Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 29 (1930)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE.

Artikel: APPLICATIONS DE L'ANALYSE VECTORIELLE A LA GÉOMÉTRIE
Autor: Pylarinos, O.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-23250

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

APPLICATIONS DE L'ANALYSE VECTORIELLE A LA GÉOMÉTRIE

PAR

O. PYLARINOS (Athènes).

---

1. — Soit

$$\varphi(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

l'équation d'une surface rapportée à un système d'axes rectangulaires $Oxyz$.

Nous supposerons dans ce qui suit, que la fonction $\varphi(x, y, z)$ est déterminée et dérivable par rapport aux variables x, y, z et que ses dérivées du premier et du second ordre par rapport à ces variables ont aussi une valeur déterminée à chaque point d'une portion de l'espace contenant la surface (1).

Ainsi, le vecteur grad $\varphi = \nabla\varphi$ sera défini à chaque point de cette portion de l'espace appelée le *champ* du vecteur.

La dérivée de ce vecteur à un point du champ par rapport à une direction donnée peut être considérée comme le produit *contracté* du vecteur unitaire qui définit cette direction et d'un système tensoriel symétrique du second ordre ayant comme composantes les six dérivées partielles du second ordre de la fonction $\varphi(x, y, z)$ par rapport aux variables x, y, z [1].

Si $\bar{t}_0$ désigne un vecteur unitaire quelconque, la dérivée de grad φ par rapport à la direction de ce vecteur à un point quelconque du champ est

$$\left[\frac{d\,(\text{grad}\,\varphi)}{ds}\right]_{\bar{t}_0} = (\bar{t}_0\,\nabla)\ \text{grad}\,\varphi = \Phi\,.\,\bar{t}_0\ ,$$

---

[1] BUDDE, *Tensoren und Dyaden*, p. 193.

où

$$\Phi = \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \end{Bmatrix} .$$

C'est une fonction vectorielle linéaire de $\bar{t}_0$ [1].

De cette définition, en tenant compte du fait qu'un système tensoriel du second ordre définit à chaque point une transformation *linéaire (affine)* du corps des vecteurs attachés à ce point [2], résultent les propositions suivantes:

a) *Les dérivées de* grad φ *à un point du champ, par rapport à toutes les directions d'un même plan, sont des vecteurs complanaires qui menés d'un même point comme origine ont leurs extrémités sur une ellipse ayant comme centre ce point.*

b) *A deux directions normales l'une à l'autre du plan correspondent deux semidiamètres conjugués de cette ellipse.*

2. — Considérons maintenant une courbe tracée sur la surface (1).

Soit

$$\bar{r} = \bar{f}(s) \tag{2}$$

l'équation vectorielle paramétrique de cette courbe (s mesure la longueur de l'arc de cette courbe à partir d'un de ses points). Les vecteurs $\frac{d\bar{r}}{ds} \equiv \bar{t}_0$ (un vecteur unitaire) et grad φ (parallèle à la normale à chaque point de la surface (1)) sont, tout le long de cette courbe, orthogonaux et, par conséquent, leur produit scalaire

$$\bar{t}_0 \operatorname{grad} \varphi = 0 . \tag{3}$$

En différentiant la relation (3) par rapport à s nous aurons

$$\frac{d}{ds}(\bar{t}_0 \operatorname{grad} \varphi) = \bar{t}_0 \frac{d(\operatorname{grad} \varphi)}{ds} + \frac{d\bar{t}_0}{ds} \operatorname{grad} \varphi = 0 ;$$

[1] BUDDE, *Tensoren und Dyaden*, p. 8.
[2] BUDDE, *loc. cit.*, p. 67.

et comme

$$\frac{d(\text{grad}\,\varphi)}{ds} = (\bar{t}_0\nabla)\,\text{grad}\,\varphi \qquad \text{et} \qquad \frac{d\bar{t}_0}{ds} = k\bar{p}_0 \;.$$

où $\bar{p}_0$ désigne la direction positive de la normale principale de la courbe et k sa courbure, il vient

$$\frac{d}{ds}(\bar{t}_0\,\text{grad}\,\varphi) = k\bar{p}_0\,\text{grad}\,\varphi + \bar{t}_0(\bar{t}\nabla)\,\text{grad}\,\varphi = 0 \;. \qquad (4)$$

Si $\bar{p}_0$ grad $\varphi = 0$ tout le long de la courbe (2), en d'autres termes si la courbe (2) est une courbe *asymptotique* de la surface (1), nous tirons de la relation (4)

$$\bar{t}_0(\bar{t}_0\nabla)\,\text{grad}\,\varphi = 0 \;,$$

c'est-à-dire: ou bien $\bar{t}_0$ est normal à $(\bar{t}_0\,\nabla)$ grad φ ou $(\bar{t}_0\,\nabla)$ grad $\varphi = 0$.

Nous allons, plus bas, démontrer que, s'il existe sur une surface $\varphi(x, y, z) = 0$ une famille de courbes telles que $(\bar{t}_0\,\nabla)$ grad $\varphi = 0$ à chaque point de la surface, $\bar{t}_0$ désignant un vecteur unitaire parallèle à la tangente de la courbe de cette famille qui passe par ce point, la surface est un *cylindre.*

Réciproquement: si $\bar{t}_0\,(\bar{t}_0\,\nabla)$ grad $\varphi = 0$ tout le long de la courbe (2), nous tirons de la relation (4)

$$k\bar{p}_0\,\text{grad}\,\varphi = 0 \qquad \text{c'est-à-dire ou} \qquad k = 0$$

ou $\bar{p}_0$ grad $\varphi = 0$; dans les deux cas la courbe (2) est une courbe asymptotique de la surface (1) et, par conséquent:

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une courbe tracée sur la surface (1) *soit une courbe asymptotique de cette surface, est que la dérivée de* grad φ *par rapport à la direction de la tangente à chaque point de cette courbe soit normale à cette direction ou nulle.*

Supposons maintenant que le plan des dérivées de grad φ par rapport aux directions du plan tangent à un point quelconque de la surface (1) soit *parallèle* à la normale de la surface à ce même point.

Nous remarquons d'abord que, dans ce cas, il y aura à chaque point de la surface au moins une direction asymptotique réelle:

la direction normale au plan des dérivées de grad φ par rapport aux directions du plan tangent à ce point, d'après la proposition que nous venons de démontrer et, par conséquent, il y aura au moins une série de courbes asymptotiques sur la surface.

Si $(\bar{t}_0 \nabla)$ grad φ et $(\bar{t}'_0 \nabla)$ grad φ sont les dérivées de grad φ par rapport aux directions asymptotiques $\bar{t}_0$ et $\bar{t}'_0$ à un point quelconque de la surface (1), d'après la supposition faite, les vecteurs grad φ, $(\bar{t}_0 \nabla)$ grad φ et $(\bar{t}'_0 \nabla)$ grad φ sont parallèles à un même plan et par suite leur produit mixte

$$[\text{grad}\,\varphi\,,\ (\bar{t}_0 \nabla)\ \text{grad}\,\varphi\,,\ (\bar{t}'_0 \nabla)\ \text{grad}\,\varphi] = 0\ . \tag{5}$$

En même temps, d'après la proposition démontrée, les produits géométriques $(\bar{t}_0 \nabla)$ grad $\varphi \times$ grad φ et $(\bar{t}'_0 \nabla)$ grad $\varphi \times$ grad φ sont respectivement parallèles aux vecteurs $\bar{t}_0$ et $\bar{t}'_0$ et, par conséquent, leur produit géométrique

$$\{(\bar{t}_0 \nabla)\ \text{grad}\,\varphi \times \text{grad}\,\varphi\} \times \{(\bar{t}'_0 \nabla)\ \text{grad}\,\varphi \times \text{grad}\,\varphi\} = \lambda \bar{t}_0 \times \bar{t}'_0\ ,$$

mais

$$\{(\bar{t}_0 \nabla)\ \text{grad}\,\varphi \times \text{grad}\,\varphi\} \times \{(\bar{t}'_0 \nabla)\ \text{grad}\,\varphi \times \text{grad}\,\varphi\}$$

$$= \text{grad}\,\varphi\,[\text{grad}\,\varphi\,,\ (\bar{t}_0 \nabla)\ \text{grad}\,\varphi\,,\ (\bar{t}'_0 \nabla)\ \text{grad}\,\varphi]$$

$$- (\bar{t}_0 \nabla)\ \text{grad}\,\varphi\,[\text{grad}\,\varphi\,,\ (\bar{t}_0 \nabla)\ \text{grad}\,\varphi\,,\ \text{grad}\,\varphi] = 0$$

et par suite $\bar{t}_0 \times \bar{t}'_0 = 0$ ou $\bar{t}_0 \equiv \bar{t}'_0$.

En d'autres termes, les directions asymptotiques à chaque point de la surface *coïncident* et la surface est *développable.*

Réciproquement: si la surface est développable, la dérivée de grad φ à un point quelconque de la surface par rapport à la direction de la génératrice rectiligne qui passe par ce point est parallèle à ce vecteur, le vecteur grad φ ayant, d'après une proposition connue de ces surfaces, une direction constante le long de chaque génératrice rectiligne de la surface; par conséquent, le plan des dérivées de grad φ par rapport aux directions du plan tangent à chaque point d'une telle surface est parallèle à la normale à ce même point de la surface. Ainsi: *Pour que la normale à chaque point d'une surface* φ (x, y, z) $= 0$ *soit parallèle au plan des dérivées de* grad φ *par rapport aux directions du plan*

tangent à ce même point de la surface, il faut et il suffit que la surface soit développable.

3. — Soit $\bar{n}_0 = \frac{\text{grad}\,\varphi}{|\text{grad}\,\varphi|}$ le vecteur unitaire ayant la direction du grad φ à un point de la surface (1) et $\bar{l}_0$ un vecteur unitaire parallèle à une des directions principales à ce point de la surface (direction de la tangente d'une des lignes de courbure qui passent par ce point).

D'après la propriété connue des lignes de courbure, que les normales de la surface le long d'une telle courbe constituent une surface développable, nous aurons la relation

$$\left[\bar{l}_0\, \bar{n}_0 (\bar{l}_0 \nabla) \bar{n}_0\right] = 0 \,. \tag{6}$$

Mais

$$(\bar{l}_0 \nabla) \bar{n}_0 = (\bar{l}_0 \nabla) \frac{\text{grad}\,\varphi}{|\text{grad}\,\varphi|} = \frac{1}{|\text{grad}\,\varphi|} (\bar{l}_0 \nabla)\, \text{grad}\,\varphi + \text{grad}\,\varphi\, (\bar{l}_0 \nabla) \frac{1}{|\text{grad}\,\varphi|} \,;$$

par conséquent, la relation (6) devient

$$\left[\bar{l}_0 \,,\, \bar{n}_0 \,,\, \left\{ \frac{1}{|\text{grad}\,\varphi|} (\bar{l}_0 \nabla)\, \text{grad}\,\varphi + (\bar{l}_0 \nabla) \frac{1}{|\text{grad}\,\varphi|} \,.\, \text{grad}\,\varphi \right\}\right] = 0$$

ou

$$\left[\bar{l}_0 \,,\, \text{grad}\,\varphi \,,\, (\bar{l}_0 \nabla)\, \text{grad}\,\varphi\right] = 0 \,. \tag{7}$$

Réciproquement: si la relation (7) a lieu tout le long d'une courbe tracée sur la surface (1), $\bar{l}_0$ étant parallèle à la tangente à chaque point de la courbe, la courbe est une ligne de courbure de la surface, parce que cette relation est équivalente à la relation (6) qui constitue la condition nécessaire et suffisante pour cela.

Supposons maintenant que la dérivée de grad φ par rapport à la direction de la tangente à chaque point d'une courbe tracée sur la surface (1) soit normale à grad φ. Dans ce cas, le vecteur grad φ a tout le long de cette courbe une valeur absolue constante; inversement, si tout le long d'une courbe tracée sur la surface (1) le vecteur grad φ a une valeur absolue constante, la dérivée de ce vecteur par rapport à la direction de la tangente à chaque point de cette courbe sera normale à ce vecteur.

Par conséquent, les équations de ces courbes sont $\varphi = 0$, $|\text{grad}\,\varphi| = C$ où $|\text{grad}\,\varphi|$ désigne la valeur absolue du grad φ.

La direction de la tangente à chaque point d'une telle courbe est celle du vecteur rot $\bar{n}_0$ où $\bar{n}_0 = \frac{\text{grad}\,\varphi}{|\text{grad}\,\varphi|}$ à ce même point de la surface [1].

Nous allons maintenant démontrer la proposition mentionnée au § 2.

Si la surface $\varphi(x, y, z) = 0$ est cylindrique, on voit facilement, en considérant la forme générale de l'équation de ces surfaces, que grad φ est constant le long de chaque génératrice rectiligne de la surface; par conséquent, la dérivée de ce vecteur par rapport à la direction de la génératrice à chaque point de la surface est nulle.

Réciproquement: si à chaque point de la surface $\varphi(x, y, z) = 0$ $(\bar{t}_0\,\nabla)$ grad $\varphi = 0$, $\bar{t}_0$ étant un vecteur unitaire parallèle à la tangente de celle des courbes d'une certaine famille recouvrant la surface, qui passe par ce point, la surface $\varphi = 0$ est un *cylindre*.

Nous remarquons d'abord que, le vecteur grad φ étant tout le long d'une telle courbe constant, le plan tangent de la surface à chaque point de cette courbe sera le même; par conséquent, la surface est développable et les courbes sont les génératrices rectilignes de cette surface.

D'ailleurs, comme tout le long d'une telle courbe le vecteur grad φ a une valeur absolue constante, la famille de ces courbes a pour équations: $\varphi = 0$, $|\text{grad}\,\varphi| = C$.

Nous allons maintenant démontrer que rot $\bar{n}_0$ est constant le long d'une telle courbe. Il s'ensuit que les génératrices rectilignes de la surface sont parallèles et que la surface est cylindrique.

En effet, pour que les courbes $\varphi = 0$, $|\text{grad}\,\varphi| = C$ soient parallèles, il faut et il suffit que la valeur absolue de rot $\bar{n}_0$ le long d'une telle courbe soit constante [2].

Mais (8) rot $\bar{n}_0 = \frac{1}{\psi^2}\,\text{grad}\,\varphi \times \text{grad}\,\psi$ où $\psi = |\text{grad}\,\varphi|$. Or grad φ est constant le long d'une telle courbe; il suffit donc de prouver que grad ψ reste aussi constant sur cette courbe.

A cette fin nous remarquons que

$$\text{grad}\,\psi = \frac{1}{2\psi}\,\text{grad}\,\psi^2$$

---

[1] WEATHERBURN, *On families of Surfaces. Mathematische Annalen*, 99, 3, S. 473 (1928).
[2] WEATHERBURN, *loc. cit.*, p. 474.

et, comme

$$\operatorname{grad} \psi^2 = 2(\operatorname{grad} \varphi \nabla) \operatorname{grad} \varphi \ ,$$

il vient

$$\operatorname{grad} \psi = \frac{1}{\psi} (\operatorname{grad} \varphi \nabla) \operatorname{grad} \varphi \ .$$

Si donc $\bar{t}_0$ désigne un vecteur parallèle à la génératrice qui passe par un point de la surface $\varphi = 0$, la dérivée de grad ψ par rapport à cette direction est

$$(\bar{t}_0 \nabla) \operatorname{grad} \psi = (\operatorname{grad} \varphi \nabla) \operatorname{grad} \varphi \, . \, (\bar{t}_0 \nabla) \frac{1}{\psi} + \frac{1}{\psi} (\bar{t}_0 \nabla) (\operatorname{grad} \varphi \nabla) \operatorname{grad} \varphi \ ,$$

ou

$$(\bar{t}_0 \nabla) \operatorname{grad} \psi = \frac{1}{\psi} (\bar{t}_0 \nabla) (\operatorname{grad} \varphi \nabla) \operatorname{grad} \varphi \ ,$$

parce que $(\bar{t}_0 \nabla) \frac{1}{\psi} = 0$ (ψ étant constant le long de cette droite).

Mais

$$(\bar{t}_0 \nabla) (\operatorname{grad} \varphi \nabla) \operatorname{grad} \varphi =$$

$$\left\{ (\bar{t}_0 \nabla) \operatorname{grad} \varphi \nabla \right\} \operatorname{grad} \varphi + (\operatorname{grad} \varphi \nabla) (\bar{t}_0 \nabla) \operatorname{grad} \varphi = 0 \ , \ ^1 \qquad (a)$$

---

[1] L'identité (a) peut être démontrée d'une manière plus générale comme il suit.

Soit $\bar{u}$ un vecteur fonction du point (x, y, z); nous supposons que ses composantes u_1, u_2, u_3 par rapport au système de coordonnées sont des fonctions continues et dérivables des x, y, z. Si i, j, k désignent les trois vecteurs fondamentaux de notre système de coordonnées, nous aurons

$$\bar{u} = u_1 i + u_2 j + u_3 k \ .$$

La dérivée de ce vecteur par rapport à la direction du vecteur unitaire $\bar{v}_0$ sera

$$(\bar{v}_0 \nabla) \bar{u} = i(\bar{v}_0 \nabla) u_1 + j(\bar{v}_0 \nabla) u_2 + k(\bar{v}_0 \nabla) u_3 = i \bar{v}_0 \cdot \nabla u_1 + j \bar{v}_0 \cdot \nabla u_2 + k \bar{v}_0 \cdot \nabla u_3 \ .$$

Considérons maintenant $\bar{v}_0$ aussi comme fonction des x, y, z et cherchons la différentielle du vecteur $(\bar{v}_0 \nabla) \bar{u}$ correspondant à un déplacement infiniment petit $d\bar{r}$ du point.

Cette différentielle sera

$$d(\bar{v}_0 \nabla) \bar{u} = (d\bar{r} \nabla)(\bar{v}_0 \nabla) \bar{u} = i d(\bar{v}_0 \cdot \nabla u_1) + j d(\bar{v}_0 \cdot \nabla u_2) + k d(\bar{v}_0 \cdot \nabla u_3) \ ;$$

mais

$$d(\bar{v}_0 \cdot \nabla u_1) = d\bar{v}_0 \cdot \nabla u_1 + \bar{v}_0 d(\nabla u_1)$$

ou, comme

$$d\bar{v}_0 = (d\bar{r} \nabla) \bar{v}_0 \qquad \text{et} \qquad d(\nabla u_1) = \nabla (du_1) \ ,$$

$$d(\bar{v} \cdot \nabla u_1) = (d\bar{r} \nabla) \bar{v} \cdot \nabla u_1 + \bar{v}_0 \cdot \nabla (du_1) = \left\{ (d\bar{r} \nabla) \bar{v}_0 \nabla \right\} u_1 + (\bar{v} \nabla)(d\bar{r} \nabla) u_1 \ .$$

En conséquence, nous aurons

$$(d\bar{r} \nabla)(\bar{v} \nabla) \bar{u} = \left\{ (d\bar{r} \nabla) \bar{v}_0 \nabla \right\} \bar{u} + (\bar{v}_0 \nabla)(d\bar{r} \nabla) \bar{u} \ .$$

Pour la dérivée de $(\bar{v}_0 \nabla) \bar{u}$ par rapport à la direction $\bar{t}_0$ du déplacement considéré, nous tirons de là la formule

$$(\bar{t}_0 \nabla)(\bar{v}_0 \nabla) \bar{u} = \left\{ (\bar{t}_0 \nabla) \bar{v}_0 \nabla \right\} \bar{u} + (\bar{v}_0 \nabla)(\bar{t}_0 \nabla) \bar{u} \ .$$

puisque $(\bar{t}_0 \nabla)$ grad $\varphi = 0$; par conséquent, le vecteur grad ψ reste constant le long de cette droite.

Il résulte ainsi de l'identité (8) que rot $\bar{n}_0$ est lui-même constant le long de chaque génératrice rectiligne de la surface; par conséquent, ces droites sont parallèles.

Supposons maintenant que les courbes $\varphi = 0$, $|\text{grad}\,\varphi| = C$ soient des lignes de courbure de la surface $\varphi = 0$.

Dans ce cas, la dérivée de grad φ par rapport à la direction de la tangente d'une telle courbe à un point quelconque de la surface est un vecteur *parallèle* à cette direction, parce qu'il est parallèle en même temps au plan tangent de la surface et au plan normal mené par la tangente de la courbe.

Réciproquement: si la dérivée de grad φ par rapport à la direction de la tangente à chaque point d'une courbe de la famille $\varphi = 0$, $|\text{grad}\,\varphi| = C$ est parallèle à cette direction, la relation

$$\left[\bar{t}_0 \text{ grad } \varphi \, (\bar{t}_0 \nabla) \text{ grad } \varphi\right] = 0 \ ,$$

où $\bar{t}_0$ est un vecteur parallèle à la tangente, sera vérifiée tout le long de la courbe; par conséquent, la courbe sera une ligne de courbure de la surface.

Ainsi: *la condition nécessaire et suffisante pour que les courbes* $\varphi = 0$, $|\text{grad}\,\varphi| = C$ *soient des lignes de courbure de la surface* $\varphi = 0$ *est que la dérivée de* grad φ *par rapport à la direction de la tangente à chaque point d'une telle courbe soit parallèle à cette direction.*

Nous remarquons maintenant que, dans ce cas, les dérivées de grad φ par rapport aux directions principales à chaque point de la surface $\varphi = 0$ sont normales entre elles. En effet, l'une est parallèle à la tangente de la courbe $\varphi = 0$, $|\text{grad}\,\varphi| = C$ qui passe par ce point, l'autre est parallèle au plan normal à cette tangente. Par conséquent, comme ces deux vecteurs sont en même temps deux semidiamètres conjugués de l'ellipse des dérivées de grad φ par rapport aux directions du plan tangent à ce point de la surface, ils doivent coïncider avec les axes de cette ellipse.

Réciproquement, supposons que les dérivées du grad φ par rapport aux directions principales à un point quelconque de la surface $\varphi = 0$ soient dirigées suivant les axes de l'ellipse des

dérivées de grad φ par rapport aux directions du plan tangent à ce point de la surface.

En effet, soient $\bar{l}_0$ et $\bar{l}'_0$ deux vecteurs unitaires respectivement parallèles aux deux directions principales, à un point de la surface et $(\bar{l}_0 \nabla)$ grad φ, $(\bar{l}'_0 \nabla)$ grad φ les dérivées de grad φ par rapport à ces directions; ces deux vecteurs sont orthogonaux en vertu de notre hypothèse et, par conséquent, leur produit scalaire

$$(\bar{l}_0 \nabla) \operatorname{grad} \varphi \ (\bar{l}'_0 \nabla) \operatorname{grad} \varphi = 0 \ . \tag{9}$$

D'ailleurs, les produits vectoriels $(\bar{l}_0 \nabla)$ grad $\varphi \times$ grad φ et $(\bar{l}'_0 \nabla)$ grad $\varphi \times$ grad φ sont aussi orthogonaux, puisqu'ils sont respectivement parallèles à $\bar{l}'_0$ et $\bar{l}_0$.

Nous avons donc

$$\{ (\bar{l}_0 \nabla) \operatorname{grad} \varphi \times \operatorname{grad} \varphi \} . \{ (\bar{l}'_0 \nabla) \operatorname{grad} \varphi \times \operatorname{grad} \varphi \} = 0$$

ou

$$\{ (\bar{l}_0 \nabla) \operatorname{grad} \varphi . (\bar{l}'_0 \nabla) \operatorname{grad} \varphi \} (\operatorname{grad} \varphi)^2 -$$
$$- \{ (\bar{l}_0 \nabla) \operatorname{grad} \varphi . \operatorname{grad} \varphi \} \{ (\bar{l}'_0 \nabla) \operatorname{grad} \varphi . \operatorname{grad} \varphi \} = 0$$

ce qui, en égard à (9), peut s'écrire:

$$\{ (\bar{l}_0 \nabla) \operatorname{grad} \varphi . \operatorname{grad} \varphi \} \{ (l'_0 \nabla) \operatorname{grad} \varphi . \operatorname{grad} \varphi \} = 0 \ .$$

En d'autres termes, l'un des vecteurs $(\bar{l}_0 \nabla)$ grad φ, $(\bar{l}'_0 \nabla)$ grad φ est normal à grad φ. En conséquence, l'une des directions principales est parallèle à la tangente de la courbe $\varphi = 0$, $|\operatorname{grad} \varphi| = C$ qui passe par ce point.

Nous obtenons ainsi le théorème suivant:

Pour que les dérivées de grad φ *par rapport aux directions principales à chaque point de la surface* $\varphi = 0$ *soient en grandeur et en direction les demi-axes de l'ellipse des dérivées de ce vecteur par rapport aux directions du plan tangent à ce point de la surface, il faut et il suffit que les courbes* $\varphi = 0$, $|\operatorname{grad} \varphi| = C$ *soient des lignes de courbure de la surface* $\varphi = 0$.