Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 29 (1930)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE.

Artikel: SUR L'INDÉPENDANCE DES VARIABLES ALÉATOIRES
Autor: Kantorowicz, I.
Kapitel: 2. Démonstrations.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-23247

III. — *Si l'on suppose les variables aléatoires* x, y, z, ... *non négatives, pour leur indépendance il faut et il suffit, que l'égalité suivante:*

$$\|x^m y^n z^p \ldots\| = \|x^m\| \cdot \|y^n\| \cdot \|z^p\| \cdots$$

soit remplie pour m, n, p, ... *aussi grands que l'on veut.*

Donc dans ce cas *m*, *n*, *p*, ... *n'ont pas* à prendre toutes les valeurs entières, mais ils peuvent faire partie *de n'importe quelle* suite de valeurs réelles (entières *ou non*) indéfiniment croissantes.

2. — Démonstrations.

Nous nous bornerons à démontrer les théorèmes dans le cas de deux variables aléatoires. La démonstration dans le cas d'un nombre plus grand se fait absolument de la même manière et ne présente aucune difficulté nouvelle.

Démonstration du théorème I. — Appelons

p_k la probabilité de l'égalité $x = a_k$ $(k = 1, 2, \ldots m)$
q_l » » » $y = b_l$ $(l = 1, 2, \ldots n)$

$r(k, l)$ la probabilité pour que l'on ait en même temps $x = a_k$ et $y = b_l$.

Supposons que les a_k sont tous différents, ainsi que les b_l. Posons

$$\varepsilon(k, l) = r(k, l) - p_k q_l .$$

L'indépendance de x et de y s'exprime par le système d'égalités

$$\varepsilon(k, l) = 0 . \qquad (k = 1, 2, \ldots m ; \quad l = 1, 2, \ldots n) \qquad (2)$$

Pour toute valeur de s et de t on a évidemment les identités suivantes:

$$\|x^s\| = \sum_{k=1}^{m} p_k a_k^s , \quad \|y^t\| = \sum_{l=1}^{n} q_l b_l^t . \qquad (3)$$

En particulier:

$$\|x^0\| = \sum_{k=1}^{m} p_k = 1 , \quad \|y^0\| = \sum_{l=1}^{n} q_l = 1 . \qquad (4)$$

On a de même:

$$\|x^s y^t\| = \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} r(k\,,\ l)\, a_k^s\, b_l^t =$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} [\varepsilon(k\,,\ l) + p_k q_l]\, a_k^s\, b_l^t =$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \varepsilon(k\,,\ l)\, a_k^s\, b_l^t + \|x^s\| \cdot \|y^t\| \ . \qquad (5)$$

$$\|x^0 y^t\| = \|y^t\| \ , \qquad \|x^s y^0\| = \|x^s\| \ . \qquad (6)$$

Si l'on rapproche les conditions (1) des identités (5) et (6), on trouve que le problème se ramène à étudier l'équivalence du système (2) au système d'équations linéaires suivant:

$$\sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \varepsilon(k\,,\ l)\, a_k^s\, b_l^t = 0 \ . \qquad (7)$$

$$(s = 0.\ 1,\ 2.\ .\ .\ m-1\ ; \qquad t = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ n-1)$$

Il est bien évident que (2) entraîne (7).
Pour prouver la réciproque, posons:

$$z(l\,,\ s) = \sum_{k=1}^{m} \varepsilon(k\,,\ l)\, a_k^s \ . \qquad (8)$$

Le système (7) prend alors la forme:

$$\sum_{l=1}^{n} b_l^t\, z(l\,,\ s) = 0 \ . \qquad (t = 0,\ 1,\ \ldots\ n-1) \qquad (9)$$

Pour un s fixe, le système (9) peut être envisagé comme un système d'équations linéaires à n inconnues:

$$z(1\,,\ s)\ , \qquad z(2\,,\ s)\ .\ \ldots\ . \qquad z(n-1\,,\ s)\ , \qquad z(n\,,\ s)\ .$$

Le déterminant de ce système est évidemment le déterminant de Vandermonde égal à

$$\prod_{h \neq i} (b_h - b_i) \ .$$

Les b_l étant tous différents, ce déterminant est manifestement différent de zéro. Par conséquent on déduit de (9)

$$z(l, s) = 0 . \qquad (l = 1, 2, \ldots n ; \quad s = 0, 1, \ldots m - 1) \qquad (10)$$

En rapprochant ceci de la définition (8), on est amené au système d'équations en $\varepsilon(k, l)$:

$$\sum_{k=1}^{m} \varepsilon(k, l)\, a_k^s = 0 . \qquad (s = 0, 1, \ldots m - 1) \qquad (11)$$

Le déterminant de ce système est encore un déterminant de Vandermonde représenté cette fois par

$$\prod_{h \neq i} (a_h - a_i) ,$$

et, par conséquent, différent de zéro. On a donc pour toute valeur de k et de l:

$$\varepsilon(k, l) = 0 . \qquad \text{c.q.f.d.}$$

Démonstration du théorème II. — Soient respectivement

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx ; \qquad \int_{-\infty}^{b} \varphi(y)\, dy \qquad \text{et} \qquad \int_{-\infty}^{b}\int_{-\infty}^{a} \psi(x, y)\, dx\, dy$$

les probabilités des inégalités:

$$x \leqq a , \qquad y \leqq b$$

et du système de deux inégalités simultanées:

$$x \leqq a \qquad \text{et} \qquad y \leqq b .$$

Il s'agit d'établir l'équivalence de l'égalité

$$\psi(x, y) = f(x)\, \varphi(y) \qquad (12)$$

et du système:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^m f(x)\, dx \int_{-\infty}^{+\infty} y^n \varphi(y)\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^m y^n \psi(x, y)\, dx\, dy . \qquad (13)$$

$$(m = 0, 1, 2, 3, \ldots ; \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

Pour m, $n = 0$ l'équation (13) est une tautologie.

Le passage de (12) à (13) est immédiat. Il ne s'agit donc que du passage inverse. Pour l'effectuer, posons:

$$\varepsilon(x, y) = \psi(x, y) - f(x)\,\varphi(y) \ . \tag{14}$$

L'équation (13) revêt alors la forme suivante

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^m y^n\, \varepsilon(x, y)\, dx\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} y^n\, dy \int_{-\infty}^{+\infty} x^m\, \varepsilon(x, y)\, dx = 0 \ .$$

En appliquant le théorème des moments [1] à la fonction suivante de y:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^m\, \varepsilon(x, y)\, dx \ ,$$

on trouve, quel que soit y:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^m\, \varepsilon(x, y)\, dx = 0 \ , \qquad (m = 0\ 1, 2, 3, \ldots)$$

Ce qui nous donne, par une nouvelle application du théorème des moments:

$$\varepsilon(x, y) \equiv 0 \qquad \text{c.q.f.d.}$$

Démonstration du théorème III. — Lemme I (fondamental). Soit A(x) *une fonction continue croissante (au sens strict) et non négative dans l'intervalle* (a, b) *et soit* f(x) *une fonction continue dans cet intervalle. Nous affirmons que l'égalité*

$$\int_a^b [\mathrm{A}(x)]^n f(x)\, dx = 0 \tag{15}$$

supposée remplie pour n *aussi grand que l'on veut, entraîne comme conséquence:*

$$f(x) = 0 \qquad \text{pour} \qquad a \leqq x \leqq b \ . \tag{16}$$

---

[1] A savoir que toute fonction continue à moments tous nuls est forcément égale à zéro.

Démonstration. Supposons, par impossible, que l'équation (16) n'ait pas lieu pour tous les points de l'intervalle (a, b). Nous distinguerons deux cas: 1° $f(b) \neq 0$, 2° $f(b) = 0$.

Commençons par montrer l'impossibilité du cas 2°. Dans ce cas il est possible de déterminer les points c et d tels que l'on ait:

$$f(x) = 0 \quad \text{pour} \quad c \leqq x \leqq b$$
$$f(x) \neq 0 \quad \text{pour} \quad d \leqq x < c \ ;$$

la fonction $f(x)$ garde le signe constant dans (d, c). Sans restreindre la généralité, nous pouvons supposer que ce signe est positif [dans le cas contraire nous aurions pris $-f(x)$ au lieu de $f(x)$]. Soit α le point où $f(x)$ atteint son maximum relatif à (d, c). Posons

$$f(\alpha) = 2\varepsilon \ .$$

Il existe alors un intervalle (g, h) [1] tel, que l'on ait:

$$f(x) \geqq \varepsilon \quad \text{pour} \quad g \leqq x \leqq h \ . \tag{17}$$

En rapprochant les formules (15) et (17), en posant

$$\mathrm{B}_n(x) = [\mathrm{A}(x)]^n f(x) \ ,$$

on trouve

$$\int_a^d \mathrm{B}_n(x)\,dx + \int_d^g \mathrm{B}_n(x)\,dx + \int_g^h \mathrm{B}_n(x)\,dx + \int_h^b \mathrm{B}_n(x)\,dx = 0 \ . \tag{18}$$

Puisque les quantités

$$\int_d^g \mathrm{B}_n(x)\,dx \quad \text{et} \quad \int_h^b \mathrm{B}_n(x)\,dx$$

sont positives, on peut écrire:

$$\int_a^d \mathrm{B}_n(x)\,dx + \int_g^h \mathrm{B}_n(x)\,dx < 0 \ . \tag{19}$$

---

[1] On a évidemment:

$$a \leqq d < g < \alpha < h < c \leqq b \ .$$

On a évidemment

$$\int_g^h B_n(x)\,dx = \int_g^h [A(x)]^n f(x)\,dx > \varepsilon \int_g^h [A(x)]^n\,dx > \varepsilon [A(g)]^n (h - g) . \tag{20}$$

En désignant par M le maximum absolu de $f(x)$ [1], on a:

$$\left| \int_a^d B_n(x)\,dx \right| = \left| \int_a^d [A(x)]^n f(x)\,dx \right| < M . [A(d)]^n (d - a) . \tag{21}$$

En rapprochant les inégalités (19), (20) et (21), on trouve

$$\varepsilon [A(g)]^n (h - g) < M\ [A(d)]^n (d - a) ,$$

c'est-à-dire

$$\left[\frac{A(g)}{A(d)}\right]^n < \frac{M}{\varepsilon} \cdot \frac{d - a}{h - g} . \tag{22}$$

Puisque, par hypothèse, on a

$$d < g , \qquad \text{et, par suite} \qquad \frac{A(g)}{A(d)} > 1 ,$$

le premier membre de l'inégalité (22) tend vers l'infini avec n, tandis que le second membre reste constant, ce qui est manifestement absurde. Notre démonstration de l'absurdité de l'hypothèse 2° est ainsi achevée. En ce qui concerne l'absurdité de l'hypothèse 1°, elle est encore plus manifeste. Pour l'établir on n'a qu'à reprendre le raisonnement de tout à l'heure en y introduisant quelques simplifications.

Il suffit de supposer la non-existence du point c et de l'égalité $h = c$.

Lemme II (analogue au théorème des moments). — *Toute fonction continue* f (x), *remplissant pour* n *aussi grand que l'on veut, l'équation des moments*

$$\int_0^{+\infty} x^n f(x)\,dx = 0 \tag{23}$$

est nulle identiquement.

---

[1] C'est-à-dire le maximum relatif à (a, b) tout entier.

Remarque. — Pour éviter le malentendu possible nous rappelons encore une fois que n parcourt une suite indéfiniment croissante de quantités réelles, positives, d'ailleurs absolument quelconque.

Démonstration. Posons $x = \operatorname{tang} z$.
L'équation (23) devient alors

$$\int_{z=0}^{z=\frac{\pi}{2}} (\operatorname{tang} z)^n \frac{f(\operatorname{tang} z)}{\cos^2 z}\, dz = 0 .$$

Appliquant le lemme I aux fonctions: tang z (fonction croissante) et $\frac{f(\operatorname{tang} z)}{\cos^2 z}$ (fonction continue), on trouve

$$f(x) \equiv 0 . \qquad \text{c.q.f.d.}$$

Pour démontrer le théorème III nous n'avons qu'à répéter la démonstration du théorème II. Les seuls changements à y introduire sont le remplacement de la suite de tous les nombres naturels par une suite croissante réelle arbitrairement donnée et la mise du lemme II à la place du théorème des moments.

Varsovie, 25 mai 1929.