

<b>Zeitschrift:</b>	L'Enseignement Mathématique
<b>Herausgeber:</b>	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
<b>Band:</b>	29 (1930)
<b>Heft:</b>	1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE.
 <b>Artikel:</b>	 SUR LE LANCEMENT DU PENDULE PAR MODIFICATION DE SA LONGUEUR
<b>Autor:</b>	Thiry, R.
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-23255">https://doi.org/10.5169/seals-23255</a>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 07.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# SUR LE LANCEMENT DU PENDULE PAR MODIFICATION DE SA LONGUEUR

PAR

R. THIRY (Strasbourg).

---

1. — C'est un problème bien connu que celui qui consiste à étudier le lancement d'une balançoire par déplacement du centre de gravité de la personne qui y est montée; cependant les ouvrages qui en parlent ne le font pas toujours avec une clarté parfaite et l'on y trouve même certains raisonnements qui n'entraînent guère la conviction.

Le mécanisme du lancement est théoriquement très simple; l'individu monté sur la balançoire se tient debout pendant chaque demi-oscillation ascendante et s'accroupit pendant chaque demi-oscillation descendante. Pour réaliser ces positions, il doit donc fléchir les jambes au moment où l'appareil est à fin de course et se relever à chaque passage par la verticale. Le centre de gravité décrit ainsi dans l'espace une sorte de 8. L'expérience montre que l'amplitude s'accroît à chaque oscillation.

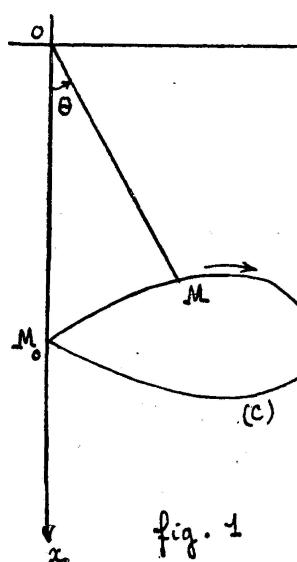
On cherche souvent à donner de ce phénomène une explication mécanique quantitative en supposant que les mouvements de fléchissement et de redressement se font suffisamment brusquement pour que, pendant leur durée, la balançoire n'ait pas sensiblement changé d'orientation. Or cette hypothèse est une source de difficultés et les quelques réflexions qui vont suivre pourront peut-être ne pas paraître complètement inutiles.

2. — Pour réduire l'étude du phénomène à ses parties essentielles, nous considérerons seulement le problème sous la forme schématique suivante:

Un pendule simple est formé d'un point matériel  $M$ , de masse  $m$ ; le fil qui supporte ce point (fil inextensible dont on néglige la masse) passe en  $O$  dans un petit anneau fixe. L'expérimentateur tient en main l'extrémité libre du fil et règle à sa guise la longueur utile  $OM$ .

Ceci constitue le pendule simple à longueur variable et l'étude de ses oscillations est bien connue. Dans ce problème, on regarde en général la longueur  $OM = r$  comme étant une fonction connue du temps, l'étude du mouvement est alors relativement compliquée<sup>1</sup>. Pour notre but, à nous, il sera plus commode de regarder  $r$  comme étant une fonction donnée de l'angle d'écart  $\theta$ . C'est du reste ce point de vue qu'adopte l'amateur de balançoire, qui effectue ses mouvements, non pas d'après un rythme prévu à l'avance, mais bien lorsque l'angle d'écart passe par un extremum ou par la valeur 0.

Rapportons donc le pendule aux axes qu'indique la figure et étudions ce qui se passe pour les valeurs de  $\theta$  comprises entre



0 et  $\pi$ . Nous supposerons qu'à un certain moment le point  $M$ , venant de la gauche, passe par la verticale en un point  $M_0$ , le pendule ayant alors la vitesse angulaire  $\omega_0$ . En agissant sur la longueur du fil pendant les deux demi-oscillations simples suivantes, nous ferons décrire au point  $M$  un contour (C) fermé. Nous nous proposons de calculer la vitesse angulaire  $\Omega$  du pendule à son nouveau passage au point  $M_0$ , cette fois en venant de droite.

Or, le théorème des moments cinétiques par rapport au point O nous donne

$$\frac{d}{dt} \left( r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = -gr \sin \theta.$$

En posant  $\frac{d\theta}{dt} = \omega$ , cette équation devient

$$r^2 \omega \frac{d}{d\theta} (r^2 \omega) = -gr^3 \sin \theta.$$

<sup>1</sup> Le cas simple où  $r$  varie linéairement en fonction du temps fait intervenir les fonctions de Bessel.

On en tire immédiatement pour la valeur de la vitesse angulaire au point M

$$\omega^2 = \frac{1}{r^4} \left[ r_0^4 \omega_0^2 - 2g \int_{M_0 M} r^3 \sin \theta \, d\theta \right] \quad (1)$$

et si en particulier nous appliquons cette formule au contour (C) tout entier, nous en tirerons

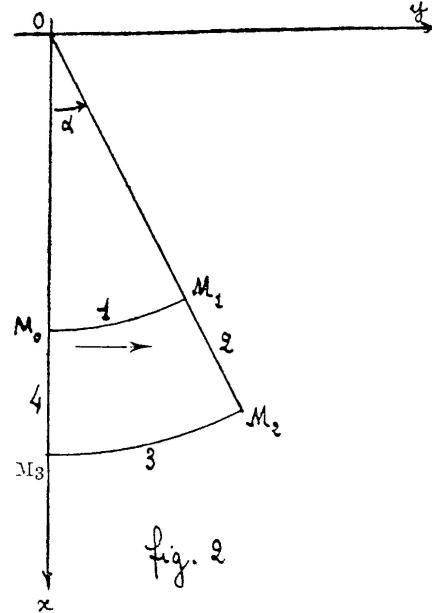
$$\Omega^2 = \omega_0^2 - \frac{2g}{r_0^4} \int_C r^3 \sin \theta \, d\theta \quad (2)$$

formule qui résoud le problème posé.

Le signe de l'intégrale dépend du sens dans lequel le parcours est effectué. Le cas de la figure, où la courbe (C) est parcourue dans le sens de la flèche, correspond à une intégrale négative, donc à un accroissement de  $\omega$  (c'est-à-dire de l'énergie cinétique du pendule). Ces conclusions seraient renversées si  $\theta$  était compris entre  $-\pi$  et 0 ; on voit donc qu'en faisant décrire au point M une sorte de 8 dont le point double serait sur la verticale du point de suspension, les oscillations s'amplifieront ou au contraire s'amortiront, suivant le sens dans lequel ce 8 sera parcouru.

3. — Il nous est maintenant facile d'appliquer la formule précédente au cas schématique où les allongements et les raccourcissements de la longueur du pendule sont presque instantanés. En nous plaçant dans le cas du lancement, la courbe (C) est alors un secteur de couronne circulaire parcouru dans le sens indiqué par la flèche. Nous appellerons  $r_0$  la longueur initiale  $OM_0$ ,  $h$  la variation qu'on fait subir à cette longueur,  $\alpha$  l'angle d'écart maximum. La formule générale établie plus haut devient alors

$$\Omega^2 = \omega_0^2 + \frac{2g}{r_0^4} (1 - \cos \alpha) \left[ (r_0 + h)^3 - r_0^3 \right] .$$



Or le théorème des forces vives, appliqué à la première demi-oscillation ascendante, donne

$$\frac{1}{2} m r_0^2 \omega_0^2 = m g r_0 (1 - \cos \alpha) , \quad (3)$$

ce qui permet d'écrire l'expression de  $\Omega^2$  sous la forme

$$\Omega^2 = \omega_0^2 \left( \frac{r_0 + h}{r_0} \right)^3 . \quad (4)$$

4. — Cette formule peut naturellement être trouvée par un calcul direct, il n'est peut-être pas mauvais que nous le reprenions rapidement. Nous décomposerons le mouvement dans ses quatre phases numérotées de 1 à 4 sur la figure et nous représenterons par " $\omega_i$ " la vitesse angulaire à la fin de la phase de rang  $i$ .

" $\omega_1$ " et " $\omega_2$ " seront par suite nulles et " $\omega_4$ " coïncidera avec la vitesse angulaire finale  $\Omega$  du paragraphe précédent.

Le théorème des forces vives, appliqué respectivement aux phases 1 et 3, donnera les deux équations

$$r_0 \omega_0^2 = 2g(1 - \cos \alpha) ,$$

$$(r_0 + h) \omega_3^2 = 2g(1 - \cos \alpha) .$$

Et le théorème des moments cinétiques autour du point O, appliqué à la phase 4, nous donnera

$$r_0^2 \omega_4 = (r_0 + h)^2 \omega_3 .$$

D'où, par élimination de  $\omega_3$  et de  $\alpha$  la formule

$$\omega_4^2 = \omega_0^2 \left( \frac{r_0 + h}{r_0} \right)^3 , \quad (4')$$

identique à celle trouvée précédemment.

5. — Il est hors de doute que la partie de ce raisonnement qui puisse laisser quelque hésitation est celle qui concerne l'application du théorème des moments cinétiques à la phase 4. La tension du fil devrait être capable d'amener en un temps extrêmement court le point M de la position  $M_3$  à la position  $M_0$ , avec

une vitesse radiale nulle au départ et à l'arrivée. Ce devrait donc être une de ces forces, sortes d'hyperpercussions, auxquelles Darboux fait allusion dans sa note classique sur la théorie des percussions (Voir DESPEYROUX, *Cours de Mécanique*, Tome II, p. 459, en note). A une accélération considérable vers le haut devrait donc succéder une accélération considérable vers le bas et il serait impossible que dans ces conditions le fil restât tendu. On peut du reste faire une remarque de même genre pour la phase 2, dans laquelle il est impossible, avec une tension positive, que le mobile dépasse la verticale du point  $M_1$ . La méthode générale que nous avons exposée plus haut est à l'abri de ces critiques puisqu'elle considère seulement le cas schématique comme un cas limite, elle permettrait du reste de faire au besoin le calcul de la tension<sup>1</sup>.

6. — Enfin mentionnons encore, pour terminer, une autre méthode de résolution du problème schématique (cf. BÉGHIN, *Statique et Dynamique*, Tome II, p. 119, Ex. 380).

Appliquons tout d'abord le théorème des forces vives dans le mouvement absolu à l'ensemble des quatre phases, nous obtiendrons

$$\frac{1}{2} m r_0^2 (\omega_4^2 - \omega_0^2) = \mathfrak{T} . \quad (5)$$

$\mathfrak{T}$  représentant le travail total de la tension du fil.

Considérons, d'autre part, des axes mobiles OXY, d'origine O et tournant avec le pendule de telle sorte que OM coïncide toujours avec OX et appliquons encore le théorème des forces vives à l'ensemble du mouvement, mais cette fois-ci dans le mouvement relatif par rapport aux nouveaux axes.

<sup>1</sup> Une petite remarque complémentaire montrera peut-être encore mieux combien il serait facile de commettre une erreur dans l'évaluation de ce qui se passe pendant cette phase 4. Supposons qu'au lieu d'être constitué par un fil, le pendule soit formé d'un cercle matériel sur lequel le point M glisserait sans frottement et que, pendant la phase en question, on élève brusquement ce cercle de la hauteur  $h$ , *sans changer son rayon*. L'effort à exercer serait d'une nature analogue à celui que nous avons considéré dans le cas que nous étudions plus haut et cependant le théorème qu'il faudrait appliquer dans cette phase serait celui de la conservation de la quantité de mouvement en projection sur l'axe Oy, ce qui conduit à la conservation de la vitesse perpendiculaire à OM, c'est-à-dire à l'équation

$$r_0 \omega_4 = (r_0 + h) \omega_3 .$$

Les différents travaux qui interviennent alors sont les suivants:

*Travail de la tension du fil.* Il a évidemment la même valeur  $\mathfrak{C}$  que dans le mouvement absolu puisqu'il dépend seulement des variations de  $r$ .

*Travail de la pesanteur.* Il est nul dans les phases 1 et 3 qui correspondent à un repos relatif, il est égal à  $+mgh \cos \alpha$  dans la phase 2 et à  $-mgh$  dans la phase 4.

*Travail des forces d'inertie.* Il est nul dans les phases 1 et 3 pour la même raison que ci-dessus, il est nul aussi dans la phase 2 car alors les forces d'inertie d'entraînement sont nulles, enfin il est égal à

$$\int_{r_0+h}^{r_0} m\omega^2 r dr$$

dans la phase 4.

*Travail des forces d'inertie complémentaires.* Il est nul, comme on le sait, en toute hypothèse, puisque ces forces sont toujours perpendiculaires au déplacement relatif du point matériel.

L'équation des forces vives dans le mouvement relatif s'écrit alors

$$0 = \mathfrak{C} - mgh(1 - \cos \alpha) + \int_{r_0+h}^{r_0} m\omega^2 r dr. \quad (6)$$

L'intégrale se calcule immédiatement, en tenant compte de la relation  $\omega r^2 = \omega_4 r_0^2$  (conservation du moment cinétique par rapport à O dans la phase 4) et devient

$$\int_{r_0+h}^{r_0} m\omega^2 r dr = m\omega_4^2 r_0^4 \int_{r_0+h}^{r_0} \frac{dr}{r^3} = \frac{1}{2} m\omega_4^2 r_0^4 \left[ \frac{1}{(r_0 + h)^2} - \frac{1}{r_0^2} \right].$$

On en tire, en éliminant  $\mathfrak{C}$  entre les équations (5) et (6) et en remplaçant  $\alpha$  par sa valeur tirée de (3) une valeur de  $\omega_4$  identique à celle donnée par la formule (4').

Cette méthode donne prise aux critiques qui ont été faites plus haut sur ce qui se passe dans la phase 4, elle présente cependant sur les méthodes précédentes l'avantage de s'appliquer facilement au cas où la balançoire formerait un véritable système matériel et ne serait plus réduite à un pendule simple.