Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 29 (1930)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE.

Artikel: SUR LA SÉRIE DE TAYLOR D'UNE FONCTION HOLOMORPHE

Autor: Anghelutza, T.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-23248

SUR LA SÉRIE DE TAYLOR D'UNE FONCTION HOLOMORPHE

PAR

T. ANGHELUTZA (Cluj, Roumanie).

Cette Note a pour objet la série de Taylor d'une fonction holomorphe considérée comme un développement d'après les fonctions fondamentales d'un noyau symétrique généralisé.

Dans une note antérieure [1] j'ai considéré le noyau symétrique généralisé. C'est un noyau N (x, y) pour lequel on a l'identité

$$N(x, y) = \overline{N}(y, x) .$$

$\overline{N}$ barré désigne le conjugué imaginaire de N. Nous avons montré que si $\varphi(x)$ est une solution de l'équation

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b N(x, s) \varphi(s) ds = 0 ,$$

$\overline{\varphi}(x)$ est une solution de l'équation associée.

Par suite le système de solutions fondamentales, que l'on peut supposer normale, est de la forme

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots \tag{1}$$

$$\overline{\varphi}_1(x), \overline{\varphi}_2(x), \ldots, \overline{\varphi}_n(x), \ldots \tag{2}$$

Puis toute fonction $f(x)$ donnée par l'égalité

$$f(x) = \int_a^b N(x, s) h(s) ds ,$$

---

[1] *Comptes rendus*, t. 186, 1928, p. 559.

peut être développée en série d'après les fonctions de la suite (1) ou (2).

Ceci étant rappelé, considérons le noyau symétrique généralisé

$$\mathrm{N}(\theta, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta} - re^{i\varphi}} .$$

Le paramètre r est positif et inférieur à l'unité; θ et φ varient dans l'intervalle $(0, 2\pi)$.

$\mathrm{N}_2(\theta, \varphi)$ étant le premier noyau itéré de $\mathrm{N}(\theta, \varphi)$ on a

$$\mathrm{N}_2(\theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta} - re^{i\omega}} \frac{e^{i\omega}}{e^{i\omega} - re^{i\varphi}} d\omega = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta} - r^2 e^{i\varphi}} .$$

Pour l'itéré d'ordre $n - 1$ on trouve,

$$\mathrm{N}_n(\theta, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta} - r^n e^{i\varphi}} .$$

Le noyau résolvant $\mathcal{N}(\theta, \varphi, \lambda)$ du noyau $\mathrm{N}(\theta, \varphi)$ est donné par la formule connue

$$\mathcal{N}(\theta, \varphi ; \lambda) = \mathrm{N}(\theta, \varphi) + \lambda \mathrm{N}_2(\theta, \varphi) + \dots + \lambda^n \mathrm{N}_{n+1}(\theta, \varphi) + \dots .$$

Par suite on a pour le noyau résolvant

$$\mathcal{N}(\theta, \varphi ; \lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n e^{i\theta}}{e^{i\theta} - r^{n+1} e^{i\varphi}} .$$

Cette formule peut s'écrire

$$\mathcal{N}(\theta, \varphi ; \lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n e^{ni(\varphi-\theta)}}{1 - \lambda r^n}$$

car on a supposé

$$0 \leqq r < 1 .$$

De la valeur du noyau résolvant on peut déduire la fonction entière $\mathrm{D}(\lambda)$ dont les racines sont les valeurs caractéristiques du noyau $\mathrm{N}(x, y)$. Pour cela remplaçant dans la formule

$$-\frac{\mathrm{D}'(\lambda)}{\mathrm{D}(\lambda)} = \int_0^{2\pi} \mathcal{N}(\omega, \omega ; \lambda) d\omega ,$$

le noyau résolvant par sa valeur, on trouve

$$-\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} = \frac{1}{1-\lambda} + \frac{r}{1-\lambda r} + \ldots + \frac{r^n}{1-\lambda r^n} + \ldots .$$

En intégrant on en déduit

$$D(\lambda) = (1-\lambda)(1-r\lambda)\ldots(1-r^n\lambda)\ldots .$$

Le système normal de solutions fondamentales est donc formé par les deux suites

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{e^{-i\theta}}{\sqrt{2\pi}}, \ldots, \frac{e^{-ni\theta}}{\sqrt{2\pi}}, \quad \ldots,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2\pi}}, \ldots, \frac{e^{ni\theta}}{\sqrt{2\pi}}, \quad \ldots$$

Par suite pour la fonction

$$f(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}\, h(\theta)}{e^{i\theta} - re^{i\varphi}}\, d\theta .$$

on a le développement en série

$$f(\varphi) = \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \frac{a_1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\varphi} + \ldots + \frac{a_n}{\sqrt{2\pi}} e^{ni\varphi} + \ldots$$

les a_n étant donnés par la formule

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} e^{-ni\omega} f(\omega)\, d\omega .$$

En tenant compte de l'expression de $f(\varphi)$ cette formule devient

$$a_n = h_n r^n$$

où l'on a posé

$$h_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} e^{-ni\theta} h(\theta)\, d\theta .$$

Nous avons donc la série

$$f(\varphi) = \frac{h_0}{\sqrt{2\pi}} + \frac{h_1 re^{i\theta}}{\sqrt{2\pi}} + \ldots + \frac{h_n r^n e^{ni\theta}}{\sqrt{2\pi}} + \ldots \qquad (3).$$

Considérons une fonction $f(z)$ holomorphe dans un cercle (C) de rayon un. La série (3) de cette fonction est la série de Taylor. On le voit facilement utilisant l'intégrale de Cauchy.

Pour donner une application, considérons deux fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n , \qquad \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n .$$

holomorphes dans le cercle (C). Les deux séries étant des développements d'après les fonctions de la suite (1) et ayant

$$x = re^{i\theta} ,$$

on trouve la formule

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [f(x)\,\bar{\varphi}(x) + \bar{f}(x)\,\varphi(x)]\, d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} (a_n \bar{\alpha}_n + \bar{a}_n \alpha_n) ,$$

qui est une généralisation de celle donnée par GUTZMER[1].

Les mêmes considérations conduisent aussi à la série de Taylor de deux variables.

---

[1] GUTZMER, Ein Satz über Potenzreihen. *Math. Annalen*, t. 32, p. 596, 1888.