\,(1+\operatorname{tg} y)$. Il est *a fortiori* supérieur à $A(1+\operatorname{tg} y)^2$ à partir du point M(A) dont les coordonnées sont définies par les équations:

$$M(A)\left\{\begin{aligned} &-[1+\operatorname{tg} y(A)] = \frac{0{,}31}{A} \\ &1-\operatorname{th} x(A) = \frac{(2A-1)\,0{,}0961}{2A(A+0{,}31)} \end{aligned}\right. .$$

Il est bien entendu que A doit être suffisamment grand pour que le point M (A) soit situé dans la bande (8).

15. — Jusqu'à présent, nous avons laissé constante la quantité A. Faisons maintenant croître indéfiniment cette quantité, à partir d'une valeur choisie de façon que $x(A)$ soit, comme $y(A)$, une *fonction croissante de* A. Un calcul simple établit que cette propriété a lieu à partir de $A = 1{,}14$. Le point M(A) décrit alors une courbe (Γ) asymptote à la droite d'ordonnée $-\frac{\pi}{4}$. Le point P de départ de (Γ) correspond à $A = 1{,}14$. Ses coordonnées sont voisines de 1,984 (abscisse)et $-\pi\,.\,0{,}288$ (ordonnée). Par chaque point de (Γ) passe une courbe (7) et une seule. Soit (Δ) le domaine limité par (Γ), l'axe Ox et la parallèle à Oy menée par P. De ce qui précède résulte la propriété suivante:

Toute portion de courbe intégrale de (F) *issue d'un point* P′ *du domaine* (Δ) *reste dans ce domaine, est asymptote à la droite d'ordonnée* $-\frac{\pi}{4}$, *et son coefficient angulaire vérifie l'inégalité* (6), *en tout point d'abscisse supérieure à celle de* P′.

A doit être considéré, dans cette inégalité, comme une constante, dépendant uniquement de la position du point P′.

Il résulte de l'inégalité (6) que *le produit* $x\left(-\frac{\pi}{4}-y\right)$ *finit par dépasser* $\frac{1}{4A}-\varepsilon$, *si petite que soit la constante positive* ε.

Ce dernier résultat est à rapprocher de celui du n° 13, fixant une limite supérieure pour le même produit.

Toute courbe intégrale étudiée dans ce n° sera appelée *courbe du premier type*.

16. — Il importe de préciser les propriétés de la courbe (Γ) aux environs de son asymptote. D'après les valeurs des coordonnées de M(A),

le produit $\left(-\frac{\pi}{4}-y\right)e^{2x}$ tend vers 0,31 lorsque A augmente indéfiniment: à partir d'une valeur numérique de x, la courbe (Γ) est située au-dessus de la courbe (Γ') d'équation:

$$-\frac{\pi}{4}-y=\frac{10}{3}e^{-2x} \qquad (\Gamma')$$

et toute courbe intégrale de (F), coupant la courbe (Γ'), en un point d'abscisse suffisamment grande, est *du premier type.*

Nous appellerons *courbes du deuxième type* les courbes intégrales asymptotes à la droite d'ordonnée $-\frac{\pi}{4}$, et qui finissent par rester *au-dessus de* (Γ'), et par *courbes du troisième type* celles qui coupent la droite d'ordonnée $-\frac{\pi}{4}$.

Etant donnée une courbe de premier type, il existe toujours une courbe du premier type d'ordonnée supérieure, pour une même valeur de l'abscisse: en effet, soit P' un point de la première courbe, intérieur au domaine (Δ). Tout point P'' de même abscisse, d'ordonnée supérieure, et situé dans le domaine (Δ) donne naissance à une courbe du premier type.

Etant donnée une courbe du troisième type, il existe une courbe du troisième type d'ordonnée inférieure, pour une même valeur de l'abscisse: en effet, soit P_1' le point d'ordonnée $-\frac{\pi}{4}$, situé sur la première courbe. Tout point P'', d'ordonnée $-\frac{\pi}{4}$, et d'abscisse supérieure à celle de P_1', donne naissance à une courbe du troisième type située sous la première.

Ces deux propriétés montrent qu'*il existe au moins une courbe de deuxième type.*

Coupons en effet les courbes intégrales de (F) par une droite d'abscisse constante. Les points situés sur cette droite, qui donnent naissance à des courbes du troisième type, admettent un point limite L qui ne peut donner naissance à une courbe du troisième type. Même raisonnement pour les courbes du premier type, avec point limite L′ d'ordonnée inférieure ou égale à celle de L. Dans le cas (qui d'ailleurs n'existe pas, comme nous le verrons plus tard) où L et L′ ne sont pas confondus, toute courbe issue d'un point de l'intervalle *fermé* LL′ est du deuxième type. Dans le cas où L et L′ sont confondus, *la courbe issue de* L *est du deuxième type.*

17. — Nous avons vu qu'*une courbe du deuxième type est située au-dessus de la courbe* (Γ'), pour une valeur assez grande de l'abscisse.

D'après l'équation (F), le coefficient angulaire $\frac{dy}{dx}$ est supérieur, lorsque y est inférieur à $-\frac{\pi}{4}$, à $1 - \operatorname{th} x$ et *a fortiori* à e^{-2x}. Sur une courbe du deuxième type, $\frac{dy}{dx} - e^{-2x}$ est positif; $y + \frac{1}{2}e^{-2x}$, fonction croissante, est inférieure à sa valeur limite, qui est $-\frac{\pi}{4}$. Donc:

Toute courbe intégrale du deuxième type est située sous la courbe (Γ'') *d'équation :*

$$-\frac{\pi}{4} - y = \frac{1}{2}e^{-2x} . \qquad (\Gamma'')$$

18. — Démontrons qu'*il n'existe qu'une courbe du deuxième type.*

Dans l'hypothèse contraire, soit y une ordonnée suffisamment voisine de $-\frac{\pi}{4}$ pour que les branches de deux courbes intégrales du deuxième type soient situées entre les courbes (Γ') et (Γ''), et soit x et t les abscisses correspondant à y, sur ces deux branches. La différence $t - x$ conserve un signe constant, soit le signe $+$. C'est d'ailleurs une fonction croissante de y, puisque $\frac{dy}{dt}$ est inférieur à $\frac{dy}{dx}$, d'après l'équation (F). On peut donc écrire, pour $y > y_0$:

$$t - x > t(y_0) - x(y_0) = \alpha$$

α est une quantité positive.

D'autre part, il résulte des équations (Γ') et (Γ'') que la différence $-\frac{\pi}{4} - y$ est comprise à la fois entre $\frac{1}{2}e^{-2x}$ et $\frac{10}{3}e^{-2x}$, et entre $\frac{1}{2}e^{-2t}$ et $\frac{10}{3}e^{-2t}$, ce qui n'est possible que si l'on a:

$$e^{2(t-x)} < \frac{3}{20} . \qquad (9)$$

Or, d'après l'équation (F):

$$\frac{dt}{dx} = \frac{(1 + \operatorname{tg} y)^2 - 2 \operatorname{tg} y (1 - \operatorname{th} x)}{(1 + \operatorname{tg} y)^2 - 2 \operatorname{tg} y (1 - \operatorname{th} t)} .$$

Le deuxième membre tend vers $e^{2(t-x)}$ lorsque y tend vers $-\frac{\pi}{4}$. Il y a donc contradiction avec l'inégalité (9): $\frac{dt}{dx}$ finissant par rester supérieur à une quantité supérieure à 1, puisque $t - x$ est supérieur à une quantité positive α, la différence $t - x$ devrait croître indéfiniment avec x.

19. — Soit S le point d'ordonnée $-\frac{\pi}{2}$, situé sur la courbe du deuxième type. Il est utile de connaître des limites de son abscisse.

Limite inférieure de l'abscisse de S. — On obtient une telle limite en procédant à un calcul analogue à celui du n° 17: Sur la courbe du deuxième type, le coefficient angulaire $\frac{dy}{dx}$ est supérieur à:

$$-\operatorname{tg} y(1-\operatorname{th} x) .$$

De sorte que la courbe du deuxième type est nécessairement située *au-dessous* de celle des courbes intégrales de l'équation:

$$\frac{dY}{dx}=-\operatorname{tg} Y(1-\operatorname{th} x)$$

qui est asymptote à la droite d'ordonnée $-\frac{\pi}{4}$, c'est-à-dire de la courbe:

$$-\sqrt{2}\sin y=1+e^{-2x} .$$

Donc l'abscisse de S est supérieure à celle du point de la courbe précédente, qui a pour ordonnée $-\frac{\pi}{2}$, et *a fortiori l'abscisse de* S *est supérieure à* 0,44.

Limite supérieure de l'abscisse de S. — Soit (c) la portion de la courbe d'équation:

$$1+\operatorname{tg} y=-1{,}9\, e^{-2x}$$

située dans la bande

$$x \geqq 1 \ ; \qquad -\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq -\frac{\pi}{4} .$$

(On désigne par P le point d'abscisse 1; son ordonnée est supérieure à $-\frac{\pi}{2}\times 0{,}5723$.)

Nous allons démontrer que *toute courbe intégrale de* (F) *coupant* (c) *est asymptote à la droite d'ordonnée* $-\frac{\pi}{4}$ (est du premier type).

Plaçons-nous dans l'hypothèse contraire et désignons par M le point de la courbe intégrale qui a pour ordonnée $-\frac{\pi}{4}$, et par N le point de la courbe intégrale situé sur (c), le plus proche de M s'il y a lieu de choisir.

Sur la portion NM de la courbe intégrale, on a l'inégalité:

$$\frac{dy}{dx}<\frac{1}{2}(1+\operatorname{tg} y)^2+2e^{-2x}<\left[2+\frac{(1{,}9)^2}{2}\right]e^{-2x} .$$

En intégrant:

$$-\frac{\pi}{4} - y(\mathrm{N}) < \frac{1}{2}\left[2 + \frac{(1,9)^2}{2}\right][e^{-2x(\mathrm{N})} - e^{-2x(\mathrm{M})}]$$

et *a fortiori:*

$$-\frac{\pi}{4} - y(\mathrm{N}) < 1,9025\, e^{-2x(\mathrm{N})} \ . \tag{10}$$

D'autre part, le point N étant situé sur la courbe (c), on a:

$$\operatorname{tg}\left[-\frac{\pi}{4} - y(\mathrm{N})\right] = \frac{1,9\, e^{-x(\mathrm{N})}}{2 + 1,9\, e^{-x(\mathrm{N})}} > 0,704\, e^{-x(\mathrm{N})}$$

et, en tenant compte de ce que l'angle $-\frac{\pi}{4} - y(\mathrm{N})$ est inférieur à l'angle $-\frac{\pi}{4} - y(\mathrm{P})$:

$$-\frac{\pi}{4} - y(\mathrm{N}) > 0,7009\, e^{-x(\mathrm{N})} \ . \tag{10'}$$

Les inégalités (10) et (10′) sont contradictoires, car $x(\mathrm{N})$ dépasse ou égale 1, ce qui démontre la proposition énoncée plus haut.

La courbe intégrale de (F) passant en P est donc *du premier type.* Cette courbe coupe la droite d'ordonnée $-\frac{\pi}{2}$ en un point d'abscisse inférieure à 0,8154, comme on le voit en appliquant l'inégalité:

$$\frac{dy}{dx} < \frac{1}{2}(1 + \operatorname{tg}^2 y)$$

à la portion de la courbe intégrale comprise entre P et la droite d'ordonnée $-\frac{\pi}{4}$.

Donc: *l'abscisse de* S *est inférieure à* 0,8154.

20. — Résumé. — *Les portions des courbes intégrales de l'équation* (F), *situées dans la bande définie au n°* 2, *se partagent en trois types:*

Premier type. — *Courbes intégrales asymptotes à la droite d'ordonnée* $-\frac{\pi}{4}$; *le produit* $\mathrm{x}\left(-\frac{\pi}{4} - \mathrm{y}\right)$ *est compris, sur une courbe déterminée, entre deux bornes positives.*

Deuxième type. — *Une seule courbe intégrale, asymptote à la droite d'ordonnée* $-\frac{\pi}{4}$. *Le produit* $\mathrm{e}^{2x}\left(-\frac{\pi}{4} - \mathrm{y}\right)$ *est supérieur à* $\frac{1}{2}$ *et finit par être inférieur à* $\frac{10}{3}$.

Troisième type. — *Courbes coupant la droite d'ordonnée* $+\frac{\pi}{2}$.

La courbe du deuxième type rencontre la droite d'ordonnée $-\frac{\pi}{2}$ *en un point* S *d'abscisse comprise entre* 0,44 *et* 0,8154. *Tout point de la même ordonnée, situé à droite de* S, *donne une courbe du premier type. Tout point situé à gauche de* S *donne une courbe du troisième type.*

21. — On passe ensuite aux portions des courbes intégrales situées dans la bande:

$$x \leqq 0 \qquad -\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq +\frac{\pi}{2}$$

par symétrie par rapport à 0; et enfin aux courbes intégrales tout entières par translation parallèle à Oy.

Il résulte de ce qui précède que lorsque x croît de $-\infty$ à $+\infty$, y croît et sa variation totale est finie: *toute courbe intégrale finit par être asymptote à une droite d'ordonnée* $-\frac{\pi}{4}+k\pi$ (x tendant vers $+\infty$) ou $+\frac{\pi}{4}+k'\pi$ (x tendant vers $-\infty$).

Toute courbe intégrale se ramène, après translation, à une courbe du groupe de courbes asymptotes à la droite d'ordonnée $-\frac{\pi}{4}$; ces courbes sont limitées: à gauche, par la courbe du deuxième type relatif à la droite d'ordonnée $-\frac{\pi}{4}$ (cette courbe-limite fait partie du groupe) et à droite, par la même courbe, à laquelle on a fait subir une trans-

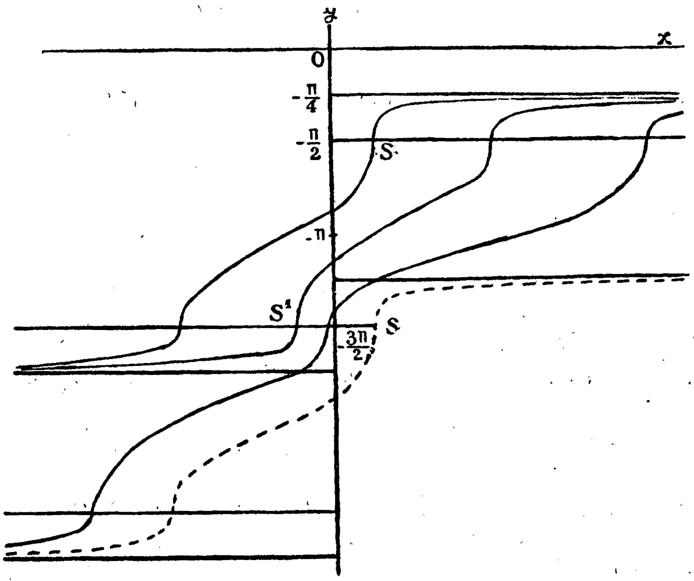

Fig. 2.

lation de $-\pi$, parallèlement à l'axe Oy (cette courbe-limite à droite ne fait pas partie du groupe; elle est indiquée en pointillé sur la figure).

La courbe-limite à gauche coupe l'axe Oy en un point d'ordonnée comprise entre O et $-\pi$, et la droite d'ordonnée $-\frac{3\pi}{2}$ en un point d'abscisse inférieure à -1. Elle est donc asymptote à la droite d'ordonnée $-\frac{7\pi}{4}$, par rapport à laquelle elle est de premier type. La courbe symétrique par rapport au point de coordonnées O, $-\pi$, de la courbe intégrale précédente, est une courbe du groupe. Elle est de deuxième type par rapport à la droite d'ordonnée $-\frac{\pi}{4}$ et de premier type par rapport à la droite d'ordonnée $-\frac{7\pi}{4}$. Toute courbe intégrale intermédiaire entre ces deux courbes intégrales possède mêmes asymptotes, par rapport auxquelles elles sont de premier type.

Enfin les autres courbes intégrales du groupe sont asymptotes aux droites d'ordonnées $-\frac{\pi}{4}$ et $-11\frac{\pi}{4}$, par rapport auxquelles elles sont de premier type [1].

TROISIÈME CAS : $a < \frac{1}{2}$.

22. — On peut classer *a priori* en plusieurs catégories les portions des courbes intégrales situées dans la bande définie au nº 2. En allant du haut vers le bas, les courbes intégrales qui peuvent se présenter sont les suivantes:

Première catégorie. — Courbes coupant la droite d'ordonnée $+\frac{\pi}{2}$. Toute courbe coupant la droite d'ordonnée y''_0 (définie au nº 5; voir la figure de ce numéro) est de première catégorie.

Deuxième catégorie. — Courbes situées au-dessus de (C) et au-dessous de la droite d'ordonnée y''_0, à laquelle elles sont asymptotes. Nous verrons qu'il en existe une et une seule.

Troisième catégorie. — Courbes coupant la courbe (C). A partir du point d'intersection avec (C), le coefficient angulaire d'une courbe de troisième catégorie est négatif, et la courbe intégrale reste à l'intérieur de (C) qu'elle ne peut couper à nouveau, en raison de la valeur du coefficient angulaire. La courbe intégrale possède donc une asymptote parallèle à Ox, et *cette asymptote est la droite d'ordonnée* y'_0. En effet, si c'était une droite d'ordonnée $y'_0 + \varepsilon$, ε étant une quantité positive

[1] Les courbes (γ) et (δ) (se reporter pour la définition à la note du nº 9) admettent des directions asymptotiques. Mais, en général, les asymptotes sont rejetées à l'infini. Il y a exception lorsque la courbe intégrale de (F) correspondante est du deuxième type par rapport à l'une de ses asymptotes. Les courbes (γ) et (δ) correspondantes possèdent alors chacune une asymptote (coefficient angulaire ± 1).

fixe, le coefficient angulaire $\frac{dy}{dx}$ serait aussi voisin que l'on voudrait, pour x assez grand, de la quantité *négative :*

$$a[1 + \mathrm{tg}^2(y'_0 + \varepsilon)] + \mathrm{tg}\,(y'_0 + \varepsilon)$$

qui est de l'ordre de grandeur de $\left(a - \frac{1}{2}\right)\varepsilon$, d'où la contradiction.

Toute courbe coupant la droite d'ordonnée y'_0 est évidemment de troisième catégorie.

Quatrième catégorie. — Courbes ne coupant pas la droite d'ordonnée y'_0. Le coefficient angulaire étant positif, ces courbes admettent une asymptote parallèle à Ox, et *cette asymptote est la droite d'ordonnée* y'_0, comme on le voit en appliquant la remarque faite pour les courbes de troisième catégorie.

Les courbes de quatrième catégorie n'existent que si a est compris entre $\frac{\sqrt{3}}{4}$ et $\frac{1}{2}$.

Remarque de comparaison avec le cas $a = \frac{1}{2}$. — La courbe issue du point S $\left(\text{point défini dans le cas } a = \frac{1}{2}\right)$ se trouve nécessairement au-dessous de la droite d'ordonnée $-\frac{\pi}{4}$, puisque, d'après la remarque du n° 6, elle est située au-dessous de la courbe du deuxième type $\left(\text{cas } a = \frac{1}{2}\right)$. Donc c'est une courbe de troisième ou de quatrième catégorie.

Passons à l'étude des courbes de chacune des catégories.

23. — *Courbes de première catégorie.* — Ces courbes s'étudient comme les courbes du troisième type $\left(a = \frac{1}{2}\right)$. La différence des abscisses $x\left(+\frac{\pi}{2}\right) - x(0)$ est comprise entre :

$$\frac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 y\, dy = \frac{\pi}{4a}$$

et :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 y\, dy}{a + \sin y \cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - 4a^2}} \operatorname{Log} \frac{1 + \sqrt{1 - 4a^2}}{2a}$$

et tend vers cette dernière quantité lorsque $x(0)$ tend vers $+\infty$.

On a des inégalités analogues lorsque $x(0)$ est négatif, pour la portion de la courbe située à droite de l'axe Oy.

24. — *Courbe de deuxième catégorie. — Il en existe au moins une.* — Le raisonnement qui aboutit à cette conclusion est analogue à celui que nous avons fait au nº 16, pour démontrer l'existence d'une courbe de deuxième type $\left(a = \frac{1}{2}\right)$: au-dessous d'une courbe de première catégorie, il existe des courbes de première catégorie; au-dessus d'une courbe de troisième catégorie il existe des courbes de troisième catégorie. On achève comme plus haut.

Il n'existe qu'une seule courbe de deuxième catégorie. — Soient en effet y et Y les ordonnées ($Y > y$) de deux courbes, correspondant à la valeur x de l'abscisse. On a:

$$\frac{d(Y - y)}{dx} = (\operatorname{tg} Y - \operatorname{tg} y)[a(\operatorname{tg} Y + \operatorname{tg} y) + \operatorname{th} x] .$$

Lorsque x tend vers $+\infty$, la quantité entre crochets tend vers $2a \operatorname{tg} y''_0 + 1 = \sqrt{1 - 4a^2}$; par conséquent lorsque x dépasse une certaine valeur x_0, $\frac{d(Y - y)}{dx}$ est positif et $Y - y$ reste constamment supérieur à la quantité positive: $Y(x_0) - y(x_0)$, ce qui conduit à la contradiction.

25. — La courbe de deuxième catégorie (prolongée s'il le faut à gauche de l'axe Oy) coupe la droite d'ordonnée $-\frac{\pi}{2}$ en un point T. Donnons quelques indications sur la position de ce point.

La remarque du nº 6 permet de constater que *l'abscisse de* T *est une fonction croissante de* a (y''_0 croît lorsque a décroît) et que *le point* T *se trouve à gauche de* S (ce dernier résultat est une conséquence évidente de ce qui a été dit à la fin du nº 22).

Nous allons montrer que *le point* T *s'éloigne indéfiniment vers la gauche lorsque* a *tend vers* 0, *et se rapproche indéfiniment du point* S *lorsque* a *tend vers* $\frac{1}{2}$.

Etude dans le cas ou a *tend vers* 0. — Le coefficient angulaire de toute courbe intégrale est inférieur à $2a$ dans la bande:

$$x \geqq 0 \qquad -\frac{\pi}{4} < y < 0 .$$

Soit P le point, d'abscisse nulle, qui est situé sur la tangente à (C) ayant pour coefficient angulaire $2a$. Un calcul simple établit que si a ne surpasse pas 0,2, l'ordonnée de P est supérieure à $-\frac{\pi}{4}$, et comprise entre — a et — $4a$. Dans ce cas, la courbe intégrale issue de P est nécessairement située sous la tangente à (C), et par suite c'est une courbe de troisième catégorie. Sur la partie de cette courbe située entre P et la droite d'ordonnée $-\frac{\pi}{2}$, le coefficient angulaire est inférieur à

$$a(1 + \operatorname{tg}^2 y) - \operatorname{tg} y$$

et l'on a :

$$x\left(-\frac{\pi}{2}\right) < \int_{-4a}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{dy}{a(1 + \operatorname{tg}^2 y) - \operatorname{tg} y} < -\frac{1}{2}\int_{+4a}^{+\frac{\pi}{3}} \frac{du}{\operatorname{tg} u} < -\frac{1}{2}\operatorname{Log}\frac{0.2}{a}\,.$$

Cette inégalité fournit une limite supérieure de l'abscisse de T. On obtient une limite inférieure en remarquant que la courbe issue du point Q d'abscisse — 1 et d'ordonnée — a est de première catégorie, et que sur la partie comprise entre Q et la droite d'ordonnée $-\frac{\pi}{2}$ le coefficient angulaire $\frac{dy}{dx}$ est inférieur à $-\frac{3}{4}\operatorname{tg} y$, d'où l'inégalité :

$$x\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 1 > -\int_{-a}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{4\,dy}{3\operatorname{tg} y} = -\frac{4}{3}\operatorname{Log}\frac{1}{\sin a}$$

et *a fortiori :*

$$x\left(-\frac{\pi}{2}\right) > -1{,}01 - \frac{4}{3}\operatorname{Log}\frac{1}{a}\,.$$

En résumé *l'abscisse de T est comprise entre* $-1{,}01 - \frac{4}{3}\operatorname{Log}\frac{1}{a}$ *et* $-\frac{1}{2}\operatorname{Log}\frac{0.2}{a}$, *lorsque* a *est inférieur à* 0,2. Cette abscisse est négative et tend vers $-\infty$ lorsque a tend vers 0.

Etude dans le cas ou a *tend vers* $\frac{1}{2}$. — La courbe intégrale de (F) issue de l'origine coupe la droite d'ordonnée $+\frac{\pi}{2}$ en un point d'abscisse inférieure à $\frac{\pi}{4a}$, et par suite la droite d'ordonnée $-\frac{\pi}{2}$ en un point d'abscisse supérieure à $-\frac{\pi}{4a}$, ce qui montre que l'abscisse de T est bornée inférieurement par $-\frac{\pi}{4a}$ lorsque a tend vers $\frac{1}{2}$.

Soit S′ un point de la droite d'ordonnée $-\frac{\pi}{2}$, situé dans le voisinage de S, et à gauche de ce point. Par S′ passe une courbe (c) du troisième type $\left(a = \frac{1}{2}\right)$ qui coupe la droite d'ordonnée $+\frac{\pi}{2}$ en un point M. Par M passe une courbe de première catégorie $\left(a < \frac{1}{2}\right)$ que nous désignerons par $c\,(a)$. Nous allons voir que *la courbe* c (a) *se rapproche indéfiniment de la courbe* (c), *lorsque* a *tend vers* $\frac{1}{2}$, y étant compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$.

Désignons par x et t les abscisses respectives des points de (c) et de $c\,(a)$ ayant même ordonnée y. Il résulte de la remarque du nº 6 que la différence $x - t$ est positive. Sur la courbe fixe (c), le coefficient angulaire est supérieur à une constante positive que nous désignerons par ε. Cette constante dépend, bien entendu, de la position du point S'.

Des deux équations différentielles relatives à $\frac{1}{2}$ et a, on tire:

$$\frac{d\,(t - x)}{dt} = \frac{(1 - 2a) + 2\sin y \cos y\,(\operatorname{th} x - \operatorname{th} t)}{1 + 2\sin y \cos y \operatorname{th} x}$$

d'où, *a fortiori* l'inégalité:

$$\varepsilon \frac{d\,(t - x)}{dt} < \left(\frac{1}{2} - a\right) + (x - t)\ .$$

qui établit que la différence $x - t$ est constamment inférieure à la solution u de l'équation différentielle:

$$-\,\varepsilon \frac{du}{dt} = \left(\frac{1}{2} - a\right) + u$$

qui s'annule pour $t = x\,(\mathrm{M})$, solution qui a pour expression:

$$u = \left(\frac{1}{2} - a\right)\left[e^{\frac{x(\mathrm{M})-t}{\varepsilon}} - 1\right].$$

D'après la remarque faite au début de cette étude, t est borné inférieurement; $x(\mathrm{M})$ et ε sont fixes. Donc lorsque a tend vers $\frac{1}{2}$, la différence $x - t$ tend vers zéro.

Le point S' était fixe. Faisons-le tendre vers S. A chaque position de S' correspond une valeur de a telle qu'il existe une courbe de première catégorie coupant la droite d'ordonnée $-\frac{\pi}{2}$ en un point situé aussi près que l'on veut de S'; et par suite ce point tend vers S. *Le point* T, étant situé entre ce point et le point S, *tend vers* S *lorsque* a *tend vers* $\frac{1}{2}$.

26. — *Propriétés asymptotiques de la courbe de deuxième catégorie.* — L'équation (F) peut se mettre sous la forme:

$$\frac{dy}{dx} = [a(1 + \operatorname{tg}^2 y) + \operatorname{tg} y] - \operatorname{tg} y (1 - \operatorname{th} x) . \qquad (F')$$

La quantité $a(1 + \operatorname{tg}^2 y) + \operatorname{tg} y$ est de l'ordre de grandeur de $y - y_0''$. D'une façon plus précise le rapport $\dfrac{a(1 + \operatorname{tg}^2 y) + \operatorname{tg} y}{y - y_0''}$ tend vers la quantité:

$$\alpha = \frac{2\sqrt{1 - 4a^2}}{1 + \sqrt{1 - 4a^2}}$$

lorsque x tend vers $+\infty$.

De même $- \operatorname{tg} y (1 - \operatorname{th} x)$ est de l'ordre de grandeur de e^{-2x}; le rapport $\dfrac{-\operatorname{tg} y (1 - \operatorname{th} x)}{e^{-2x}}$ tend vers la quantité:

$$\beta = \frac{4a}{1 + \sqrt{1 - 4a^2}} .$$

Lorsque x est suffisamment grand, le coefficient angulaire de la courbe de deuxième catégorie est inférieur à $\beta(1 + \varepsilon)e^{-2x}$, ε étant une constante positive arbitrairement petite. On en déduit que la fonction $y + \dfrac{\beta(1 + \varepsilon)}{2} e^{-2x}$ est décroissante, et par suite supérieure à sa valeur limite y_0''. D'où l'inégalité:

$$y_0'' - y < \frac{1}{2}\beta(1 + \varepsilon)e^{-2x} . \qquad (11)$$

D'après l'équation (F′), on a, dès que x dépasse une constante dépendant seulement de ε:

$$\frac{dy}{dx} > -\frac{\alpha\beta}{2}(1 + \varepsilon)^2 e^{-2x} + \beta(1 - \varepsilon)e^{-2x}$$

α étant inférieur à 1, lorsque ε est suffisamment petit l'inégalité précédente entraîne *a fortiori* l'inégalité:

$$\frac{dy}{dx} > \frac{\beta}{2}(1 - \varepsilon)e^{-2x}$$

et en intégrant:

$$y_0'' - y > \frac{\beta}{4}(1 - \varepsilon)e^{-2x} . \qquad (11')$$

D'où la propriété asymptotique suivante, déduite des inégalités (11) et (11'):

Lorsque x *tend vers* $+\infty$, *le produit* $(y''_0 - y)e^{2x}$ *reste compris, sur la courbe de deuxième catégorie, entre deux constantes positives.*

27. — *Courbes asymptotes à la droite d'ordonnée* y'_0. — Aux environs de cette droite, la quantité $a(1 + \mathrm{tg}^2\, y) + \mathrm{tg}\, y$ est de l'ordre de grandeur de $y'_0 - y$. D'une façon plus précise, le rapport

$$\frac{a(1 + \mathrm{tg}^2 y) + \mathrm{tg}\, y}{y'_0 - y}$$

tend, lorsque y tend vers y'_0, vers la quantité:

$$\gamma = \frac{\sqrt{1 - 4a^2}\left(1 + \sqrt{1 - 4a^2}\right)}{2a^2} = \frac{2\sqrt{1 - 4a^2}}{1 - \sqrt{1 - 4a^2}}$$

en étant supérieur à γ lorsque y est inférieur à y'_0, et inférieur à γ lorsque y est supérieur à y'_0.

La quantité: $-\mathrm{tg}\, y\,(1 - \mathrm{th}\, x)$ est de l'ordre de grandeur de e^{-2x}. D'une façon plus précise, le rapport $\dfrac{-\mathrm{tg}\, y(1 - \mathrm{th}\, x)}{e^{-2x}}$ tend vers la quantité:

$$\delta = \frac{1 + \sqrt{1 - 4a^2}}{a} = \frac{4a}{1 - \sqrt{1 - 4a^2}}$$

quand x augmente indéfiniment, et quand y tend vers y'_0. Ce rapport est inférieur à δ lorsque y est supérieur à y'_0. On ne peut rien dire lorsque y est inférieur à y'_0.

28. — *Courbes de troisième catégorie.* — On suppose y supérieur à y'_0, et x assez grand. Le coefficient angulaire $\dfrac{dy}{dx}$ vérifie alors les inégalités:

$$\frac{dy}{dx} < \gamma(1 - \varepsilon)(y'_0 - y) + \delta e^{-2x} \qquad (12)$$

$$\frac{dy}{dx} > \gamma(y'_0 - y) + \delta(1 - \varepsilon)e^{-2x}\,. \qquad (12')$$

ε est une constante positive, dépendant de la position du point M_1 de coordonnées $(x_1\, y_1)$ à partir duquel on étudie la branche de la courbe intégrale. ε est arbitrairement petit, pourvu que ce point soit situé assez loin.

La courbe intégrale étudiée est donc, pour x supérieur à x_1, située constamment au-dessus de l'intégrale de l'équation:

$$\frac{dy}{dx} = \gamma(y'_0 - y) + \delta(1 - \varepsilon)e^{-2x}$$

issue du point M_1, et constamment au-dessous de l'intégrale de l'équation:

$$\frac{dy}{dx} = \gamma(1 - \varepsilon)(y'_0 - y) + \delta e^{-2x}$$

issue du point M_1. Par suite, la courbe intégrale vérifie les inégalités:

$$y - y'_0 \leqq Ce^{-\gamma(1-\varepsilon)x} + \frac{\delta}{\gamma(1 - \varepsilon) - 2}e^{-2x}$$

$$y - y'_0 \geqq C'e^{-\gamma x} + \frac{\delta(1 - \varepsilon)}{\gamma - 2}e^{-2x}.$$

Lorsque γ est égal à 2, cette inégalité doit être remplacée par la suivante:

$$y - y'_0 \geqq [C'' + \delta(1 - \varepsilon)x]e^{-2x}$$

C, C′, ou, le cas échéant, C″, sont des constantes déterminées par la condition que ces inégalités, se transforment en égalités au point M_1.

Lorsque γ est supérieur à $2\left(a < \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $y - y'_0$ est de l'ordre de e^{-2x}. Lorsque γ est inférieur à $2\left(a > \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, C et C′ sont positifs, et $y - y'_0$ est d'un ordre compris entre $e^{-\gamma x}$ et $e^{-\gamma(1-\varepsilon)x}$. Lorsque $\gamma = 2\left(a = \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ $y - y'_0$ est d'un ordre compris entre e^{-2x} et xe^{-2x}.

29. — *Courbes de quatrième catégorie.* — Elles satisfont aux inégalités:

$$\frac{dy}{dx} < \gamma(1 + \varepsilon)(y'_0 - y) + \delta(1 + \varepsilon)e^{-2x} \tag{13}$$

$$\frac{dy}{dx} > \gamma(y'_0 - y) + \delta(1 - \varepsilon)e^{-2x} \tag{13'}$$

à partir d'un point M_1; la constante positive ε est arbitrairement petite et ne dépend que de la position de M_1. L'étude se poursuit parallèlement à la précédente. La dernière inégalité entraîne soit l'inégalité:

$$y'_0 - y \leqq C'e^{-\gamma x} + \frac{\delta(1 - \varepsilon)}{2 - \gamma}e^{-2x} \qquad (\gamma \neq 2) \tag{14'}$$

soit l'inégalité:

$$y'_0 - y \leqq [C'' - \delta(1-\varepsilon)x]e^{-2x} \qquad (\gamma = 2) \ . \qquad (14'')$$

C' et C'' sont déterminées comme plus haut. On constate immédiatement que *lorsque* γ *est supérieur ou égal à* 2, quelle que soit la valeur de C' ou de C'', $y'_0 - y$ finit par devenir négatif: donc *il n'existe pas de courbe de* 4^{me} *catégorie.*

Lorsque γ est inférieur à $2\left(a > \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $y'_0 - y$ satisfait aux inégalités (14') et:

$$y'_0 - y \geqq Ce^{-\gamma(1+\varepsilon)x} + \frac{\delta(1+\varepsilon)}{2-\gamma(1+\varepsilon)}e^{-2x} \ . \qquad (14)$$

Pour fixer les idées, on choisira pour ε la valeur $\frac{2-\gamma}{2\gamma}$; le point M_1 peut alors être choisi à l'intérieur d'une certaine bande:

$$x \geqq x_1 \qquad y_1 \leqq y \leqq -\frac{\pi}{4}$$

et si, en outre, il est choisi sous ou sur la courbe d'équation:

$$y'_0 - y = \frac{\delta(2+\gamma)}{\gamma(2-\gamma)}e^{-2x} \ ,$$

la constante C de l'inégalité (14) est nulle, ou positive, *et la différence* $y'_0 - y$ *reste positive;* donc: *Lorsque* γ *est inférieur à* $2\left(a > \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ *il existe des courbes de quatrième catégorie.*

Sur ces courbes, $y'_0 - y$ est d'un ordre de grandeur compris entre $e^{-\gamma x}$ et $e^{-\gamma(1+\varepsilon)x}$.

30. — *Courbe-limite de quatrième catégorie.* — Le groupe des courbes intégrales de quatrième catégorie est limité à gauche, par une courbe qui fait partie de ce groupe. Donnons quelques indications sur la position du point R d'intersection de la droite d'ordonnée $-\frac{\pi}{2}$ et de cette courbe-limite.

Sur la partie de cette courbe située dans la bande définie au n° 2, le coefficient angulaire est supérieur à $\gamma(y'_0 - y) + \frac{\delta}{2}e^{-2x}$; la courbe intégrale de l'équation:

$$\frac{dy}{dx} = \gamma(y'_0 - y) + \frac{\delta}{2}e^{-2x}$$

issue du point R, est donc asymptote à la droite d'ordonnée y_0', et constamment au-dessous de cette droite, puisqu'elle est au-dessous de la courbe-limite étudiée. Il est nécessaire pour cela que l'abscisse de R soit supérieure ou égale à celle du point d'intersection de la droite d'ordonnée $-\frac{\pi}{2}$ et de la courbe:

$$y_0' - y = \frac{\delta}{2(2-\gamma)} e^{-2x} .$$

On en déduit *a fortiori* que *l'abscisse de* R *est supérieure à*

$$\frac{1}{15\left(a - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)}$$

et tend donc vers $+\infty$ *lorsque* a *tend vers* $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Etudions la position-limite de R lorsque a tend vers $\frac{1}{2}$. Les constantes γ et δ tendent respectivement vers 0 et 2.

Lorsque y est voisin de $-\frac{\pi}{4}$, le rapport: $\frac{a(1 + \operatorname{tg}^2 y) + \operatorname{tg} y}{y_0' - y}$ est voisin de 0. Choisissons, pour fixer les idées, des valeurs de y suffisamment proches de $-\frac{\pi}{4}$ pour que l'on ait l'inégalité:

$$y_0' - y \leqq -\frac{\pi}{4} - y_0' . \tag{15}$$

Cette inégalité entraîne l'inégalité:

$$\frac{dy}{dx} < \varepsilon(y_0' - y) + 2(1 + \eta) e^{-2x}$$

ε et η sont des quantités qui tendent vers zéro avec $\frac{1}{2} - a$.

L'inégalité précédente montre que l'on a:

$$y_0' - y \geqq Ce^{-\varepsilon x} + (1 + \varepsilon') e^{-2x}$$

où $1 + \varepsilon' = \frac{2(1 + \eta)}{2 - \varepsilon}$, et où la constante C est déterminée par la condition d'égalité pour le point $x_1 y_1$ à partir duquel on étudie la branche de courbe. Cette courbe est de quatrième catégorie si l'on prend:

$$y_0' - y_1 = (1 + \varepsilon') e^{-2x_1}$$

puisque C est alors nul. y_1 est limité par l'inégalité (15), nous pouvons prendre:

$$y'_0 - y_1 = -\frac{\pi}{4} - y'_\theta \qquad (15')$$

d'où:

$$-\frac{\pi}{4} - y_1 = 2(1 + \varepsilon')\, e^{-2x_1} . \qquad (16)$$

Par tout point de la courbe (16) *passe donc une courbe de quatrième catégorie.* La valeur de a correspondante est donnée par l'inégalité (15'). ε' est une fonction de a tendant vers zéro lorsque a tend vers $\frac{1}{2}$. C'est donc une fonction de x_1 tendant vers zéro quand x_1 tend vers $+\infty$.

Comparons maintenant avec les courbes du premier type $\left(a = \frac{1}{2}\right)$. Soit M un point de la courbe (16). Par M passe une courbe du premier type, et une courbe de quatrième catégorie située, entre M et la droite d'ordonnée $-\frac{\pi}{2}$, au-dessus de la courbe du premier type, d'après la remarque du n° 6. Lorsque l'abscisse de M tend vers l'infini, le point d'intersection de la droite d'ordonnée $-\frac{\pi}{2}$ et de la courbe du premier type tend vers le point S (ceci résulte de ce que sur toute courbe du premier type, le produit $x\left(-\frac{\pi}{4} - y\right)$ finit par être compris entre deux constantes positives. Donc aucune courbe du premier type ne peut être située constamment au-dessus de la courbe (16)).

Il résulte de ce qui précède que l'abscisse du point R finit par rester inférieure à une quantité aussi voisine que l'on veut de l'abscisse de S. D'autre part le point R se trouve nécessairement à droite du point T, et ce dernier point tend vers le point S (n° 25). Donc:

Lorsque a *tend vers* $\frac{1}{2}$, *le point* R *tend vers le point* S.

31. — Les portions des courbes intégrales situées dans la bande:

$$x \leqq 0 \qquad -\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq +\frac{\pi}{2}$$

se déduisent des portions étudiées jusqu'ici par symétrie par rapport à O.

On passe ensuite à une courbe intégrale tout entière par translation parallèle à l'axe Oy [1].

---

[1] Les courbes (γ) et (δ) (voir la note du n° 9) possèdent, lorsque x tend vers $+\infty$, des asymptotes.

On peut se borner à la construction du groupe d'intégrales asymptotes, lorsque x tend vers $+\infty$, aux droites y'_0 et y''_0. Ce groupe admet comme courbe-limite à gauche la courbe de deuxième catégorie (par

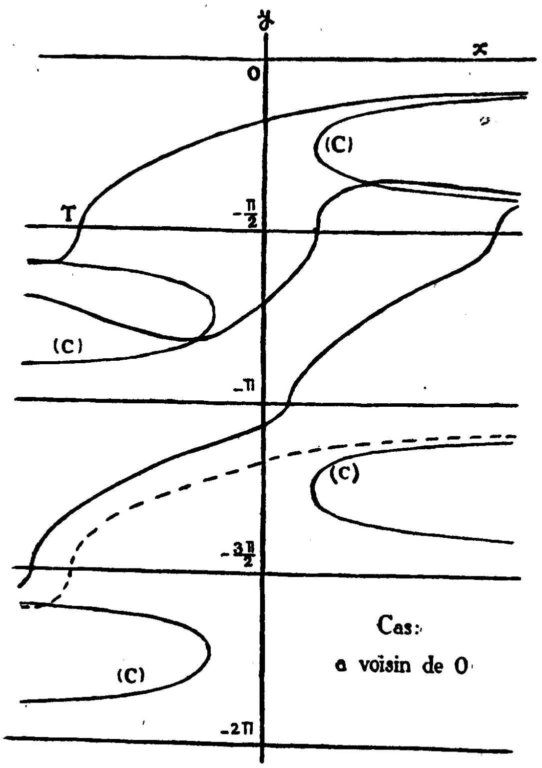

Fig. 3.

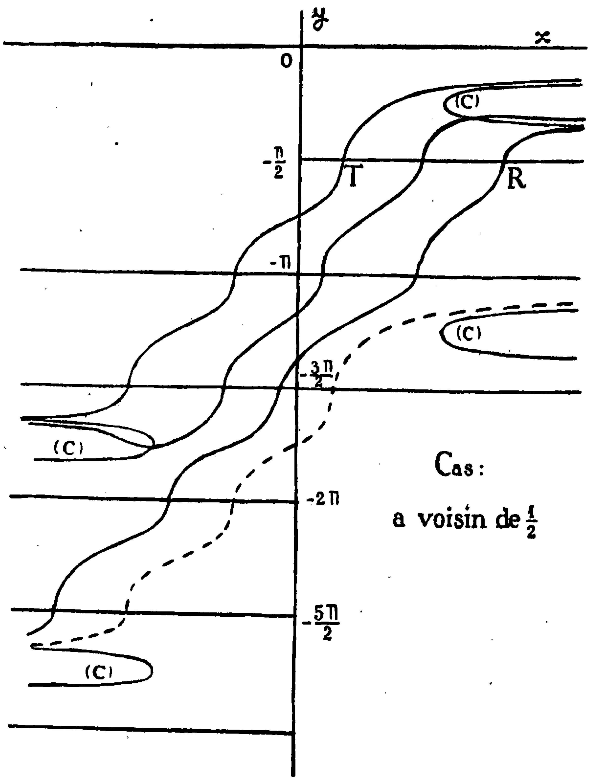

Fig. 4.

rapport à y''_0) et comme courbe-limite à droite la même, à laquelle on a fait subir une translation de $-\pi$ parallèlement à Oy. Cette dernière courbe-limite ne fait pas partie du groupe. Elle est tracée en pointillé sur les figures.

Les cas de a voisin de O, a voisin de $\frac{1}{2}$ fournissent deux genres de figures.