

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 29 (1930)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE.

Artikel: SUR LA SÉRIE DE TAYLOR D'UNE FONCTION HOLOMORPHE
Autor: Anghelutza, T.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-23248>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 20.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

SUR LA SÉRIE DE TAYLOR D'UNE FONCTION HOLOMORPHE

PAR

T. ANGHEUTZA (Cluj, Roumanie).

Cette Note a pour objet la série de Taylor d'une fonction holomorphe considérée comme un développement d'après les fonctions fondamentales d'un noyau symétrique généralisé.

Dans une note antérieure ¹ j'ai considéré le noyau symétrique généralisé. C'est un noyau $N(x, y)$ pour lequel on a l'identité

$$N(x, y) = \overline{N}(y, x) .$$

\overline{N} barré désigne le conjugué imaginaire de N . Nous avons montré que si $\varphi(x)$ est une solution de l'équation

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b N(x, s) \varphi(s) ds = 0 ,$$

$\overline{\varphi}(x)$ est une solution de l'équation associée.

Par suite le système de solutions fondamentales, que l'on peut supposer normale, est de la forme

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots \tag{1}$$

$$\overline{\varphi}_1(x), \overline{\varphi}_2(x), \dots, \overline{\varphi}_n(x), \dots \tag{2}$$

Puis toute fonction $f(x)$ donnée par l'égalité

$$f(x) = \int_a^b N(x, s) h(s) ds ,$$

¹ *Comptes rendus*, t. 186, 1928, p. 559.

peut être développée en série d'après les fonctions de la suite (1) ou (2).

Ceci étant rappelé, considérons le noyau symétrique généralisé

$$N(\theta, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta} - re^{i\varphi}}.$$

Le paramètre r est positif et inférieur à l'unité; θ et φ varient dans l'intervalle $(0, 2\pi)$.

$N_2(\theta, \varphi)$ étant le premier noyau itéré de $N(\theta, \varphi)$ on a

$$N_2(\theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta} - re^{i\omega}} \frac{e^{i\omega}}{e^{i\omega} - re^{i\varphi}} d\omega = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta} - r^2 e^{i\varphi}}.$$

Pour l'itéré d'ordre $n - 1$ on trouve,

$$N_n(\theta, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta} - r^n e^{i\varphi}}.$$

Le noyau résolvant $\mathcal{N}(\theta, \varphi, \lambda)$ du noyau $N(\theta, \varphi)$ est donné par la formule connue

$$\mathcal{N}(\theta, \varphi; \lambda) = N(\theta, \varphi) + \lambda N_2(\theta, \varphi) + \dots + \lambda^n N_{n+1}(\theta, \varphi) + \dots$$

Par suite on a pour le noyau résolvant

$$\mathcal{N}(\theta, \varphi; \lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n e^{i\theta}}{e^{i\theta} - r^{n+1} e^{i\varphi}}.$$

Cette formule peut s'écrire

$$\mathcal{N}(\theta, \varphi; \lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n e^{ni(\varphi-\theta)}}{1 - \lambda r^n}$$

car on a supposé

$$0 \leq r < 1.$$

De la valeur du noyau résolvant on peut déduire la fonction entière $D(\lambda)$ dont les racines sont les valeurs caractéristiques du noyau $N(x, y)$. Pour cela remplaçant dans la formule

$$-\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} = \int_0^{2\pi} \mathcal{N}(\omega, \omega; \lambda) d\omega,$$

le noyau résolvant par sa valeur, on trouve

$$-\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} = \frac{1}{1-\lambda} + \frac{r}{1-\lambda r} + \dots + \frac{r^n}{1-\lambda r^n} + \dots$$

En intégrant on en déduit

$$D(\lambda) = (1-\lambda)(1-r\lambda)\dots(1-r^n\lambda)\dots$$

Le système normal de solutions fondamentales est donc formé par les deux suites

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{e^{-i\theta}}{\sqrt{2\pi}}, \dots, \frac{e^{-ni\theta}}{\sqrt{2\pi}}, \quad \dots, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2\pi}}, \dots, \frac{e^{ni\theta}}{\sqrt{2\pi}}, \quad \dots \end{aligned}$$

Par suite pour la fonction

$$f(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} h(\theta)}{e^{i\theta} - re^{i\varphi}} d\theta,$$

on a le développement en série

$$f(\varphi) = \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \frac{a_1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\varphi} + \dots + \frac{a_n}{\sqrt{2\pi}} e^{ni\varphi} + \dots$$

les a_n étant donnés par la formule

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} e^{-ni\omega} f(\omega) d\omega.$$

En tenant compte de l'expression de $f(\varphi)$ cette formule devient

$$a_n = h_n r^n$$

où l'on a posé

$$h_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} e^{-ni\theta} h(\theta) d\theta.$$

Nous avons donc la série

$$f(\varphi) = \frac{h_0}{\sqrt{2\pi}} + \frac{h_1 r e^{i\theta}}{\sqrt{2\pi}} + \dots + \frac{h_n r^n e^{ni\theta}}{\sqrt{2\pi}} + \dots \quad (3)$$

Considérons une fonction $f(z)$ holomorphe dans un cercle (C) de rayon un. La série (3) de cette fonction est la série de Taylor. On le voit facilement utilisant l'intégrale de Cauchy.

Pour donner une application, considérons deux fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n,$$

holomorphes dans le cercle (C). Les deux séries étant des développements d'après les fonctions de la suite (1) et ayant

$$x = re^{i\theta},$$

on trouve la formule

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [f(x) \bar{\varphi}(x) + \bar{f}(x) \varphi(x)] d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} (a_n \bar{\alpha}_n + \bar{a}_n \alpha_n),$$

qui est une généralisation de celle donnée par GUTZMER¹.

Les mêmes considérations conduisent aussi à la série de Taylor de deux variables.

¹ GUTZMER, Ein Satz über Potenzreihen. *Math. Annalen*, t. 32, p. 596, 1888.
