

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 29 (1930)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE.

Rubrik: BIBLIOGRAPHIE

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 25.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

BIBLIOGRAPHIE

Paul APPELL et Edouard GOURSAT. — **Théorie des Fonctions algébriques, de leurs Intégrales et des Transcendantes qui s'y rattachent.** Deuxième édition revue et augmentée par P. Fatou. Tome I. Etude des Fonctions analytiques sur une Surface de Riemann. Tome II. Fonctions automorphes. — Deux volumes grand in-8° de xxxv-526 pages, 78 figures et xiv-522 pages, 52 figures. Prix, pour l'ensemble: 200 francs. Gauthier-Villars & C^{ie}. Paris, 1929-1930.

Triste ironie des destinées. Ce magnifique Ouvrage atteint une seconde édition, non moins magnifiquement développée, à peu près à l'époque où Paul Appell disparaît, cependant qu'une autre mort, tout à fait prématurée, empêche le jeune géomètre, qui a merveilleusement complété le volume primitif, d'assister à un triomphe plus que mérité.

Nous n'avons pas ici à nous livrer à quelque analyse étendue du livre. Ce serait particulièrement inutile pour le tome premier dont la première édition date de 1895. Vers cette époque, nous n'avions guère qu'un chapitre, très difficile, de Camille Jordan et quelques autres, de M. Emile Picard, pour nous initier, de manière didactique, à la géniale conception de surface de Riemann. Un exposé, spécialement consacré au sujet, fut le bienvenu. Charles Hermite écrivit une Préface, d'ailleurs pieusement conservée dans l'édition d'aujourd'hui. L'idée fondamentale était claire. Il fallait se mettre bien en face des propriétés des fonctions *uniformes*, dans un champ complexe ordinaire, et étendre ces propriétés aux fonctions *multiformes*, particulièrement aux fonctions algébriques, considérées comme fonctions d'un *point analytique* sur la surface à feuillets possédant *lignes de passage* et *coupures* lui assurant finalement une certaine *connexion*, un certain *genre*.

Paul Appell et M. Edouard Goursat s'acharnèrent à être ingénieux; on fit de nombreuses figures, des croquis spatiaux, on donna des explications méticuleuses après quoi il était impossible de ne pas *voir* cette nouvelle géométrie si utile à l'analyse. Cette façon de procéder, qui avait sa nécessité en 1895, étant moins nécessaire maintenant, Pierre Fatou a pu diminuer un peu certaines parties purement descriptives pour y loger de nouveaux sujets, si bien que le volume se trouve complété sans allongement. On y trouve, par exemple, le nom de M. Hermann Weyl qui a tant fait pour les Espaces de Riemann. Espaces et surfaces de Riemann sont, à coup sûr, choses différentes et pouvant même répondre à nombre de préoccupations étrangères l'une à l'autre. Ces choses sont cependant sorties d'un même cerveau; on est à la hauteur de l'une quand on est à la hauteur de l'autre. A cause de la Gravifuge, les espaces, dans ces dernières années, ont peut-

être brillé plus que les surfaces. Avec le volume dont il s'agit maintenant, attendons-nous à une recrudescence d'éclat pour ces dernières. Elles semblent faites pour qu'on puisse y apercevoir, avec le maximum de simplicité, toute la pensée, tout le génie d'Abel.

Le second volume, ainsi que M. Goursat nous en avertit dans une courte Préface, est entièrement l'œuvre de Pierre Fatou. Il peut jouer, dans la Science, le même rôle que le Tome II des *Œuvres* de Poincaré. C'est l'ouvrage didactique français attendu depuis que l'on parle de fonctions fuchsiennes, celui que beaucoup demandaient à Poincaré lui-même comme nous l'avons rappelé après la mort de l'illustre géomètre (*L'Ens. math.*, T. 15, 1913, p. 16). Analyser ce volume ne peut guère nous conduire qu'à répéter ce que nous avons écrit au sujet de Poincaré et particulièrement du Tome II précité (*Ibid.*, T. 19, 1917, p. 5). Résumons-nous cependant et d'autant plus volontiers qu'on éprouve un plaisir esthétique indéniable à montrer que ces sujets immenses peuvent se ramener à un très petit nombre d'idées, aussi lumineuses que fondamentales, peut-être même à une seule idée. Les fonctions multiformes ont besoin d'être uniformisées, ce pourquoi on peut employer des surfaces de Riemann. Or les fonctions automorphes sont aussi uniformisantes; elles permettent notamment d'exprimer les coordonnées d'un point, appartenant à une courbe algébrique, en fonctions uniformes d'un paramètre. Pour ces fonctions, l'automorphisme se manifeste dans le champ complexe, en une infinité de régions congruentes, de même que la double périodicité se manifeste en une infinité de parallélogrammes. Ces régions congruentes sont limitées par arcs circulaires associés par paires. On peut tenter de déformer l'une d'elles de manière à ce que deux côtés d'une même paire coïncident et, s'il doit en être ainsi pour toutes les paires, la déformation ne vas pas sans questions de connexion absolument analogues à celles qui se présentent avec les surfaces de Riemann. Quant à l'automorphisme initial, il provient d'un groupe *linéaire*, du même groupe homographique à une seule variable qui établit une correspondance, de droite à droite, avec conservation des rapports anharmoniques, toutes choses essentielles pour la définition des angles et distances en Géométrie non-euclidienne. Tout cela tient du prodige et même, cette fois, la distinction faite, tout à l'heure, entre surfaces et espaces de Riemann, tend presque à disparaître. La Géométrie non-euclidienne, dont nous venons de parler, est l'étude d'espaces à courbure constante, cas particuliers des espaces de Riemann.

Ces considérations ne vont pas sans correspondances entre plan et sphère, sans fonctions *polyédriques*. La correspondance entre surface de Riemann et polygone fuchsien peut passer de la question d'*analysis situs* à celle d'une parfaite représentation conforme. Ceci ne va pas non plus sans considérations fonctionnelles équivalant à nombre de constructions modernes; là où Poincaré employait les séries thêtafuchsiennes, nous trouvons maintenant, avec MM. Vitali et Montel, les suites de fonctions analytiques. Les théorèmes de M. Picard et leurs généralisations, les correspondances entre points essentiels, ..., possèdent, dans la théorie des fonctions automorphes, comme un mécanisme délicat qu'on ne retrouve pas forcément dans des démonstrations voulant s'affranchir de procédés générateurs qui auront toujours le double mérite d'avoir été les premiers en date et surtout d'avoir été les véritables instruments de découverte.

C'est pourquoi la présente œuvre de Paul Appell et de M. Edouard

Goursat, si bien reprise et poursuivie par Pierre Fatou, est appelée à un grand retentissement d'où de nouveaux et profonds résultats vont certainement jaillir en abondance.

A. BUHL (Toulouse).

Paul APPELL. — **Eléments de la Théorie des Vecteurs et de la Géométrie analytique.** Deuxième édition. — Un volume in-8° de 14-126 pages et 57 figures. Prix: 18 francs. Gauthier-Villars & Cie. Paris, 1930.

Après le précédent volume, qui représente les plus hautes considérations de la Théorie des Fonctions, nous n'hésitons pas à placer celui-ci, si élémentaire soit-il, justement parce qu'il est toujours extrêmement remarquable qu'une minime œuvre d'enseignement soit écrite par un savant de tout premier ordre. D'ailleurs ce livre est encore une seconde édition. La première fut publiée dans la Collection Payot, en 1921 et *L'Enseignement mathématique* en a rendu compte alors (T. XXII, 1921-22, p. 85). Il s'agit toujours de la géométrie des vecteurs, des droites, des plans, des coniques, du cercle et de la sphère; on arrive au seuil de l'étude des quadriques. Ce petit programme ne va pas cependant sans quelques traits qui révèlent la personnalité de l'auteur. Tel est le lien entre produits vectoriels intérieur et extérieur, lien qui équivaut à l'identité de Lagrange. Tel est le produit

$$(r + r' - 2a) (r - r' - 2a) (-r + r' - 2a) (-r - r' - 2a)$$

utilisé pour mettre en équation, à la fois, l'ellipse et l'hyperbole rapportées à leurs axes. Il y a nullité du premier facteur sur l'ellipse, du second ou du troisième sur l'hyperbole. N'insistons pas. La réédition du livre est la meilleure preuve de son utilité. Et si Paul Appell n'est plus, on peut dire que son influence restera prépondérante, pendant longtemps, dans les domaines classiques les plus divers.

A. BUHL (Toulouse).

Emile PICARD. — **Leçons sur quelques Problèmes aux limites de la Théorie des Equations différentielles** rédigées par Marcel Brelot (Cahiers scientifiques publiés sous la direction de M. Gaston Julia. Fascicule V). — Un volume grand in-8° de VIII-272 pages et 31 figures. Prix: 60 francs. Gauthier-Villars & Cie. Paris, 1930.

Qui n'a ressenti quelque chagrin en constatant que M. Emile Picard abandonnait l'idée d'ajouter un quatrième tome à son *Traité d'Analyse*. Heureusement nous voici dédommagés, au moins partiellement, par les *Leçons* qui se succèdent dans les *Cahiers scientifiques*. Celui-ci comprend une Première Partie, consacrée aux Equations différentielles ordinaires et qui développe des points déjà étudiés dans le tome III du *Traité*; une Seconde partie, consacrée aux Equations aux dérivées partielles, nous donne vraisemblablement des choses qui auraient pu se situer dans le tome IV.

Les méthodes générales ici employées constituent une curieuse association de procédés intégraux appliqués, d'abord très directement, à des équations différentielles. L'un des plus simples consiste à multiplier l'équation par un facteur différentiel et à intégrer entre a et b ; il n'en faut souvent pas davantage pour juger de l'existence de la courbe intégrale passant par deux

points d'abscisses respectives a et b . Du moins de telles méthodes s'associent élégamment à celle des approximations successives et aident à juger de la convergence de ces approximations. La non convergence n'impliquant pas l'inexistence de la solution, on voit déjà quels aspects multiples et variés se révèlent à propos d'équations du second ordre auxquelles on associe des intégrales définies de construction très simple.

L'intérêt augmente encore avec les équations contenant dans leurs coefficients un paramètre arbitraire λ ; on sait qu'ici les solutions, à caractère géométrique ci-dessus indiqué, peuvent n'être obtenues que pour des λ appartenant à de certains ensembles.

Le cas où la solution cherchée doit avoir, en A et B, les mêmes valeurs conduit aux solutions périodiques et lorsqu'il faut s'acheminer vers les équations intégrales proprement dites et étudier, par exemple, les relations intégrales d'orthogonalité, on trouve ce terrain tout préparé par les discussions d'intégrales définies liées, de prime abord, aux équations différentielles sus-mentionnées.

Evidemment tout ceci vise surtout la construction de solutions réelles si bien que les applications physiques suivent le plus naturellement du monde. Le problème du mur de Fourier, avec chaleur spécifique variable, conduit à l'équation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = A(x) \frac{\partial V}{\partial t}.$$

Une solution de la forme $y(x)e^{-\lambda t}$ exige que

$$y'' + \lambda A(x) y = 0,$$

avec des choix de λ assurant de certaines continuités dans un intervalle (a, b) . On retrouve facilement les perfectionnements apportés à la question par Schmidt. Un problème armillaire, physiquement analogue, fait étudier des V périodiques.

Ceci nous conduit à la recherche d'une intégrale périodique de

$$y'' + A(x) y = 0$$

au moyen d'un système d'une infinité d'équations linéaires algébriques, d'où, naturellement, l'introduction de déterminants d'ordre infini. On reprend ensuite l'équation contenant λ avec équation intégrale correspondante. Le sujet possède une bibliographie extrêmement étendue mais il est presque partout en relation avec les travaux que M. Emile Picard commençait, bien avant 1900, dans le domaine des équations différentielles.

Dans le domaine des équations aux dérivées partielles, les fondements sont du côté du Principe de Dirichlet avec association de la Fonction de Green. Les généralisations visent particulièrement les équations

$$\Delta u + f(x, y) = 0 \quad \Delta u = c(x, y) u, \quad \Delta u = F(u, x, y).$$

Au premier abord, les problèmes semblent toujours ne demander que des solutions réelles. Il n'en est que plus intéressant de découvrir qu'on peut

introduire, par exemple dans c , un facteur ρ qui, pour certaines valeurs complexes, permet l'existence d'une solution u également complexe. Quant au domaine simplement connexe du problème de Dirichlet primitif, il peut être varié par des méthodes d'extension qui font très aisément image au point de vue géométrique. On peut, de plus, se débarrasser finalement de l'hypothèse de quarrabilité.

Les applications physiques sont relatives ici aux plaques en équilibre thermique, rayonnantes ou non, pourvues ou non de *sources* représentables par singularités logarithmiques. Ces considérations planes peuvent s'étendre au cas de la cloison gauche par des procédés cartographiques, des *pavages* spatiaux qu'on ne construit pas sans analyser à nouveau la continuité. Cependant on ne recourt point ici à l'analyse abstraite de certains écrits modernes ; on conserve plutôt le contact avec les généralités *explicites* de la haute Théorie des fonctions, avec la double périodicité ou l'automorphisme à groupe fuchsien laissant $c(x, y)$ invariante.

Deux derniers chapitres étendent les considérations précédentes aux problèmes à trois dimensions avec, cette fois, l'usage général des équations intégrales mais non sans complète utilisation des procédés plus anciens associés à la théorie du potentiel modifiée de diverses manières.

Tout ceci rend des plus précieuses ces *Leçons* de M. Emile Picard puisqu'elles établissent un nouveau trait d'union entre les développements fonctionnels modernes et une analyse qui, il y a une quarantaine d'années, faisait déjà la célébrité de l'Ecole française.

A. BUHL (Toulouse).

Gaston JULIA. — **Principes géométriques d'Analyse.** Première Partie.

Leçons rédigées par M. Brelot et R. de Possel (Cahiers scientifiques publiés sous la direction de M. Gaston Julia. Fascicule VI). — Un volume grand in-8° de vi-116 pages et 35 figures. Prix: 25 francs. Gauthier-Villars & Cie. Paris, 1930.

La notion de transformation est l'une des plus fondamentales de l'Analyse et elle est de nature géométrique. Telle est l'idée, n'allant pas sans une sorte de contraste interne fort intéressant, que M. Gaston Julia semble vouloir développer dans ces Leçons. Avec

$$Z = a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots, \quad a_1 \neq 0$$

le voisinage du point $z = 0$ est changé, sans difficulté, en celui de $Z = 0$. Mais que les premiers coefficients a_i soient nuls et la correspondance univoque ne sera plus possible qu'entre un plan et une surface de Riemann. On voit qu'il n'y a pas à aller loin pour apercevoir, dans la notion de transformation l'influence capitale de la singularité.

Les transformations sont envisagées ici entre *domaines* d'où la nécessité de définir exactement ce mot. Cela ne va pas sans quelque retour sur la notion d'ensemble et sur la conception de *connexion*. Mais il est remarquable qu'après ces préliminaires assez brefs on puisse tout de suite envisager la transformation d'un domaine par une fonction qui y est méromorphe. Le cas de $Z = f(z)$, avec f holomorphe suffit d'ailleurs pour définir l'*attraction* et la *répulsion* au voisinage d'un point double. Ce sont là des choses dont on

comprend toute l'importance depuis le brillant emploi qu'en a fait M. Julia dans son *Mémoire sur l'itération des fractions rationnelles* publié en 1918. Mais, si les généralités sont assez fortement teintées d'abstraction, on se retrouve très à l'aise avec la transformation

$$z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

C'est le groupe homographique. Il correspond à une rotation de la sphère sur elle-même, à la Géométrie de Lobatschewsky, à l'automorphisme fonctionnel de Poincaré. Comment ne pas accueillir les théories que nous présente M. Julia si elles peuvent généraliser tout cela.

Un intéressant principe de symétrie régit les prolongements analytiques de part et d'autre d'un arc en correspondance avec un segment rectiligne ou avec un arc de cercle. Parvenu là, on peut étudier les transformations rationnelles et particulièrement celles qui conservent un cercle fondamental. De telles transformations ont des formes canoniques. Un fameux lemme de Schwarz établit une inégalité entre une distance non-euclidienne et la distance transformée, cette inégalité ayant pour cas limite l'égalité quand la transformation est homographique. Ce lemme est d'ailleurs susceptible d'être étendu de diverses manières. Il conduit à des limitations moyennes quant aux modules de fonctions analytiques et à des extensions analogues au lemme de Jensen. Il est difficile, sans plus de longueur, de pénétrer plus en détail la belle analyse de M. Julia. Celle-ci est savante mais d'écriture toujours simple accompagnée de curieux schèmes géométriques. C'est vraiment l'analyse fondamentale d'une grande théorie.

A. BUHL (Toulouse).

J. HADAMARD. — **Cours d'Analyse** professé à l'Ecole Polytechnique. Tome second. — Un volume grand in-8° de vi-722 pages et 72 figures. Prix: 140 francs. Hermann et Cie. Paris, 1930.

Le Tome premier de ce bel Ouvrage a été publié en deux fascicules déjà analysés dans *L'Enseignement mathématique* (T. XXV, 1926, p. 142; T. XXVI, 1927, p. 163). La place nous manque à nouveau pour louer, avec tous les développements nécessaires, le volume terminal aujourd'hui publié. Les sous-titres montrent qu'il traite du Potentiel, du Calcul des variations, des Fonctions analytiques, des Equations différentielles et aux dérivées partielles, du Calcul des probabilités. Autant de sujets auxquels l'auteur a apporté d'immenses contributions personnelles et qu'il est, par suite, capable d'enseigner avec une rare originalité.

Les potentiels et les fonctions harmoniques sont étudiés à un point de vue préparant déjà les équations aux dérivées partielles. Discontinuités qui, dans la suite, se retrouveront plus généralement en des *ondes*. Les applications à l'électrostatique et au magnétisme donnent lieu à deux chapitres distincts.

Le calcul des variations, tant étendu par M. Hadamard ne donne ici qu'une Seconde partie de 40 pages. Aussi les choses sont prises tout de suite, par le côté tangible, avec le problème de la brachistochrone, ce qui n'empêche pas que nous sommes bientôt prévenus de l'existence du Calcul fonctionnel.

Les géodésiques ne vont point sans la courbure géodésique ni sans l'équation tensorielle générale (p. 119, très joli). Les équations canoniques apparaissent ensuite comme par enchantement. Plus loin nous parlerons du Calcul tensoriel manié, dans le Cours de Mécanique, par MM. Painlevé et Platier. L'Ecole Polytechnique est dans la bonne voie. Les cas des limites variables, des extréma liés, de la variation des intégrales multiples, sont réduits à des généralités formelles mais enfin signalés à l'esprit investigator qui soupçonnera rapidement tout ce que l'on peut greffer sur de tels préliminaires.

Les séries entières sont immédiatement associées au concept de fonction analytique. La notion d'analyticité est étendue sans peine au cas de plusieurs variables. Les zéros des fonctions holomorphes ne sont évidemment que des points remarquables et non des points singuliers mais ils jouent un rôle essentiel quant aux propriétés de *coïncidence* analytique. Les méthodes de Cauchy ont de nombreuses applications et sont suivies d'un exposé sommaire, mais logiquement complet, relatif aux fonctions elliptiques.

Les équations différentielles occupent 120 pages dont 67 consacrées aux méthodes générales de Cauchy-Lipschitz, E. Picard puis aux méthodes interpolatoires ou à quadratures partielles de Runge, Adams pour aboutir enfin à celles, fondées surtout sur la considération de différences finies, dues à Kryloff et à Störmer. Les nécessités logiques de la Théorie des groupes s'intercalent ici et imposent, par exemple, la formule d'addition des vitesses selon Einstein. De tels rapprochements ne montrent-ils pas que la Gravifique tend à devenir toute la Science. D'ailleurs les invariants intégraux révèlent bientôt leurs merveilleuses propriétés constructives.

Les équations linéaires, après les développements élémentaires classiques, sont traitées avec l'extension des procédés de Cauchy, extensions dont les équations de Bessel et de Laplace donnent des exemples particulièrement maniables.

Les équations aux dérivées partielles (129 pages) commencent par des généralités à la Cauchy. Après le cas linéaire, à n variables, nous passons aux équations en x, y, z, p, q puis aux équations du second ordre. Ainsi qu'il faut s'y attendre, tant de par la nature des choses qu'à cause des travaux personnels de M. Hadamard, tout ceci est dominé par l'idée générale de *caractéristique*. Les raccords géométriques que cette théorie exige, selon la conception de Cauchy, se traduisent physiquement par des raccords analogues dans les milieux continus en mouvement; les *ondes* apparaissent. L'exposé va jusqu'aux ondes compatibles avec les équations de Maxwell. Réciproquement on peut prendre ces dernières équations comme prototype de toutes celles de la Physique ou de la Gravifique et cela revient à instaurer les ondes dans toutes les théories. Nous touchons aux synthèses de la Mécanique ondulatoire. Faut-il insister sur leur merveilleux caractère.

Le Calcul des Probabilités termine le volume. On a dit maintes fois que ce calcul n'était qu'une image particulière de la Théorie des fonctions. Il est donc encore fort naturel de le trouver ici. M. Hadamard s'est inspiré de J. Bertrand, H. Poincaré, Markoff, Carvallo, Borel, Castelnuovo, Fréchet et Halbwachs puis, plus particulièrement encore, de Paul Lévy et de la *Statistique mathématique* de G. Darmois. Le *Cours* ainsi achevé ne peut être contenu ni dans l'Ecole Polytechnique ni même dans le Collège de France. C'est une manifestation du génie français qui s'imposera partout.

A. Buhl (Toulouse).

Nicolas LUSIN. — **Leçons sur les Ensembles analytiques et leurs applications.** Avec une note de M. Waclaw Sierpinski et une Préface de M. Henri Lebesgue. (Collection de Monographies sur la Théorie des Fonctions publiée sous la direction de M. Emile Borel). — Un volume grand in-8° de XII-328 pages. Prix: 60 francs. Gauthier-Villars & Cie. Paris, 1930.

Ce merveilleux volume semble prouver que la Théorie des Ensembles a fait des progrès immenses qui la lient définitivement avec toutes les disciplines mathématiques. L'esprit philosophique qui se dégage des pages rédigées par M. Lusin est de même nature que celui qui émane de la Théorie des Groupes ou de quelque exposition extrêmement générale de la Géométrie. Dans les trois cas le langage tend à devenir le même. Ainsi les ensembles analytiques dont il s'agit ici sont, dans des domaines à m dimensions, les projections d'ensembles élémentaires situés dans des domaines à $m + 1$ dimensions. Nous ne pouvons définir ici ce qu'il faut entendre exactement par *projection* ou par *ensembles élémentaires*, qui peuvent encore être fort compliqués, mais il s'agit indéniablement d'un grand théorème générateur à caractère intuitif. Il y a des ensembles analytiques *universels* générateurs, *par sections rectilignes*, d'ensembles linéaires. La notion de *mesure* et les classifications fonctionnelles de M. René Baire s'allient à ces considérations avec une simplicité inattendue. Nous ne pouvons pas non plus définir ici la notion de *criblage*; disons seulement qu'il y a des cibles analytiques qui font que tout ensemble criblé devient analytique.

La notion de projection, alliée avec d'autres, telles celle d'ensemble complémentaire, peut conduire à des ensembles inconnus mais *nommables*. On retrouve toutes les discussions célèbres, d'il y a un quart de siècle, auxquelles prirent part MM. Baire, Borel, Hadamard, Lebesgue, mais maintenant avec de nombreux éléments de coordination qui manquaient alors. Et le plus curieux est qu'en se perfectionnant ainsi, la théorie prend une allure non seulement intuitive mais pleine d'un certain idéalisme logique qui paraît être d'une extrême utilité. Point de barrières à l'imagination mais des règles pour imaginer le mieux et le plus possible si, dira-t-on, de telles règles peuvent exister. Eh bien, il semble que M. Lusin en ait trouvé quelques-unes.

Faut-il insister sur la distinction entre le « non contradictoire » et le « réel ». La conception des ensembles *nommables* (p. 24) ne relève-t-elle pas de la psychologie et ne fait-elle pas entrer en ligne de compte les propriétés de nos cerveaux ? La Physique contemporaine ne nous donne-t-elle pas quantité de notions idéales ? N'y a-t-il pas des cas où notre intuition se fait une image claire de choses contenant une contradiction logique ?

Toutes ces questions, amenées ici par les ensembles, apparaissent, dans la Science, sur les terrains les plus divers. C'est pourquoi cette Science appelle de plus en plus, à côté du *nombre*, la considération de l'*ensemble*, surtout tel que le conçoit M. Lusin.

A. BÜHL (Toulouse).

H. S. CARSLAW. — **Introduction to the Theory of Fourier's Series and Integrals.** Third Edition, revised and enlarged. — Un volume in-8° de XIV-368 pages et 39 figures. Prix: Sh. 20. Macmillan and Co., Limited. Londres, 1930.

La première édition de cet ouvrage est de 1906, la seconde de 1921.

Voici la troisième qui répond suffisamment du succès. Une série de Fourier est un développement

$$a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \dots$$

dont les coefficients a et b s'expriment par les intégrales définies bien connues portant sur $f(x)$, $f(x) \cos nx$, $f(x) \sin nx$. Alors le développement précédent est dit *correspondre* à $f(x)$. Tout le livre roule sur les conditions qui permettent de passer de cette *correspondance* à une véritable *représentation* de $f(x)$. Il est certain que Fourier ne prenait pas tant de précautions et l'évolution des idées nous est d'abord présentée en une très attachante Introduction historique. Celle-ci comprend une Première période (1750-1850) avec Euler, D. Bernoulli, d'Alembert, Euler, Lagrange, Poisson, Cauchy, Dirichlet. La seconde période (1850-1905) comprend Riemann, Heine, Cantor, P. du Bois-Reymond, Stokes, Fejér, Dini, Lipschitz, Jordan. La troisième (1905-...) réunit Lebesgue, Hobson, Burckhardt, Hardy, Littlewood, de la Vallée Poussin, W.-H. Young, F. Riesz, Fatou, Tonelli, ... Nous avons plaisir à signaler que, surtout en ce qui concerne cette dernière période, l'auteur a utilisé un travail de Michel Plancherel, sur *Le développement de la Théorie des Séries trigonométriques dans le dernier quart de siècle*, publié dans *L'Enseignement mathématique* (T. XXIV, 1924-25, p. 19).

L'ouvrage prend les choses au début avec les notions de nombre et d'ensemble, les diverses transformations du concept de fonction, le théorème de Heine-Borel, ... Vient ensuite l'intégrale définie avec un exposé tout imprégné des idées de M. Lebesgue mais mis en contact, quand cela est possible, avec des intégrations élémentaires, avec de nombreux cas *calculés*. Enfin il faut une théorie générale des séries en $u_n(x)$ et des intégrales définies contenant un paramètre arbitraire, par rapport auquel on se propose d'intégrer ou de différentier, pour pouvoir aborder les séries de Fourier, sur un terrain solide, avec le secours des intégrales de Dirichlet. Ici, nous arrivons à une riche collection de figures que l'on ne se lasse point d'admirer. Il s'agit des séries de Fourier représentant des lignes *discontinues* formées de segments rectilignes. Si l'on ne prend, dans l'une de ces séries que les n premiers termes, représentés par $s_n(x)$ et si l'on trace la courbe $y = s_n(x)$ on a une ligne *continue* qui, quand n croît, épouse, *de plus en plus près*, la forme de la ligne *discontinue* considérée d'abord. Certes, ce n'est pas la première fois que l'on voit des figures de ce genre mais ici elles sont faites avec un soin qui confine à l'art véritable. Ce soin pourrait presque mener à la découverte empirique du fameux Phénomène de Gibbs. Ceci encore n'est pas une nouveauté. L'analyse précédente du tome II du *Cours* de M. Hadamard remet en mémoire le tome I qui (p. 289) contient une description du phénomène en question. Rien de plus curieux. La courbe $y = s_n(x)$ ne tend pas véritablement, quand n croît, vers la ligne discontinue primitive complétée, dans les sauts d'ordonnées, par les segments parallèles à Oy , mais vers une figure en laquelle ces derniers segments sont légèrement prolongés dans les deux sens. Le saut strictement nécessaire est élargi comme pour un élan préliminaire qui, ensuite, ne peut pas non plus être maîtrisé immédiatement.

Les intégrales de Fourier occupent un dernier chapitre. C'est un cas limite que les précautions prises d'abord permettent de traiter brièvement.

Un premier Appendice aborde l'Analyse harmonique. Un second est consacré à l'intégrale de Lebesgue dans ses rapports avec la notion de *mesure*.

L'ouvrage est digne des plus grands éloges. L'un de ses mérites principaux est de reprendre des exposés, parfois bien abstraits dans les écrits des créateurs, pour les présenter sous une forme intuitive souvent appuyée sur le schème géométrique et sur le calcul explicite.

A. BUHL (Toulouse).

E. C. TITCHMARSH. — **The Zeta-Function of Riemann** (Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, n° 26). — Un volume in-8° de VIII-104 pages. Prix: 6s. 6d. net. Cambridge University Press. Londres, 1930.

Sujet ardu et qui probablement ne cessera jamais de l'être. La fonction de Riemann $\zeta(s)$ est définie par la série de Dirichlet

$$\zeta(s) = \sum n^{-s}, \quad s = \sigma + it, \quad \sigma > 1,$$

quand n varie par valeurs entières de 1 à l'infini positif. Ceci équivaut à

$$\zeta(s) = \prod (1 - p^{-s})^{-1},$$

quand p est la suite des nombres premiers, et permet déjà de pressentir que la recherche des zéros de $\zeta(s)$ équivaut à la recherche de la distribution des nombres premiers. Cette décomposition en facteurs rappelle bien un peu la décomposition des fonctions entières en produits infinis dont les facteurs mettent en évidence les zéros de la fonction mais ici les choses sont incomparablement plus compliquées. D'abord $\zeta(s)$ n'est pas une fonction entière et ses zéros sont des valeurs de s à rechercher non sur le produit précédent mais sur des prolongements analytiques de celui-ci. Néanmoins les premiers travaux d'approche concernant la fonction ζ consistent à la lier à des fonctions entières, notamment à une fonction ξ présentant la propriété fonctionnelle

$$\xi(s) = \xi(1 - s)$$

et qui est bien décomposable en facteurs primaires suivant un procédé étudié jadis par M. Hadamard. Les travaux de M. Valiron se rapportent aussi à de tels points. D'ailleurs $\zeta(s)$ intervient directement dans plusieurs relations fonctionnelles remarquables dont l'une établit une correspondance entre le demi-plan situé à gauche de l'axe imaginaire et le demi-plan situé à droite de la parallèle au dit axe menée par le point 1 qui est un pôle. Entre ces deux régions est la terrible bande critique qui a déjà absorbé tant d'efforts pour l'obtention de résultats qui ne sont pas précisément très étendus. Lindelöf, Hardy, Littlewood, Weyl ont donné d'importantes formules asymptotiques. Les formules intégrales donnant des valeurs moyennes sont également à remarquer et il y a aussi, pour $\zeta(s)$, des relations fonctionnelles approchées.

Pour en revenir à la mystérieuse distribution des zéros, elle a donné lieu à des *hypothèses* selon des modes de raisonnement peu usités en Analyse et qui montrent bien les exceptionnelles difficultés du sujet. On associe à $\zeta(s)$ d'autres fonctions à zéros; si l'on pouvait prouver que ces derniers ont telle ou telle distribution, ceux de $\zeta(s)$ seraient mieux repérés. Après cela, que dire qui semble immédiatement accessible, sur le comportement général de

$\zeta(s)$ dans tout le champ complexe. Malgré ces difficultés et justement à cause d'elles, le livre de M. Titchmarsh est d'une grande valeur. Il contient certainement tout ou à peu près tout ce que l'on pouvait donner quant aux propriétés exactes de la fonction en litige; quant aux propriétés approchées, elles unissent le domaine précédent au domaine moderne de la Théorie des fonctions. Ce n'est pas un mince mérite que de lier ces deux ordres d'idées à propos d'une seule fonction.

A. BUHL (Toulouse).

Paul PAINLEVÉ. — **Cours de Mécanique** professé à l'Ecole Polytechnique. Tome I. — Un volume in-8° de 14-664 pages et 169 figures. Prix: 100 francs. Gauthier-Villars & Cie. Paris, 1930.

La disparition de Paul Appell et l'autorité qui s'attache à son œuvre donnent un grand intérêt aux tentatives nouvelles concernant l'enseignement de la Mécanique. A l'Ecole Polytechnique, nous avions d'autre part le Cours de M. Léon Lecornu dont la publication, si elle est terminée depuis 1918, n'en a pas moins une très grande importance que nous avons essayé de faire ressortir, ici-même, en des comptes rendus détaillés. Avec M. Painlevé nous sentons partout l'influence d'Einstein.

Paul Appell avait mis la Mécanique analytique en grande lumière et Einstein dans un cinquième et dernier volume, la simple chronologie ne permettant guère de faire autrement; il ne tenait pas beaucoup, d'ailleurs, à des discussions de principes, les plus universellement admis suffisant aux développements de sa brillante analyse. M. Painlevé insiste sur les principes et nous montre tout de suite comment leur examen attentif fait naître la Gravifique dont les redoutables complications peuvent être laissées de côté au premier abord. On viendra à la seconde approximation quand on connaîtra très bien la précédente. C'est avec grande raison que, dans l'examen des postulats, l'auteur fait une critique serrée qui vise surtout les notions de distance et de temps. Les étalons subissent le champ gravifique; ce n'est qu'en admettant qu'ils échappent pratiquement à l'action de ce champ qu'on a l'espace homogène et l'attraction newtonnienne. Même remarque pour les horloges. Mais la technique a ses besoins et elle se déroule dans un espace si restreint que les scrupules einsteiniens y sont superflus; il y aura donc encore de nombreuses pages pour l'ancien classicisme.

Une autre chose très digne d'être remarquée, en ce volume, est l'exposition, en premier lieu, des principales généralités relatives au mouvement des systèmes, la dynamique du point ne venant qu'ensuite. Ceci paraît tenir au désir de mettre en évidence les théorèmes universels de première approximation et les interactions telles que le frottement, avec leur nécessaire accompagnement thermique. Il eut été assez vain de vouloir être universel quant à la construction des principes pour ne tomber ensuite que dans la presque abstraction de la dynamique ponctuelle. Ceci n'empêche pas que lorsqu'on parvient à cette dernière dynamique on la trouve illustrée d'une foule de mouvements intéressants et pratiques, notamment de mouvements oscillatoires, de mouvements avec résistance de milieu et vitesses limites, d'importants développements balistiques, d'une théorie des forces centrales appliquée au mouvement d'un électron, d'une théorie du tautochronisme, de l'étude d'un mouvement sur une courbe fixe dépolie avec première apparition des lois de Coulomb. Les trajectoires, dans le cas du pendule

sphérique, donnent de curieuses figures ; viennent ensuite les surfaces dépolies et les liaisons unilatérales.

Le théorème de Coriolis permet une synthèse rapide de nombreuses questions de mouvements relatifs. L'attraction newtonienne et la pesanteur sont réexaminées de très près, jusque dans leurs rapports avec les marées de l'écorce terrestre.

Le volume se clôt par une Théorie générale de l'équilibre et des mouvements des systèmes. C'est évidemment le Principe des travaux virtuels qui entre en jeu. Après des études connues, telles celle de l'équilibre des fils, nous trouvons des pages très originales sur le mouvement des fils. C'est le milieu continu, à une dimension, déformable, il est vrai, dans un espace qui peut en avoir deux ou trois mais non sans qu'on aperçoive déjà quelques généralités propres à la mobilité des milieux continus quels qu'ils soient. C'est ainsi qu'il y a des mouvements de fils *permanents* où le fil glisse, pour ainsi dire, sur une position d'équilibre mais avec une tension différente.

Signalons encore le Principe de d'Alembert avec limitation stricte des systèmes auxquels il s'applique, la Théorie des petits mouvements intéressants surtout quand ils tendent à se superposer ou à obéir à des forces perturbatrices périodiques. Enfin, ce même Principe de d'Alembert, dans le cas de liaisons dépendant du temps, nous fait passer aux équations de Lagrange, et à ce qu'on en peut conserver pour les systèmes à frottement. Elles permettent d'ailleurs de reprendre les petits mouvements. Voici enfin les percussions, le théorème de Carnot et un curieux chapitre sur le frottement considéré bien plus comme phénomène utile (mordaches, encliquetages, ...) que comme phénomène parasite.

Faut-il rappeler que le frottement a toujours été favorable à M. Painlevé qui y a vu l'occasion de travaux auxquels il doit une notable partie de sa grande célébrité.

A. BUHL (Toulouse).

Paul PAINLEVÉ et Charles PLATRIER. — **Cours de Mécanique** professé à l'Ecole Polytechnique. — Un volume in-4^o de VIII-644 pages et 159 figures. Prix: 150 francs. Gauthier-Villars & Cie. Paris, 1929.

Il n'est pas absolument évident, à première vue, que ce volume soit la suite du précédent. Les formats ne sont pas les mêmes; le premier volume ne dépend que d'un seul professeur et est daté de 1930 tandis que le second dépend de deux et est daté de 1929. Ces anomalies, à coup sûr fort secondaires, semblent tenir à la hâte avec laquelle il a fallu, à de certains moments, fournir aux élèves les feuilles de cours les plus immédiatement utiles. Mais il devient rapidement clair que le volume de tout à l'heure se rapportait à un enseignement de première année et que celui-ci se rapporte à l'enseignement de la seconde.

Ici le modernisme revêt un aspect de prodige, ce que les sous-titres de l'ouvrage suffisent à indiquer. Mécanique des solides indéformables. Mécanique des milieux continus déformables. Théorie sommaire des machines et de l'aviation. Les Mécaniques de Newton et d'Einstein. Il me semble réentendre des clamours déjà entendues pour beaucoup moins. Quoi ! le même enseignement pour les praticiens qui auront à construire des avions et pour les métaphysiciens suspects qui s'avisent de voir dans les Théories d'Einstein une des plus sublimes créations de l'intelligence ! Eh oui, Messieurs et parfois

chers Collègues, il faut maintenant savoir accepter cela. Tout de même vous auriez pu vous éviter cette amertume. Ne vous a-t-on point suffisamment avertis ?

Faut-il ajouter que le rapprochement dont il s'agit s'explique de la manière la plus simple. L'explication est même dans le seul jeu des notations tensorielles employées couramment par M. Platrier. Ces notations font entrer dans un même moule les équations relatives aux milieux déformables, les équations électromagnétiques de Maxwell et enfin la géométrie riemannienne d'un ds^2 quelconque, c'est-à-dire l'espace de Riemann dont l'ensemble des propriétés physiques apparaît en Gravifique.

Mais voyons ce beau cours d'un peu plus près. La Dynamique des solides est fondée sur la considération de tenseurs symétriques du second ordre; un tenseur d'inertie correspond à l'archaïque notion des moments d'inertie et, dès lors, on se trouve outillé pour aborder, avec le maximum d'harmonie, les mouvements autour d'un axe et d'un point fixe. Le mouvement à la Poinsot revêt son élégance accoutumée. La démonstration de la non-existence des points d'infexion de l'herpolhodie est celle de M. Lecornu. Au delà, après les cas de Lagrange et de Poisson, un grand développement est donné à l'étude du mouvement gyroscopique. On sait que ce domaine peut encore intéresser également théoriciens et praticiens. De même, la théorie du solide libre trouve son application en balistique, avec les projectiles d'artillerie dont il importe de ménager la chute sur la pointe.

La Mécanique des milieux continus est fondée sur la notion de tenseur dissymétrique et sur celle de *transformation* du milieu mise en harmonie avec l'hypothèse fondamentale de continuité. Le calcul tensoriel est ici en pays d'origine; les tenseurs sont nés des tensions. La première application des équations générales de mouvement ou d'équilibre constitue l'hydrostatique. Avec l'hydrodynamique, la circulation et les tourbillons nous rencontrons la notion si importante de *potentiel d'accélérations*, plus récente que celle de potentiel de vitesses mais profondément liée avec les singularités tourbillonnaires ou ondulatoires. Et nous voici bientôt, en effet, à la propagation des ondes, sorte de cinématique à surfaces singulières que les considérations vectorielles et tensorielles rendent maintenant très claire.

Le paradoxe de d'Alembert est l'objet d'explications très ingénieuses qui distinguent la durée du déplacement d'un solide dans un fluide de la durée, différente, pendant laquelle travaillent les résistances.

La Théorie de l'élasticité commence naturellement par l'élastostatique. Les petits mouvements sont brillamment illustrés par les ondes planes. Les corps minces et les tiges donnent un chapitre remarquable précédant celui relatif à la Résistance des matériaux. Quant aux machines, il ne faut pas prendre le mot au sens élémentaire, les moteurs thermiques étant traités. L'aviation est d'abord une étude de la résistance de l'air et du vol sans moteur. L'avion complet ne vient, on le voit, qu'après deux étapes préliminaires.

C'est après tant et tant d'explications que l'on revient sur les principes classiques dont beaucoup de conséquences n'ont pas été d'accord avec l'expérience. Cette marche est celle que l'esprit humain a naturellement suivi pour arriver à la Gravifique. Celle-ci complète et ne renverse rien, comme l'ont trop souvent annoncé les vulgarisateurs dangereux. C'est ce que nous avons toujours dit ici-même. La dernière page magnifie l'induction productive de grandes découvertes mais laissant parfois de l'inquiétude alors

qu'on aimerait être en confiance absolue. Ces derniers mots seuls ne sont pas d'accord avec les idées philosophiques que nous défendons dans la présente Revue. Pour nous, il n'y a pas et il ne peut y avoir de théorie conduisant à la confiance absolue; l'imperfection, le désaccord avec quelque fait qui se révélera demain si l'on ne le connaît pas aujourd'hui, sont choses inévitables. Il faut en prendre son parti, disait Henri Poincaré. Le vrai, dans cet ordre d'idées, est un mot, qui tend de plus en plus à perdre tout sens. Contentons-nous de créer du beau. Ici la possibilité est indéniable; MM. Painlevé et Platrier l'ont prouvé une fois de plus.

A. BUHL (Toulouse).

Paul PAINLEVÉ. — **Leçons sur la Résistance des Fluides non visqueux**
rédigées par A. Métral et R. Mazet. Première Partie rédigée par A. Métral.
— Un volume grand in-8° de VIII-184 pages et 32 figures. Prix:
40 francs. Gauthier-Villars & Cie. Paris, 1930.

Ces Leçons ont été professées à Paris dans la Chaire de Mécanique des Fluides fondée par le Sous-Secrétariat d'Etat de l'Aéronautique. Elles constituent, pour ainsi dire, une étude spéciale, aussi logique qu'audacieuse, d'une série de difficultés contradictoires dont le prototype est le paradoxe de d'Alembert. En une telle matière, il faut, plus que jamais, faire confiance aux mathématiques. Considérons un milieu continu A, plus qu'idéal, dans lequel chaque particule serait assimilable à un point *libre*, les mouvements de l'ensemble n'étant qu'une question d'agencement géométrique des trajectoires.

Prenons ensuite le cas *idéal* B, au sens ordinaire de l'adjectif souligné, et enfin le cas C où la viscosité intervient. Les mêmes opérations tensorielles permettent de passer de B à C comme on passe de A à B. Voilà qui est encourageant. C'est dans cet ordre d'idées qu'on peut espérer, en partant de quelque image ultra-simple, trouver, tout-à-coup, un mode de généralisation éclairant l'association de paradoxes qui n'empêche pas les avions de voler. Il y a encore les lois de la résistance de l'air, qui vraiment semblent peu formulables et qu'on ne peut décorer du nom de lois qu'avec une immense complaisance, mais enfin on ne débrouillera l'écheveau qu'en cherchant le fil d'Ariane parmi des schèmes analytiques simples et le but primordial du présent volume paraît être de présenter tous ces schèmes. Beaucoup de personnes croient que les recherches théoriques sur la résistance de l'air sont très modernes. Il n'en est rien. Newton, Euler se sont essayés à cette étude dont ils sentaient certainement l'importance mais pour n'arriver qu'à des résultats qu'ils jugeaient eux-mêmes extrêmement précaires. Ces questions ne vont même point sans difficultés philosophiques sur le point de faire dépendre ou non un phénomène actuel de tout le passé des éléments matériels en présence.

L'arsenal mathématique mis ici à la disposition des chercheurs débute naturellement par les transformations d'intégrales multiples. Toute la Physique théorique est là.

Suivent les fonctions harmoniques et analytiques avec leurs possibilités de transformation, leurs singularités, l'établissement de connexions sans lesquelles tout n'est que paradoxe et ceci fait bien comprendre la nature des immenses difficultés auxquelles on se heurte. Que, pour étudier une fonction compliquée, on crée un domaine connexe tel une surface de

Riemann, voilà qui peut déjà devenir rapidement difficile, mais ce n'est rien à côté d'un problème fluide où il faudra tenir compte de singularités à la fois superficielles et mobiles telles que les ondes. Il ne serait pas étonnant qu'en de tels domaines, un pas énorme soit fait grâce à quelque analysis situs d'ordre supérieur. En attendant les transformations analytico-géométriques de cas simples en cas plus complexes, les possibilités de similitude, les cas à potentiels de vitesses sont les premiers travaux d'attaque dont l'étude doit être proposée. Ils peuvent diriger, vers la Mécanique des fluides et l'aviation, bien des esprits qui, jusqu'ici, n'auraient été épris que de choses abstraites.

A. BUHL (Toulouse).

Henri VILLAT. — **Mécanique des Fluides.** Cours de l'Ecole nationale supérieure d'Aéronautique. — Un volume grand in-8° de VIII-176 pages et 85 figures. Prix: 50 francs. Gauthier-Villars & C^{ie}. Paris, 1930.

L'aviation continue à demander beaucoup à la Mécanique des Fluides. Celle-ci apparaît comme devant être de plus en plus plastique, au point de vue pratique, car elle commence à fournir des résultats théoriques si intéressants qu'on est porté à en développer l'étude en espérant, très légitimement, des contacts de plus en plus nombreux avec la réalité. Telle est, du moins, l'impression globale donnée par ce nouveau Cours que M. Henri Villat publie si peu de temps après des *Leçons sur l'Hydrodynamique* et des *Leçons sur la Théorie des Tourbillons* que *L'Enseignement mathématique* vient à peine d'annoncer et d'analyser (pp. 176-180).

Le présent volume débute par des notions classiques, simples et symétriques, parmi lesquelles on peut remarquer tout de suite les formules de Biot-Savart donnant les vitesses en fonction des tourbillons, formules si remarquables, quant à leur génération. Tourbillons et *sources*, en petit nombre, donnent des aperçus géométrico-analytiques faisant facilement image. Il faut ensuite se familiariser avec les fonctions analytiques et harmoniques, avec les transformations d'intégrales multiples; pas de Physique mathématique ou théorique sans cela. Dès que l'on est ainsi armé, on n'a pas la joie de vaincre immédiatement toutes les difficultés, mais on a l'honneur de se heurter au Paradoxe de d'Alembert, l'une des plus grandes révoltes du réel contre notre rationalisme. Mais il serait par trop bizarre que l'aéronaute théoricien ne rencontrât point de ces difficultés, quelque peu formidables, alors que l'aéronaute praticien en a tant et tant rencontrées.

Le chapitre sur la représentation conforme semble si joli qu'il est vraisemblablement la quintessence d'un nouvel ouvrage que M. Villat promet, pour bientôt, sur le sujet. On y voit une représentation d'un polygone sur le cercle qui remet en mémoire quelque groupe fuchsien. Suit le théorème de Kutta-Joukowsky concernant la résultante des pressions exercées sur un contour fermé, théorème encore très simple quand le contour ne présente pas de points singuliers. Néanmoins le théorème est toujours de grande valeur, d'abord parce que les points singuliers d'un contour ne sont jamais exactement réalisés, ensuite parce qu'il y a, par exemple, des profils à pointe pour lesquels l'analyse régulière peut être complétée avec le secours de formules intégrales très réduites dites *formules de Blasius*. Enfin une généralisation du théorème de Kutta-Joukowsky est possible pour un fluide incompressible, en mouvement non permanent et contenant des tourbillons isolés.

La théorie de Prandtl et des surfaces portantes, grâce aux *turbillons liés* et à l'aile fluide fictive en repos, peut se greffer sur le théorème de Kutta. Derrière l'aile apparaissent aussi les files de tourbillons alternés avec leur représentation par séries de fractions rationnelles. Avec les sillages, particulièrement illustrés par les travaux personnels de M. Villat et par ceux de M. Tullio Levi-Civita, nous retrouvons de nombreuses élégances de la représentation conforme. Les fluides visqueux sont susceptibles d'une analyse calquée sur celle de la petite équation aux dérivées partielles relative à la conductibilité calorifique; ceci conduit au beau résultat intégral d'Oseen qui, moyennant les données des vitesses et des pressions le long d'une surface fermée S , exprime l'état du fluide à l'intérieur de S .

Ces quelques mots, on le voit, nous amènent à répéter des choses déjà dites en analysant les deux précédents ouvrages de M. Henri Villat. Rien de plus naturel, de même qu'il est naturel que M. Villat ne parle pas à l'Ecole d'Aéronautique un langage essentiellement différent de celui parlé à la Sorbonne. Mais, limité par un cadre étroit de quatorze leçons, ce savant et si sympathique auteur n'a certainement voulu y mettre que des choses très esthétiques et relativement élémentaires. Il s'ensuit que ce troisième volume peut être considéré comme une introduction particulièrement heureuse à l'étude des deux premiers.

A. BUHL (Toulouse).

Charles CAMICHEL. — **Leçons sur les Conduites.** — Un volume grand in-8° de XII-102 pages et 58 figures. Prix: 30 francs. Gauthier-Villars & Cie. Paris, 1930.

Il s'agit encore de Leçons professées à Paris dans la Chaire de Mécanique des Fluides fondée par le Sous-Sécrétariat d'Etat de l'Aéronautique. La Mécanique des fluides prend vraiment une importance pratique de tout premier plan. On pourrait peut-être penser qu'ici l'aviation n'est pas en cause mais ce serait un jugement bien téméraire car tout moteur, tout dispositif présentant des tuyautages peut être le siège des intéressants phénomènes étudiés par M. Camichel. Il y a même des répercussions assez inattendues; les ondes qui se propagent dans les conduites, les coups de bâlier sont en relation obligée avec l'élasticité des parois et l'on n'étudie convenablement ces conduites que depuis que l'on sait produire les matériaux les constituant, en particulier les aciers, dans des conditions s'accordant suffisamment avec les évaluations et les prévisions des théories élastiques. N'y a-t-il pas là une belle union de l'Hydrodynamique et de l'Elasticité, union qui intéresse la théorie pure autant que la pratique.

Une conduite dite à caractéristique unique a partout même diamètre et même épaisseur; on ramène aisément sa théorie, comme on pouvait le prévoir, à l'équation des cordes vibrantes. Les solutions à fonctions arbitraires, de d'Alembert, peuvent être immédiatement utilisées quant aux propagations ondulatoires et aux répartitions de pressions. Certaines de ces répartitions donnent des graphiques à points d'abord anguleux mais tendant de plus en plus à s'arrondir, la forme limite étant sinusoïdale. Ce n'est donc que dans certaines régions et après certaines périodes que les solutions trigonométriques simples de l'équation des cordes peuvent intervenir. Ailleurs et auparavant les discontinuités sont mieux traitées au moyen des fonctions arbitraires introduites d'abord par la méthode de

d'Alembert. On imagine que des mathématiciens purs pourraient mettre ceci en relation avec la théorie des approximations par sommes trigonométriques d'un nombre fini de termes. Une remarquable théorie de M. de Sparre régit des coups de bâlier par comparaison avec une progression géométrique décroissante. Puis la théorie s'harmonise au sens acoustique du mot. Les harmoniques apparaissent avec tout un cortège de phénomènes de résonance, ce qui n'est pas sans influer sur le débit. Passons ici sur les procédés employés pour entretenir ondes et résonances.

Dans les conduites à caractéristiques multiples, les considérations théoriques précédentes se maintiennent assez bien au prix de quelques complications analytiques. Mais la méthode graphique d'observation se révèle particulièrement intéressante. C'est là que les phénomènes de résonance et de superpositions d'harmoniques donnent de curieux tracés qui deviennent plus curieux encore lorsqu'il s'agit de conduites possédant des poches d'air. Dans ce dernier cas la théorie analytique possède encore des accords remarquables avec les faits. Il y a aussi des répartitions de surpressions analogues aux répartitions de potentiels dans des conducteurs électriques placés en série. On voit qu'il en est de la théorie des conduites comme de bien d'autres chapitres de la Science. Une question primitive qu'on peut croire particulière et facilement limitable n'est vraiment éclaircie qu'en en rapprochant d'autres prises dans des régions très diverses. D'ailleurs nous sommes ici dans un domaine illustré par Boussinesq, Korteweg, Resal, Joukowski, Rateau, Jouguet, Allievi, de Sparre, Eydoux, Gariel, enfin par M. Camichel lui-même et nous sommes aussi à une époque de houille blanche où l'intérêt du sujet ne peut que grandir et se développer en de multiples directions.

A. BUHL (Toulouse).

Louis DE BROGLIE. — Recueil d'Exposés sur les Ondes et Corpuscules. —

Un volume gr. in-8°, de VIII-82 pages, avec un portrait signé de l'Auteur. Prix: 20 francs. Hermann & Cie. Paris, 1930.

Ce Recueil rassemble des articles déjà publiés ou des conférences déjà entendues par des privilégiés relativement rares. Il est grandement heureux que le tout puisse être compilé maintenant sous forme d'un fascicule unique présentant cinq subdivisions :

La Physique moderne et l'Œuvre de Fresnel (Revue de Métaphysique et de Morale, novembre 1927).

Ondes et Corpuscules dans la Physique actuelle (Communication faite à Glasgow devant l'Association britannique pour l'Avancement des Sciences en septembre 1928).

La récente crise de l'Optique ondulatoire (Conférence faite au Conservatoire des Arts et Métiers le 17 avril 1929 et publiée par la « Revue scientifique » du 22 juin 1929).

Comme la Lumière les Electrons peuvent interférer (Revue « Lumière et Radio » du 10 novembre 1929).

Déterminisme et Causalité dans la Physique contemporaine (Revue de Métaphysique et de Morale, décembre 1929).

En ces expositions présentées en des lieux et des temps différents, l'auteur a dû faire inévitablement quelques répétitions. L'ensemble n'en est pas

moins merveilleux et empreint du plus haut esprit philosophique. Dans le premier article l'œuvre de Fresnel est magnifiée ; c'est elle qui est proposée, comme modèle primordial, à la Mécanique ondulatoire. Voilà de la vraie Science. Aucune théorie n'est diminuée, aucun bouleversement n'est annoncé. Tout rentre harmonieusement dans les formes synthétiques nouvelles. A cet égard on ne louera jamais assez le jeune et si brillant esprit qui a fait cesser l'opposition existant entre émission et ondulations. La principale préoccupation des conférences ou écrits ci-dessus est d'esquisser quelques images montrant l'accord des ondes et des corpuscules. Chaque corpuscule est-il une sorte de centre ondulatoire ou chaque onde admet-elle des singularités qui seraient corpusculaires ? Et encore cela ne ferait jamais que deux schèmes alors qu'on peut en concevoir bien d'autres.

M. Louis de Broglie nous montre d'abord que, sur de tels points, la Science est encore dans l'expectative. Il se peut même qu'elle y soit toujours et qu'à un phénomène mécanique qui semble bien déterminé, pour nos sens grossiers, puisse correspondre, dans le domaine des ondes ou des « ondelettes », une infinité de représentations. Ceci mène précisément à conclure en réexaminant le déterminisme et le concept de causalité tel, par exemple, que le défendait Laplace à propos de probabilités. Le probable et l'incertain ont aujourd'hui des formes plus curieuses encore. Heisenberg nous donne des « relations d'incertitude » qui font, par exemple, que la précision de mesures de coordonnées ne peut être obtenue qu'aux dépens de la précision de mesures de vitesses. La métrique généralisée d'abord par Einstein dans le domaine astronomique demande de nouvelles transformations dans le domaine intra-atomique où les choses se passent parfois comme si ce nouveau monde se défendait intelligemment contre nos investigations. Mais contentons-nous d'admirer la pensée de M. Louis de Broglie et ne cherchons pas à la dépasser.

A. BUHL (Toulouse).

Geatano CASTELFRANCHI. — **Physique moderne.** Traduction française de M. A. Quemper de Lanascol. — Un volume grand in-8° de 1466 pages et 147 figures. Prix: 70 francs. Albert Blanchard. Paris, 1930.

Ce gros ouvrage s'annonce, en sous-titre, comme un Exposé synthétique et méthodique de la Physique d'aujourd'hui et des Travaux théoriques et expérimentaux des plus grands Physiciens contemporains. Il est divisé en vingt Chapitres.

I. Atomes et molécules en Chimie physique. — II. La Lumière. — III. Théorie cinétique des gaz. — IV. Le mouvement brownien. Jean Perrin. — V. Les fluctuations. Einstein, Smoluchowski. — VI. La Relativité et la masse. Einstein. — VII. L'électron et les rayons positifs. H.-A. Wilson, M. de Broglie, Millikan, J.-J. Thomson, Aston, Dempster. — VIII. Les Rayons X et le Numéro atomique. Moseley, Siegbahn. — IX. Les Cristaux. Laue, les Bragg, Debye, Scherrer. — X. La Radioactivité. Curie, Rutherford, Soddy, Fajans, Geiger. — XI. L'atome nucléaire. Rutherford. — XII. Les Radiations thermiques et les Quanta. Max Planck. — XIII. L'atome de Bohr. — XIV. Sommerfeld et l'atome d'hydrogène. Les autres atomes. Stark, Lo Surdo, Zeeman, Pauli, Landé. — XV. Les chaleurs spécifiques. Einstein, Debye, Nernst, Lindemann. — XVI. L'effet photoélectrique et son inverse. Einstein, Millikan, M. de Broglie, Duane, Hunt. — XVII. L'effet

Compton. Les quanta de lumière. Compton, Simon, Debye, C.-T.-R. Wilson, Bothe, Geiger. — XVIII. Le Magnétisme et les Quanta. Weiss, Stern, Gerlach, Hund, Pauli, Cabrera. — XIX. La Mécanique ondulatoire et la Quantistique. L. de Broglie, Schrödinger, Heisenberg, Born, Jordan, Dirac. — XX. Les nouvelles statistiques. Fermi et Bose.

Cette réunion de titres, à elle seule, indique l'impossibilité d'une véritable analyse de cet Ouvrage ou du moins d'une reproduction de toutes les réflexions qui viennent en le parcourant. En son ensemble il est inattendu, en ce sens qu'il ne semblait guère imaginable qu'un seul auteur puisse tenter un aussi formidable exposé synthétique enrichi de biographies, de tableaux, de statistiques, de figures extrêmement démonstratives et d'une analyse mathématique qui, si elle ne figure pas partout, emplit cependant de nombreuses pages. Une telle encyclopédie ne dispense peut-être pas de l'étude d'ouvrages plus particuliers, tels ceux examinés récemment par *L'Enseignement mathématique*, mais elle peut servir de liaison entre eux en rappelant des choses qu'on oublie fatalement en se référant à un trop petit nombre de documents. Le mérite de l'auteur est grand. Il courait le risque, en écrivant aussi longuement, de mettre au jour un livre déjà arriver. Or il n'en est rien. De plus, le point de vue physique transparaît d'une manière parfaite. Beaucoup de mathématiciens, qui aperçoivent des résultats intéressants théoriquement, craignent que ceux-ci apparaissent comme insuffisamment étudiés sous le rapport expérimental. Ils trouveront les plus utiles indications dans le texte de M. Castelfranchi.

L'esprit philosophique est excellent. C'est celui qui se dégage des vastes synthèses faites partout dans un esprit compréhensif, avec le désir d'éclairer toutes choses l'une par l'autre et non de procéder par oppositions mesquines faites au bénéfice des uns — souvent de soi-même — et au détriment des autres.

Ces théories modernes ont mis en évidence, de façon curieuse, des différences psychologiques fondamentales entre des hommes appartenant plus ou moins au monde scientifique. Il y en a certainement qui ne peuvent se retenir de critiquer surtout quand il leur semble que la critique peut dissimuler quelque incompréhension. Rappelons encore que la supériorité, selon Renan, va avec la faculté d'admirer. M. Castelfranchi a certainement beaucoup admiré; il tente de développer à chaque page nos facultés d'admiration. C'est là qu'est la grande force de son œuvre.

A. BUHL (Toulouse).

Emile SEVIN. — **Gravitation, Lumière et Electromagnétisme.** Synthèse physique. Préface de M. Maurice d'Ocagne. — Un volume grand in-8° de xiv-62 pages et 9 figures. Prix: 18 francs. Albert Blanchard. Paris, 1920.

M. Emile Sevin a déjà publié un Ouvrage, d'une étendue à peu près double de celui-ci, sur « Le Temps absolu et l'Espace à quatre dimensions. Gravitation. Masse. Lumière », ouvrage analysé ici-même (T. XXVII, 1928, p. 345) non sans sympathie mais seulement avec quelques réserves touchant l'infine multiplicité des possibilités théoriques. Il nous semble que M. Emile Sevin aurait dû s'en tenir là. L'impression qu'il donne maintenant est un peu moins bonne. Il abandonne le terrain de l'image, du schème, de la représentation pour aller vers une théorie qui serait peut-être empreinte, plus que les autres, de vérité. A notre avis, rien de plus dangereux. Les

sympathies de l'auteur semblent aller aux ondes sans singularités matérielles ponctuelles, notamment sans photons, et cependant il admet des radiations ondulées à discontinuités énergétiques. Actuellement il apparaît que les ondes peuvent être de plus en plus chargées de singularités dont nous sommes encore loin de concevoir toutes les formes. Les limitations, ici, ne semblent pas prudentes.

Une critique de l'Analyse mathématique, qui (p. 9) ne peut rien nous apprendre sur la nature des choses, n'est pas prudente non plus bien qu'étant très exacte; le malheur est que l'auteur paraît donner à entendre qu'il aperçoit, lui, quelque système levant, de manière absolue, des énigmes fondamentales. Décevant mirage.

On lit avec intérêt certaines comparaisons, notamment celle du savant qui étudie un roulis sur des graphiques, en fait une théorie, mais ne conçoit vraiment la vraie physique du phénomène que quand on lui révèle le navire et la mer. Il est encore certain que nous ressemblons tous à ce savant, mais quel dieu nous fera l'ultime révélation ? Plus loin, à propos du spectre X continu (p. 51), il semble être admis qu'on puisse décrire un même phénomène d'une infinité de manières qui toutefois ne se rapporteraient qu'aux logiques des esprits descripteurs. Bien. Mais quel est le suresprit qui fera la surdescription ?

N'oublions pas toutefois que M. Emile Sevin a su intéresser, à son œuvre, M. Maurice D'Ocagne, auteur d'une Préface en laquelle on ne relève aucune imprudence. D'autres pourraient évidemment porter à l'exposé un intérêt égal. Tout de même, il est dommage que Louis de Broglie et Albert Einstein ne soient pas mieux traités. La Science actuelle ne nous semble pas pouvoir se faire, si peu que ce soit, contre ces intelligences.

A. BUHL (Toulouse).

N. ABRAMESCO. — **Lectiuni de Geometrie pură infinitezimală.** Préface, portrait et dédicace de M. Maurice d'Ocagne. — Un volume grand in-8° de VIII-234 pages et 166 figures. Prix: 220 lei. Université de Cluj. 1930.

Ces Leçons de Géométrie infinitésimale pure semblent compléter, de la manière la plus heureuse, les Leçons de Géométrie analytique récemment signalées (p. 194). Ceci est, sans doute, aussi l'avis de M. Maurice d'Ocagne dont les préfaces, on le voit, sont recherchées en différents domaines mais s'imposent tout particulièrement dès qu'il s'agit de Géométrie pure. Dans ce domaine, c'est d'ailleurs toute une Ecole qu'il faut évoquer avec Monge, Poncelet, Ossian Bonnet, Chasles, Mannheim, Darboux, Appell et, bien entendu, Maurice d'Ocagne. Les Français seront particulièrement fiers de voir tous ces noms rappelés en des Leçons professées en Roumanie. Celles-ci commencent avec les infinitésimales géométriques et l'étude du voisinage d'un arc de courbe plane. On reconnaît bientôt des méthodes de normales et de rayons de courbure appliquées à de nombreux exemples. Dans le même ordre d'idées les courbes gauches sont liées à la surface polaire. Sur les surfaces, toutes les notions géodésiques jouent un rôle primordial. La théorie des complexes et des congruences est vraiment géométrique; ce n'est pas un développement analytique du concept de moment. Elle est suivie de notions de Géométrie cinématique spatiale qui donnent de jolis aperçus sur les hélicoïdes et la surface des ondes. Beaucoup de figures sont représentées avec le secours de la Géométrie descriptive. L'intuition

s'exerce partout de façon éclectique. Les harmonies se voient et se calculent très peu. Nous ne pouvons que joindre nos félicitations à celles que M. d'Ocagne n'a pas ménagées à l'auteur de ce nouvel et excellent livre.

A. Buhl (Toulouse).

Maurice d'Ocagne. — Hommes et Choses de Science. Propos familiers. —

Un volume petit in-8° de VIII-306 pages. Prix: 15 francs. Vuibert. Paris, 1930.

De mieux en mieux. Après les deux ouvrages précédents, préfacés par M. Maurice d'Ocagne, nous retrouvons ce dernier lui-même, sous une forme ultra-sympathique tout à fait habituelle, il est vrai, mais qui se manifeste particulièrement en ces « Propos familiers ». Ce n'est point du discours académique; cela rappelle beaucoup plus les « Propos de table » de certains auteurs anglais et c'est, en effet, la conversation, parfois très élevée, qui naît entre techniciens et savants de tous ordres, après dîner, quand les cigares commencent à s'allumer. Personne n'est critiqué; ceux qui méritent des critiques sont sagement laissés hors du tableau. Il y a beaucoup plus d'intérêt à louer et à admirer de vastes intelligences comme (p. 7) « la pléiade de grands penseurs que dominent les noms de Lorentz, d'Einstein et, en tout dernier lieu, de Louis-Victor de Broglie ».

Les mathématiciens défilent, comparés avec des calculateurs. Les uns sont esprits, les autres machines, ce qui est péremptoirement prouvé par les machines à calculer qui vont jusqu'à résoudre toutes sortes d'équations et à jouer aux échecs. Ceci porte à penser que beaucoup de nos actes, qui nous semblent réfléchis et doués de libre arbitre, peuvent n'avoir au fond, qu'un caractère machinal.

Pierre Fermat, homme de génie qui n'a jamais rien publié, jouit du privilège de s'être avancé plus loin que ses successeurs. Pascal mérite bien son triangle arithmétique, connu cependant des Chinois; sa roulette est déjà une merveille de géométrie cinématique. Le Chevalier de Borda précède Louis Lagrange, père de la Mécanique analytique, Pierre-Simon Laplace créateur de la Mécanique céleste, Gaspard Monge, père des Polytechniciens et partisan fanatique de Napoléon que M. d'Ocagne nous présentera, un peu plus loin, comme géomètre. Il y a deux grands Carnot, l'organisation de la Thermodynamique valant celle de la victoire. Cauchy nous apparaît comme adroit versificateur. Jean-Victor Poncelet est un grand inventeur révélé par une captivité de guerre. Michel Chasles est un « Empereur de la Géométrie » dupé par un faussaire. Evariste Galois fait partie des « enfants sublimes ». Enfin il y a des « femmes de science » qui sont même l'objet d'une longue énumération.

Après ces débuts qui se rapportent plutôt à la Science pure, nous venons à la Technique, à Auguste Choisy et à l'art de bâtir, à Paul Séjourné et aux ponts de pierre, à Albert Caquot, aux chemins de fer souterrains de Paris, aux marées et à leur utilisation. Le volume se clôt sur un Jules Verne anecdotique, brossé avec un rare bonheur. Nous avons même la phototypie d'une lettre de Jules Verne à l'auteur où le romancier s'avoue stupéfait d'une traduction du cryptogramme placé en tête du premier volume de « La Jangada », traduction faite par M. Sommaire, élève à l'Ecole Polytechnique, alors que Verne croyait bien à une indéchiffrabilité dont il ne donnerait la clef qu'au tome second.

Ces quelques citations montrent assez jusqu'à quel point M. Maurice d'Ocagne a poussé l'art du conteur et le charme de l'anecdote, tout en y joignant la plus sérieuse documentation.

A. BUHL (Toulouse).

Léon LICHENSTEIN. — **Zur Einführung in die Philosophie von Emile Meyerson.** Sonderabdruck aus *Identität und Wirklichkeit* von Emile Meyerson, deutsch von Kurt Grelling, eingeleitet und mit Anmerkungen versehen von Leon Lichtenstein. — Une brochure in-8° de XL pages. Akademische Verlagsgesellschaft M. B. H., Leipzig, 1930.

Nous avons déjà signalé (p. 207) cette Préface à une traduction commentée qui est publiée maintenant. Si nous y revenons, c'est qu'elle présente un vif intérêt correspondant à plusieurs remarques qu'on trouvera dans les analyses bibliographiques précédentes.

M. Léon Lichtenstein situe le point principal de la philosophie de M. Emile Meyerson en disant que la Nature n'est point complètement rationnelle, c'est-à-dire qu'elle n'est point créée conformément aux lois de notre esprit. Ceci semble fort juste et d'accord avec l'impossibilité, mise en relief par Henri Poincaré, d'une Théorie mathématique générale des phénomènes qui pourrait tendre vers une forme définitive et exempte de contradictions. Voilà qui nous empêchera toujours d'être « en confiance absolue » comme semblent le désirer finalement MM. Painlevé et Platrier. Ceci pourrait même donner raison, dans une certaine mesure, à ceux qui, comme M. Emile Sevin, semblent avoir quelque défiance des Mathématiques, lesquelles ne seraient point complètement adéquates à l'étude du réel. Ce caractère partiellement inadéquat existe certainement mais il ne paraît pas abaisser les théories analytiques qui représentent, sans doute, les formes les plus épurées de la Pensée. Nous ne pouvons prétendre au parfait mais nous devons raisonner avec ce que nous avons de mieux.

A. BUHL (Toulouse).

Th. DE DONDER. — **Applications de la Gravifique Einsteinienne** (Mémorial des Sciences mathématiques dirigé par Henri Villat; fasc. XLIII). — Un fascicule gr. in-8° de 60 pages. Prix: 15 francs. Gauthier-Villars & Cie, Paris. 1930.

Il est sans doute peu utile de rappeler que, dans le « Mémorial », M. De Donder a déjà consacré deux fascicules à la Gravifique. Il s'agissait alors de théorie. Les applications ne sont pas moins intéressantes et ont trait d'abord aux champs massiques à symétrie sphérique. C'est par là que commencèrent Einstein et Schwarzschild avec le périhélie de Mercure et la déflexion de la lumière stellaire dans le voisinage du Soleil. Mais la question a été prise, beaucoup plus en général, par M. Marcel Brillouin qui fait dépendre la détermination du ds^2 d'une équation différentielle fort simple. De là on descend facilement non seulement aux problèmes précédents mais aux Univers d'Einstein et de De Sitter. Un problème d'Eddington, en lequel la densité aurait une invariance scalaire, se ramène à celui de Brillouin. Les travaux de Chazy, Haag, Nuyens, Vanderlinden, ... se greffent aisément

sur le sujet. Tout cela est d'une analyse relativement élémentaire. Il y a accord avec les lois de Képler. La constante de Gauss avoisine celle d'Einstein et tout finit en nombres.

Les champs gravifiques électromagnétiques sont aussi considérablement simplifiés par la symétrie sphérique. L'électron à tensions internes est constitué par une sphère massique recouverte d'une couche superficielle d'électricité. C'est ici qu'on trouve le curieux électron au centre duquel règne le champ de Minkowski, électron inverse, pour ainsi dire, d'un Univers qui n'admettrait un tel champ qu'à sa plus lointaine périphérie.

On ne touche pas aux électrons sans toucher aux ondes. Aussi arrivons-nous maintenant à l'équation relativiste de la Mécanique ondulatoire. Une liaison de ce genre peut s'obtenir aussi dans un Univers à cinq dimensions. Un Principe variationnel permet de réunir des équations quantiques à des équations de gravitation et aux équations de Maxwell qui, rappelons-le, ne peuvent pas plus être éliminées de la théorie que les intégrales multiples ne peuvent être éliminées de l'Analyse.

Très joli fascicule, plutôt ennemi de l'abstraction, où tous les champs s'harmonisent en des exemples suggestifs et réels.

A. BUHL (Toulouse).

Léopold LEAU. — **Les suites de Fonctions en général.** Domaine réel (Mémo-
rial des Sciences mathématiques dirigé par Henri Villat; fasc. XLIV). —
Un fascicule gr. in-8° de 46 pages. Prix: 15 francs. Gauthier-Villars & Cie.
Paris. 1930.

Ce fascicule rappelle, en plus petit, au moins en certains points, l'ouvrage de N. Lusin analysé plus haut. Les suites de fonctions s'étudient sur certains ensembles; elles admettent des fonctions *limites* sur lesquelles il faut reconnaître la conservation ou la non conservation des caractères de continuité, d'intégrabilité, ... possédés par les fonctions de la suite. Les idées de M. Baire jouent encore ici un rôle considérable puisque, suivant ce savant, c'est en passant à la limite de suites de fonctions de classe n que l'on peut trouver des fonctions de classe $n + 1$. La notion de *mesure* est également de première importance; elle donne, par exemple, la notion du *presque partout* quand une propriété a lieu partout sauf sur un ensemble de mesure nulle. Le transfini est parfois commode mais on peut chercher à s'en affranchir.

La notion de *convergence en mesure* est une extension naturelle de la notion de convergence. Le critère de Cauchy s'y applique pour les fonctions mesurables, ce qui est un résultat dû à M. H. Weyl. Ce dernier n'est pas loin de se servir de tout cela en Physique théorique, si ce n'est déjà fait. Il y a d'ailleurs une *convergence en moyenne* pour laquelle le critère de Cauchy s'applique encore.

Le fascicule se termine avec un bref aperçu sur les fonctions d'une infinité de variables réelles. Les recherches principales sont dues ici à J. Le Roux, M. Fréchet, R. Gâteaux. Ce dernier, tué au début de la Grande Guerre, semblait avoir des idées prodigieuses sur le sujet. M. Paul Lévy a déjà tenté de les reconstituer. M. Léopold Leau prolongera sans doute cette tentative.

On voit que l'objet du présent exposé n'est pas dépourvu d'expectatives

appelant de nouveaux travaux. Il s'agit même d'une science d'avenir qui doit s'introduire dans le tangible, ce qu'elle commence à peine à faire. D'illustres auteurs l'ont esquissée. Citons encore Arzela, Birkhoff, Borel, Cantor, De la Vallée Poussin, Denjoy, Dini, Fréchet, Hobson, Lalesco, Lebesgue, Montel, Osgood, Plancherel, Riesz, Young. L'index bibliographique du fascicule en cite 45. Grands noms, grands exemples.

A. BUHL (Toulouse).

E. ROTHÉ. — **Les ondes séismiques et leur propagation** (Mémorial des Sciences physiques dirigé par Henri Villat et Jean Villey; fasc. XII). — Un fascicule gr. in-8° de 60 pages. Prix: 15 francs. Gauthier-Villars & Cie. Paris. 1930.

Ceci est une œuvre très mathématique et, si les tremblements de terre n'entraînaient souvent d'effroyables catastrophes, il faudrait se féliciter de leur existence comme permettant de vérifier la théorie des vibrations élastiques de la sphère.

Les vibrations longitudinales et les vibrations transversales se présentent toutes deux dans la question. Les premières P et les secondes S se succèdent généralement dans cet ordre mais les ondes tendent à s'enchevêtrer rapidement, à subir des réflexions et même des sortes de réfractions sur des surfaces de discontinuité qui, à d'assez grandes profondeurs, sont ainsi devinées. Malgré tout, ici comme en tous les domaines ondulatoires, une première approximation très maniable s'obtient avec des ondes planes. On simplifie aussi considérablement les choses en ne prenant d'abord, dans l'écorce terrestre, que les deux couches fondamentales du Sial (Silicium-Aluminium) et du Sima (Silicium-Magnésium).

De curieuses solutions, qui sont toujours du type exponentiel, donnent les ondes superficielles de Rayleigh. Par voie additive, elles engendrent une solution générale. Lors du passage des ondes, les particules de la Terre décrivent des ellipses et l'amplitude verticale est de beaucoup la plus grande. Les questions d'amortissement se traitent encore par la voie exponentielle.

Les P et les S ne sont guère que des préliminaires. Viennent ensuite, très reconnaissables sur les séismogrammes, les grandes ondes de la phase principale. Ici les choses deviennent fort complexes et exigent des hypothèses sur la constitution et l'équilibre normal de l'écorce qui, par exemple, d'après Wiechert, flotterait sur un magma semi-fluide.

N'étaient les questions d'hétérogénéité, la réflexion des ondes serait semblable à celle des ondes lumineuses; la notion de réflexion totale est conservée de manière remarquable. Galitzine voyait, dans certains séismogrammes à fortes oscillations sinusoïdales, l'influence de phénomènes de résonance qui existent certainement tout en étant difficiles à isoler.

Ces quelques aperçus suffisent à montrer qu'il y a surtout, dans la théorie séismique, une variante des théories ondulatoires avec toutefois des difficultés expérimentales particulières. Mais les procédés d'observation ont fait de grands progrès et permettent d'en attendre de plus grands encore.

A. BUHL (Toulouse).

R. MESNY. — **Les réseaux électromagnétiques et leurs applications** (Mémo-
rial des Sciences physiques dirigé par Henri Villat et Jean Villey; fasc.
XIII). — Un fascicule gr. in-8° de 56 pages et 22 figures. Prix: 15 francs.
Gauthier-Villars & Cie. Paris. 1930.

Il s'agit ici de la propagation *dirigée* des ondes électromagnétiques analogue à la propagation des ondes lumineuses par réflecteurs généralement paraboliques. C'est la question des phares hertziens qui pourraient être si utiles en temps de brume mais dont la technique demande encore de nombreux perfectionnements. C'est aussi le secret des correspondances que l'on peut chercher à réaliser en émettant uniquement dans la direction voulue. Est-il d'abord impossible d'employer des miroirs ? Non, mais on est toujours dans le cas d'une projection lumineuse faite au moyen de réflecteurs extrêmement petits. La solution est plutôt dans des assemblages d'antennes qui, par exemple, toutes parallèles et situées dans un même plan pourraient constituer un plan d'émission. Théoriquement on est tenté de prendre des antennes très nombreuses et de passer à la limite; pratiquement on n'alimente pas aisément un grand nombre d'antennes, surtout en observant, comme il convient, des conditions de phase et de décalage. Les contradictions de ce genre sont dans la nature des choses. Quoiqu'il en soit, on possède des *réseaux* émetteurs à symétries géométriques généralement simples, en grecques, en dents de scie, en grilles variées. Ces réseaux peuvent être assemblés de manière à former des ensembles émetteurs à trois dimensions. Une théorie mathématique complète ne paraît pas possible mais ce qu'on peut faire d'utile est particulièrement élégant.

Chaque antenne donne un champ sinusoïdal. Pour plusieurs, et avec des décalages de courants convenables quand on passe de l'une à l'autre, on peut construire un champ total qui revient à des sommes de sinus dont les arguments sont en progression arithmétique. La considération de ce cas simple semble précieuse et sert de type à beaucoup d'autres. Ceci suffit également pour avoir des images de l'énergie rayonnée, en des sortes de courbes fermées dont une feuille utile s'étend dans la direction désirée tout en étant avoisinée par d'autres feuilles ayant d'autres directions mais des rayons vecteurs maxima qui décroissent rapidement en progression géométrique. Dans cet ordre d'idées, les figures du fascicule sont très suggestives et font penser à un véritable mode de correspondance, au sens géométrique de cette expression, entre la forme des réseaux et celle des courbes énergétiques engendrées par ceux-ci.

A. BUHL (Toulouse).

M. KRAITCHIK. — **La Mathématique des jeux ou Récréations mathématiques.**
— Un volume in-8° de 576 pages. Prix: Broché, 30 belgas; relié, 42 belgas.
Stevens frères, Bruxelles. 1930.

Dans ce livre, qui s'apparente aux « Récréations mathématiques » de Lucas et de Rouse Ball, à l'« Initiation mathématique » de Laisant et aux « Curiosités géométriques » de Fourrey, l'auteur traite des problèmes que Bachet de Méziriac appelait problèmes plaisants et délectables.

Avec une patience bien rare à notre époque, M. Kraitchik a réuni plusieurs centaines de ces problèmes amusants de nature et d'origine les plus diverses: les uns tirés des auteurs grecs, arabes, hindous et chinois et des recueils du Moyen âge, d'autres moins anciens mentionnés par Bachet

de Méziriac, d'autres enfin traités ou imaginés par les mathématiciens modernes et par l'auteur lui-même. On peut, avec M. Kraitchik, répartir ces problèmes ou jeux en deux groupes: jeux de calcul, étudiés dans la première partie du livre, et jeux de situation, traités dans la seconde. Mais les problèmes de chacun de ces groupes sont encore si variés et les méthodes permettant de les traiter de nature si différente que de nouvelles distinctions s'imposent. Certains des jeux de calcul, par exemple, rentrent dans le domaine de l'arithmétique et de l'algèbre élémentaire, d'autres, et ce sont les plus curieux, ne peuvent être traités complètement qu'à l'aide des méthodes particulières que l'auteur a exposées dans ses ouvrages antérieurs, tels sont par exemple les problèmes relatifs à la factorisation dont une étude approfondie a été donnée par l'auteur dans sa théorie des nombres, d'autres enfin rentrent dans le domaine de ce que M. Kraitchik appelle l'arithmogéométrie ou bien sont relatifs à la théorie des carrés magiques et au calcul des probabilités.

On voit combien les questions examinées par l'auteur dans la première partie de son livre sont nombreuses et variées. Il en est de même de la seconde, qui s'ouvre par un chapitre intéressant sur certains paradoxes géométriques, constructions par pliage et découpage, problèmes et jeux qui confinent à l'Analysis situs dont les notions s'introduisent ici naturellement. Bien entendu, l'auteur ne va pas au delà des premiers éléments de la topologie qui lui suffisent dans l'étude des exemples qu'il examine, mais il donne une idée de quelques grands problèmes posés par la géométrie de situation, en particulier du fameux problème des quatre couleurs, dont la solution nous échappe encore.

Nous passons ensuite à l'étude très détaillée des problèmes des reines et du cavalier, de quelques jeux de position, tels que la marelle, le tricolor, le solitaire, etc. et de nombreux jeux de permutation, comme le taquin ou la prise de la Bastille.

Enfin les derniers chapitres du livre sont consacrés aux traversées, aux jeux de répartition et à quelques autres questions que je n'essaierai pas de résumer.

Le lecteur s'instruit ainsi en s'amusant et se familiarise, parfois sans s'en douter, avec des méthodes importantes qu'on n'a pas l'habitude d'enseigner dans nos écoles. Et si dans l'étude d'un de ces problèmes il a la joie de découvrir quelque propriété nouvelle, qu'il n'oublie pas que dans ce domaine aucun résultat n'est négligeable. Le calcul des probabilités n'est-il pas né des problèmes posés par des jeux de hasard ?

Je recommande vivement le livre de M. Kraitchik aux lecteurs de *L'Enseignement mathématique*.

D. MIRIMANOFF (Genève).

F. SCHILLING. — **Projektive u. nichteuklidische Geometrie.** — Erster Band:

Projektive Geometrie in analytischer Behandlung nebst einem Einblick in die Grundlagen der Geometrie. Zweiter Band: *Nichteuklidische Geometrie auf der Grundlage der projektiven Geometrie.* — Deux vol. in-8° de 212 et 216 p. avec 157 et 175 fig.; reliés, RM. 13,60 le vol.; B. G. Teubner, Leipzig.

Encouragé par son illustre maître Felix Klein, M. F. Schilling a édifié une géométrie non-euclidienne en partant de la géométrie projective. C'est

le point de vue auquel il s'est placé dans les leçons qu'il a professées à l'Ecole technique supérieure de Dantzig pendant les années 1923-24 et 1927-28 et qu'il développe dans cet ouvrage.

Dans le premier volume l'auteur présente la géométrie élémentaire dans son développement axiomatique comme fondement de la géométrie projective. Puis il établit les principes de la géométrie projective en ayant recours à la méthode analytique, sans avoir besoin de faire appel à l'axiome des parallèles ou à ceux de la congruence ou du déplacement.

Ces axiomes n'interviennent qu'au début du second volume qui est entièrement consacré à l'étude de la géométrie non-euclidienne. En faisant intervenir les groupes de déplacements, l'auteur obtient une grande unité dans la méthode. Son exposé sera lu avec profit non seulement des étudiants en mathématiques, mais aussi par les physiciens qui désirent posséder la préparation mathématique indispensable à une étude approfondie des théories modernes de la relativité.

H. F.

F. ENRIQUES. — **Leçons de Géométrie Projective.** Traduit de la 4^e édition italienne par P. LABÉRENNE. — Un volume in-8° de 430 pages avec 186 figures; broché, 60 fr.; Gauthier-Villars & Cie, Paris.

Le livre dont le présent ouvrage est la traduction, est classique depuis longtemps déjà en Italie ou, comme on le sait, l'étude de la Géométrie projective est particulièrement en honneur. En France, au contraire, les derniers travaux relatifs à cette science sont souvent mal connus et aucun ouvrage écrit dans notre langue n'avait donné jusqu'à ce jour un exposé d'ensemble de ce qu'est actuellement devenue l'ancienne *Géométrie supérieure* de Chasles. Il y avait sur ce point dans la littérature scientifique française une sorte de lacune que la présente traduction vient combler en exposant la Géométrie projective telle qu'on peut la concevoir aujourd'hui, c'est-à-dire indépendamment de toute considération métrique.

Le premier chapitre est consacré à l'introduction des éléments fondamentaux et des postulats. On y définit en outre les opérations de projections et de section et les notions essentielles relatives à la succession où à l'appartenance mutuelle des divers éléments. On arrive ainsi naturellement à la loi de dualité dans l'espace. L'emploi de nouvelles formes de langage et l'usage de doubles colonnes rendent d'ailleurs plus directement sensible dans le courant de l'ouvrage le caractère dualistique de la science étudiée.

Après avoir ensuite défini au moyen du quadruple constructeur le groupe harmonique de quatre points, on est amené à se poser le problème fondamental de la Géométrie projective: toute correspondance biunivoque entre deux ponctuelles qui conserve les groupes harmoniques peut-elle être définie au moyen de projections et de sections? Pour pouvoir répondre à cette question il est nécessaire d'introduire le postulat de Dedekind relatif à la continuité, ainsi que l'importante notion de correspondance orientée. On peut alors démontrer d'une façon simple et parfaitement rigoureuse le théorème de Staudt.

Désormais les propriétés essentielles sont établies et il ne sera plus nécessaire d'avoir recours à l'intuition dans le reste du livre. Les chapitres suivants comprennent l'étude des projectivités entre formes de même espèce distinctes ou superposées (involutions). On est ainsi amené, entre

autres, à donner une plus grande extension à la loi de dualité et à retrouver, toujours par des méthodes purement projectives, les principales propriétés des coniques, celles des cônes du deuxième degré, des quadriques réglées, des courbes gauches du troisième ordre, etc. De nombreuses applications métriques, intercalées dans le texte, complètent ces études.

Un certain nombre de notes terminent l'ouvrage; elles sont relatives à l'histoire de la Géométrie projective, aux groupes de projectivités, à la Géométrie projective considérée comme science abstraite, etc. On doit en particulier signaler celle qui a trait aux imaginaires: elle indique certains résultats originaux obtenus par l'auteur et reprend en les complétant les diverses remarques faites à ce sujet dans le cours du livre.

J. TROPFKE. — **Geschichte der Elementar-Mathematik** in systematischer Darstellung mit besonderer Berücksichtigung der Fachwörter. Erster Band: *Rechnen*. Dritte, verbesserte u. vermehrte Aufl. — Un vol. in-8° de VII-222 p.; RM. 12; Walter de Gruyter & C°, Berlin, 1930.

Depuis une trentaine d'années les recherches sur l'histoire des mathématiques se sont multipliées et ont donné lieu à d'importantes publications qui complètent d'une manière heureuse l'œuvre magistrale de Moritz Cantor. C'est ainsi que l'intérêt pour les questions d'ordre historique s'est accru; il se manifeste aussi bien chez les maîtres que chez les élèves.

Parmi les ouvrages qui s'adressent plus particulièrement à cette catégorie de lecteurs se trouve l'histoire des mathématiques élémentaires de M. Tropfke dont la première édition du T. I remonte à 1902. Après la seconde édition (1920), la troisième paraîtra à son tour « revue et augmentée ».

Le Tome I est consacré au calcul, c'est-à-dire, d'après la terminologie française aux éléments d'arithmétique. Après avoir fait l'historique des notions de nombres et de chiffres, l'auteur passe à la mesure du temps, de l'angle; puis il examine les opérations sur les nombres entiers, les propriétés des nombres entiers et les tables numériques (tables de multiplication, etc.). Vient ensuite le chapitre consacré aux fractions.

On lira également avec intérêt l'exposé historique des applications du calcul numérique à l'arithmétique commerciale qui forme le dernier chapitre de l'ouvrage.

H. BEGHIN et G. JULIA. — **Exercices de Mécanique**. Tome I, fasc. 1. — Un vol. in-8° de VIII-336 pages, avec 144 fig.; 80 fr.; Gauthier-Villars & Cie, Paris. 1930.

MM. Beghin et Julia ont groupé dans ce recueil des exercices qu'ils ont traités avec leurs élèves au cours de dix années d'enseignement aux Facultés de Montpellier et de Lille d'une part, à la Sorbonne et à l'Ecole Normale supérieure d'autre part; plusieurs d'entre eux ont été aussi proposés aux élèves de l'Ecole Polytechnique au cours d'interrogations ou d'examens généraux. Il s'adresse à tous ceux qui étudient la Mécanique rationnelle: Cinématique, Statique des corps solides ou des systèmes déformables les plus simples (fils, ...), Dynamique des corps solides, des systèmes constitués par des corps solides en nombre fini, ou, exceptionnellement, par des corps qui se déforment suivant une loi très simple en ne faisant intervenir qu'un nombre fini de paramètres.

Ces exercices sont d'origine diverse: les uns sont des exercices tout à fait classiques qu'un étudiant doit savoir traiter, d'autres sont proposés dans les traités de Mécanique français ou étrangers tels, pour n'en citer que deux, le traité de P. Appell ou le traité de Routh; d'autres enfin, en grand nombre, ont été tirés des problèmes proposés aux épreuves écrites de la licence ou de l'agrégation; il y a aussi des exercices originaux. Nous avons réparti ces exercices en deux volumes dont le premier paraît aujourd'hui.

Le premier fascicule du Tome I contient des exercices sur la théorie des vecteurs, la Cinématique du point et du corps solide, la Géométrie des masses et la Cinétique.

Les auteurs donnent la préférence au concret dans le choix des exercices et dans la manière de les traiter; ils emploient à la fois la méthode géométrique et analytique. Ils se servent des vecteurs, des coordonnées, des raisonnements géométriques directs indistinctement, sans autre préoccupation que de suivre les phénomènes.

W. R. HAMILTON. — **The Mathematical Papers.** Vol. I: *Geometrical Optics* edited for the Royal Irish Academy by A. W. CONWAY and J. L. SYNGE. — Un vol. in-4° de 534 p.; 50/- net; Cambridge University Press. 1931.

En entreprenant la publication des mémoires mathématiques de Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) l'Académie Royale d'Irlande a voulu rendre hommage au plus illustre des mathématiciens irlandais du 19^{me} siècle. Mais elle désire aussi combler une lacune en rendant accessible aux savants de nombreux mémoires épars dans des recueils spéciaux et en publiant en outre une série de mémoires inédits.

Dans ce premier volume ont été réunis une vingtaine de mémoires se rattachant plus ou moins directement à l'optique, notamment les travaux sur les systèmes de raies.

Édité avec le soin qui caractérise toutes les publications de la Cambridge University Press, les Mathematical Papers de Hamilton méritent de figurer dans les collections d'œuvres complètes de toutes les grandes bibliothèques.

H. F.