

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 29 (1930)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE.

Artikel: MOUVEMENT NORMAL
Autor: Toscano, Letterio
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-23256>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 05.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

MOUVEMENT NORMAL

PAR

Letterio TOSCANO (à Messině).

Dans cette note, nous nous proposons de traiter un problème de géométrie cinématique.

Nous appelons mouvement normal celui-là dont la droite qui porte l'accélération du point mobile est perpendiculaire au rayon vecteur par rapport à un point O.

Soit le point O l'origine d'un trièdre $Oxyz$ et, suivant la méthode vectorielle, l'équation caractéristique du mouvement normal du point P est

$$\frac{d^2 \mathbf{P}}{dt^2} \times (\mathbf{P} - \mathbf{O}) = 0 \quad (1)$$

On a identiquement

$$\frac{d^2 (\mathbf{P} - \mathbf{O})^2}{dt^2} = 2 \frac{d}{dt} \left[\frac{d\mathbf{P}}{dt} \times (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \right] = 2 \frac{d^2 \mathbf{P}}{dt^2} \times (\mathbf{P} - \mathbf{O}) + 2 \left(\frac{d\mathbf{P}}{dt} \right)^2 ;$$

et pour un mouvement normal

$$2 \left(\frac{d\mathbf{P}}{dt} \right)^2 = \frac{d^2 (\mathbf{P} - \mathbf{O})^2}{dt^2} .$$

Si r est la grandeur du vecteur $\mathbf{P} - \mathbf{O}$ et V la grandeur de la vitesse du point P, la dernière relation peut s'écrire

$$2V^2 = \frac{d^2 r^2}{dt^2} .$$

ou

$$V^2 = \frac{d}{dt} \left(r \frac{dr}{dt} \right) = \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r \frac{d^2 r}{dt^2} \quad (2)$$

A cette conclusion, on peut parvenir en appliquant les composantes de la vitesse et de l'accélération suivant le rayon vecteur, la tangente au méridien et la tangente au parallèle qui passent par le point mobile P, par référence aux coordonnées sphériques.

On a les formules

$$v_r = \frac{dr}{dt}, \quad v_\varphi = r \frac{d\theta}{dt}, \quad v_\theta = r \sin \theta \frac{d\varphi}{dt}$$

$$W_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - r \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2$$

$$W_\varphi = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) - r \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2$$

$$W_\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{d}{dt} \left(r^2 \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{dt} \right)$$

Dans notre problème on doit avoir $W_r = 0$ et par là

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + r \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2. \quad (3)$$

La vitesse est alors donnée par la

$$\begin{aligned} V^2 &= v_r^2 + v_\varphi^2 + v_\theta^2 = \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \\ &= \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r \frac{d^2 r}{dt^2}. \end{aligned}$$

On peut encore écrire (3) sous la forme

$$r \frac{dv_r}{dt} = (v_\varphi)^2 + (v_\theta)^2.$$

Pour un mouvement plan quelconque, on a

$$V^2 = \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2;$$

si le mouvement est normal on aura

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

et enfin

$$V^2 = \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r \frac{d^2 r}{dt^2}.$$

On trouve ainsi la proposition :

Dans un mouvement normal la vitesse a la même expression pour un mouvement de l'espace aussi bien que pour un mouvement plan.

Nous considérerons ensuite les mouvements plans. L'accélération est donnée par (coordonnées polaires)

$$W = 2 \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2\theta}{dt^2} .$$

Mais

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \right) = \frac{d^2r}{d\theta^2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{dr}{d\theta} \frac{d^2\theta}{dt^2} = r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

et de là

$$\frac{dr}{d\theta} \frac{d^2\theta}{dt^2} = \left(r - \frac{d^2r}{d\theta^2} \right) \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 .$$

L'expression de W donne

$$W = \left[2 \frac{dr}{d\theta} + \frac{r - \frac{d^2r}{d\theta^2}}{\frac{d \log r}{d\theta}} \right] \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

et cette dernière expression donne l'accélération dans un mouvement normal plan.

Pour la vitesse, on a encore

$$\begin{aligned} v^2 &= \left[\frac{1}{r} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 + r \right] r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \left[\frac{1}{r} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 + r \right] \frac{d^2r}{dt^2} = \\ &= r \left[\left(\frac{d \log r}{d\theta} \right)^2 + 1 \right] \frac{d^2r}{dt^2} . \end{aligned}$$

Examinons *quelques applications* :

1. La trajectoire est une spirale logarithmique $\rho = \rho_0 e^{-b\theta}$.

On a

$$\frac{d\rho}{d\theta} = -b\rho , \quad \frac{d^2\rho}{d\theta^2} = b^2\rho , \quad \frac{d \log \rho}{d\theta} = -b ,$$

et alors

$$W = \left[-2b\rho + \rho \frac{1-b^2}{-b} \right] \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 ,$$

$$W = -\rho \frac{1+b^2}{b} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 .$$

Par là si la trajectoire relative au mouvement normal d'un point est une spirale logarithmique, l'accélération a l'expression analogue au cas dans lequel un point parcourt une spirale logarithmique avec vitesse angulaire constante par rapport au pôle.

En effet, dans ce cas on a

$$W = \omega^2 (b^2 + 1) \rho$$

avec $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \text{const.}$

2. La trajectoire est une spirale hyperbolique $\rho\theta = k$.

On a

$$\frac{d\rho}{d\theta} = -\frac{1}{k}\rho^2, \quad \frac{d^2\rho}{d\theta^2} = \frac{2}{k^2}\rho^3, \quad \frac{d \log \rho}{d\theta} = -\frac{1}{k}\rho,$$

et alors

$$W = -k \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2.$$

Aussi: Si un point parcourt une spirale hyperbolique avec mouvement normal par rapport au pôle, l'accélération est indépendante du rayon vecteur et elle est directement proportionnelle au carré de la vitesse angulaire.

3. La trajectoire est une spirale d'Archimède $\rho = \theta$.

On a

$$\frac{d\rho}{d\theta} = 1, \quad \frac{d^2\rho}{d\theta^2} = 0, \quad \frac{d \log \rho}{d\theta} = \frac{1}{\rho},$$

et alors

$$W = (2 + \rho^2) \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2.$$

4. La trajectoire est la courbe $\rho = \text{tg } \theta$.

On a

$$\frac{d\rho}{d\theta} = 1 + \rho^2, \quad \frac{d^2\rho}{d\theta^2} = 2\rho(1 + \rho^2), \quad \frac{d \log \rho}{d\theta} = \frac{1}{\rho}(1 + \rho^2),$$

et alors

$$W = \left[2 + \frac{\rho^2}{1 + \rho^2} \right] \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2.$$

5. La trajectoire est la courbe $\rho = \frac{1}{\cos \theta}$.

On a

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \rho \operatorname{tg} \theta, \quad \frac{d^2\rho}{d\theta^2} = \rho \operatorname{tg}^2 \theta + \rho^3, \quad \frac{d \log \rho}{d\theta} = \operatorname{tg} \theta.$$

L'accélération est nulle et l'on a aussi un exemple de mouvement plan normal avec accélération nulle.

Considérons ici le problème inverse et déterminons tous les mouvements normaux et plans dont les accélérations sont de la forme

$$W = k\rho \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.$$

Le problème dépend de l'équation différentielle

$$2\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 + \rho^2 = \rho \frac{d^2\rho}{d\theta^2} + k\rho \frac{d\rho}{d\theta}.$$

En divisant par ρ^2 et introduisant les logarithmes on passe à

$$2\left(\frac{d \log \rho}{d\theta}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\rho} \frac{d^2\rho}{d\theta^2} + \frac{d \log \rho}{d\theta}.$$

En outre

$$\frac{1}{\rho} \frac{d^2\rho}{d\theta^2} = \frac{d^2 \log \rho}{d\theta^2} + \left(\frac{d \log \rho}{d\theta}\right)^2$$

et de là

$$\frac{d^2 \log \rho}{d\theta^2} = \left(\frac{d \log \rho}{d\theta}\right)^2 - \frac{d \log \rho}{d\theta} + 1.$$

En posant $\log \rho = s$ et $\frac{ds}{d\theta} = u$, il suit

$$\frac{du}{u^2 - u + 1} = d\theta$$

et par intégration

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc} \cotg \frac{2u - 1}{\sqrt{3}} = \theta + \theta_0$$

$$u = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{3}}{2} (\theta + \theta_0).$$

De plus haut, on a

$$\rho = e^{\frac{1}{2}\theta - \log \cos \frac{\sqrt{3}}{2}(\theta + \theta_0) + c};$$

posons $e^c = \rho_0$ et enfin on trouve

$$\rho = \rho_0 e^{\frac{1}{2}\theta - \log \cos \frac{\sqrt{3}}{2}(\theta + \theta_0)}$$

qui donne une spirale logarithmique.

ÉTUDE D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE:

$$\frac{dy}{dx} = a(1 + \operatorname{tg}^2 y) + \operatorname{tg} y \operatorname{th} x \quad (F)$$

PAR

H. MILLOUX (Strasbourg).

Cette équation différentielle est extraite du problème de Calcul différentiel et Intégral donné, en 1928, au Concours de l'Agrégation des Sciences Mathématiques.

M. Gambier a publié, dans l'*Enseignement Mathématique*, une solution complète du problème. Il m'a semblé intéressant de reprendre à part, et d'une façon en général indépendante du problème, l'étude de l'équation (F): recherche de tous les types de courbes intégrales, propriétés aux environs des asymptotes $\left(a \leq \frac{1}{2}\right)$ ou des courbes périodiques asymptotes $\left(a > \frac{1}{2}\right)$, variations, en fonction de a , lorsque a ne surpasse pas $\frac{1}{2}$, de certaines courbes intégrales spéciales.

1. — Traitons d'abord brièvement le cas: $a = 0$. L'équation (F) s'intègre immédiatement et donne:

$$\sin y = \frac{\sin y_0}{\operatorname{ch} x_0} \operatorname{ch} x.$$

Nous n'insisterons pas sur ce cas simple.