1. — Suites de points régulières et singulières.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **29 (1930)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE.**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

1. — Suites de points régulières et singulières.

Deux paramètres binaires $\tau_1 : \tau_2$ et $\sigma_1 : \sigma_2$ étant donnés en notation homogène, je désignerai par:

$$(\tau\sigma) = \tau_1\sigma_2 - \tau_2\sigma_1 \tag{1}$$

le déterminant dont l'évanouissement est la condition nécessaire et suffisante pour que ces deux paramètres soient identiques.

Soient de même:

$$x_1 : x_2 : x_3 \qquad \text{et} \qquad u_1 : u_2 : u_3 \tag{2}$$

les coordonnées homogènes d'un point x et d'une droite u. Je désignerai par:

$$(ux) = u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 \tag{3}$$

l'expression qui s'annule si le point est sur la droite. J'écrirai enfin:

$$(pqr) \qquad \text{et} \qquad (uvw) \tag{4}$$

pour les déterminants formés des coordonnées de trois points p, q, r ou de trois droites u, v, w.

Considérons la forme linéaire en u et τ:

$$(um)(\mu\tau) \equiv (u_1m_1 + u_2m_2 + u_3m_3)(\mu_1\tau_2 - \mu_2\tau_1) \ . \tag{5}$$

Ici m_i et μ_k sont des symboles qui, en général, n'ont seuls aucune signification réelle. Un produit $m_i\,\mu_k$ seulement a toujours un sens réel et représente un nombre complexe, un des six coefficients de la forme (5). Si, dans l'équation:

$$(um)(\mu\tau) = 0 \ , \tag{6}$$

τ est, pour le moment, un paramètre fixe, (6) est l'équation d'un point. Des paramètres binaires τ différents donnent différents points ternaires qui sont tous sur une droite dont (6) est une représentation paramétrique. *L'équation* (6) *est donc l'expression analytique pour une suite de points. Les coefficients* $\mathrm{m}_i\mu_k$ *de l'équation sont les six coordonnées homogènes de cette suite de points.*

Si, au contraire, dans l'équation (6), les u_i sont regardés comme coordonnées d'une droite fixe, le paramètre τ, solution de l'équation linéaire résultante est le paramètre du point d'intersection de la droite u et de la suite de points.

Pour obtenir l'équation de la droite représentée par (6) joignons deux points différents τ et σ:

$$m\,(\mu\tau) \qquad \text{et} \qquad m'\,(\mu'\sigma)\ [1] \tag{7}$$

Or:

$$(xmm')\,(\mu\tau)\,(\mu'\sigma) = \frac{1}{2}\,(xmm')\,(\mu\mu').(\tau\sigma) \tag{8}$$

L'équation de la droite cherchée s'obtient donc en annulant la forme:

$$(ux) = \frac{1}{2}\,(xmm')\,(\mu\mu')\ . \tag{9}$$

Il y a exception dans le cas où cette expression s'annule identiquement. Ce cas échéant la forme $(um)(\mu\tau)$ se décompose en deux facteurs, un ternaire et un binaire, dont chacun a une signification réelle:

$$(um).(\mu\tau)\ .\ [2] \tag{10}$$

Annulé le premier donne l'équation d'un point m, le deuxième l'équation d'un paramètre μ. Nous appelerons *suite de points singulière* cette figure formée par l'ensemble d'un point m et d'un paramètre binaire μ.

2. Représentation des suites de points dans un espace E_5.

Interprétons les six coordonnées homogènes d'une suite de points comme coordonnées d'un point d'un espace projectif E_5 à 5 dimensions. A chaque point de cet espace correspondra une suite de points et réciproquement. *Les suites de points singulières auront comme images les points d'une variété* V_3 *à trois dimensions* dont la représentation paramétrique est immédiate:

$$m_1.\mu_1 : m_2.\mu_1 : m_3.\mu_1 : m_1.\mu_2 : m_2.\mu_2 : m_3.\mu_2\ , \tag{11}$$

[1] L'accentuation est nécessaire pour éviter la confusion des deux séries de symboles correspondants.

[2] Le point servira toujours pour séparer des expressions symboliques ayant par elles-mêmes une signification réelle.