Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 29 (1930)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE.

Artikel: PROBLÈME DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL DONNÉ A L'AGRÉGATION EN 1929 SOLUTION

Autor: Milloux, Henri

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-23271

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 20.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

cubique ou une autre. Ces transformations mettront en évidence de nombreuses propriétés métriques nouvelles.

Par exemple, la cubique admettant la paire des points cycliques pour conique apolaire aura pour hessienne le lieu des foyers des coniques inscrites et pour cayleyenne l'enveloppe des axes des coniques inscrites. Cette cayleyenne, courbe de troisième classe, touchera en particulier les douze bissectrices du quadrilatère, la droite de l'infini et la droite de Newton. Par la considération de cette cubique et de son système polaire, on sera conduit aux propriétés des foyers des coniques inscrites, du point de Miquel et à toutes les propriétés du quadrilatère qui ressortent de la considération de ses bissectrices.

PROBLÈME DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL DONNÉ A L'AGRÉGATION EN 1929

SOLUTION

DE

M. Henri MILLOUX (Strasbourg).

I. Soient Oxyz *un trièdre trirectangle de sens direct,* p *et* q *les dérivées partielles de* z *par rapport à* x *et* y, *prises sur une surface* S. *Former l'équation aux dérivées partielles* E *qui doit être vérifiée sur* S *pour que,* Γ *étant l'intersection de* S *avec une sphère* Σ *de centre* O *et de rayon quelconque* r, S *et* Σ *se coupent le long de* Γ *sous un angle constant* V. *La valeur de* V *pourra dépendre de* r; *on posera* $\cos V = f(r)$, $f(r)$ *étant une fonction donnée.*

II. Former le système différentiel $\mathcal{C}$ *définissant les multiplicités caractéristiques de* E. *Pour intégrer* $\mathcal{C}$, *il peut être commode d'utiliser les coordonnées pluckériennes de la normale à* S. *On trouvera ainsi que toute courbe caractéristique* C *de* E *est située dans un plan* P *passant par* O. *Sous quel angle* P *coupe-t-il la développable caractéristique contenant* C ?

III. Soient OZ *un axe normal à* P, *et* $\cos\alpha\cos\beta$, $\cos\alpha\sin\beta$, $\sin\alpha$, *ses cosinus directeurs; soient* OY *un axe de cosinus directeurs* $-\sin\beta$, $\cos\beta$, o, *et* OX *un axe tel que le trièdre* OXYZ *soit trirectangle et de sens*

direct. Indiquer les formules F *qui expriment les coordonnées* x, y, z *d'un point* M *de* C *en fonction de* α, β *et des coordonnées polaires* r *et* φ *de* M *dans le plan* P, *relativement à l'axe polaire* OX (OY *ayant alors pour équation* $\varphi = \frac{\pi}{2}$).

On peut représenter les cosinus directeurs de la normale à S *en* M *par des formules* N *qu'on déduit de* F *en remplaçant* r *par* 1 *et* φ *par un nouvel angle* Ψ. *Quelle relation y a-t-il entre* φ, Ψ, V ?

Le long de C, *on a* $\varphi = \omega + \gamma$, ω *étant défini en fonction de* r *par une quadrature à limite inférieure* r_0 *fixée une fois pour toutes, et* γ *étant une constante arbitraire. Vérifier que, les courbes* C *sont toutes congruentes entre elles.*

IV. Quelle relation différentielle f_1 *doit-on établir entre les paramètres* α, β, γ *des courbes* C *pour que ces courbes engendrent une surface intégrale* S ? *Quelle relation* f_2 *doit-on établir entre* α, φ *et les différentielles de* α *et* β *pour que le système* (F, f_1, f_2) *représente une courbe intégrale de l'équation de Monge* G *associée à* E? *Former l'équation* G; *l'interpréter géométriquement; en déduire un mode de génération des surfaces* S.

Quelle relation faut-il établir entre β *et* γ *pour que* S *soit de révolution autour d'un axe passant par* O ? *Former l'équation différentielle du troisième ordre à laquelle satisfait alors* γ *comme fonction de* β.

V. Calculer l'élément linéaire d'une surface S *rapportée aux courbes* $\omega = C^{te}$ *et* $\beta = C^{te}$; *quelles relations faut-il établir entre* α, β, γ *pour que cet élément soit de la forme*

$$ds^2 = f_1(\omega)\, d\omega^2 + f_2(\omega)\, f_3(\beta)\, d\beta^2 \text{ ?}$$

Que sont alors les surfaces S ?

VI. Les variables indépendantes étant toujours ω *et* β, *construire la seconde forme différentielle quadratique de* S *en utilisant les formules* F *et* N.

Quelles sont les lignes de courbure de S, *les valeurs des rayons de courbure principaux et les surfaces* S *pour lesquelles ces rayons de courbure sont fonctions l'un de l'autre ?*

Calculer le rayon de courbure, la courbure géodésique et la torsion des courbes Γ (n° I) *situées sur* S.

VII. On supposera désormais f (r) = r; *dans cette hypothèse, déterminer les deux surfaces, symétriques par rapport au plan* z = 0, *qui passent par la courbe*

$$z = 0\,, \qquad x^2 - 4(x^2 + y^2)^2 + 4(x^2 + y^2)^3 = 0\,.$$

(On représentera l'une, S_0, *de ces surfaces, au moyen de* ω *et* γ; *on ne vérifiera pas que les deux surfaces sont distinctes.)*

Construire les courbes représentatives dans le plan (ω, γ) *des asymptotiques de* S_0. *Ces courbes ont une infinité de points singuliers dont on indiquera les points d'accumulation.*

I. — La formation de l'équation (E) est immédiate. Cette équation est:

$$(px + qx - z)^2 - r^2 f^2 (1 + p^2 + q^2) = 0 . \qquad \text{(E)}$$

II. — Système différentiel définissant les multiplicités caractéristiques de (E):

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{Pp + Qq} = \frac{-dp}{X + pZ} = \frac{-dq}{Y + qZ} . \qquad (1)$$

avec:

$$\frac{1}{2} P = x(px + qy - z) - r^2 f^2 p ,$$

$$\frac{1}{2} Q = y(px + qy - z) - r^2 f^2 q ,$$

$$\frac{1}{2}(Pp + Qq) = (px + qy)(px + qy - z) - (p^2 + q^2) r^2 f^2$$
$$= z(px + qy - z) + r^2 f^2 ,^{1}$$

$$\frac{1}{2}(X + pZ) = -(1 + p^2 + q^2) f (f + rf')(x + pz) ,$$

$$\frac{1}{2}(Y + qZ) = -(1 + p^2 + q^2) f (f + rf')(y + qz) .$$

Formons les rapports égaux aux rapports (1), et dont les numérateurs sont respectivement $d(x + pz)$ et $d(y + qz)$. Les dénominateurs de ces rapports sont proportionnels respectivement à: $(x + pz)$ et $(y + qz)$. D'où l'intégrale première:

$$A(x + pz) + B(y + qz) = 0 .$$

D'après les deux derniers rapports (1), on a:

$$A dp + B dq = 0 ,$$

d'où

$$Ap + Bq - C = 0 , \qquad (2)$$

équation qui simplifie l'intégrale première obtenue et donne l'équation:

$$Ax + By + Cz = 0 . \qquad (3)$$

---

[1] En vertu de l'équation (E).

L'équation (3) montre que les caractéristiques sont situées dans des plans P passant par l'origine; étant donnée une surface intégrale (S) de l'équation (E), contenant une caractéristique (C), la normale à (S) le long de (C) est située, d'après l'équation (2), dans le plan de la caractéristique: c'est la normale proprement dite à la caractéristique. Elle fait l'angle V avec le rayon vecteur OM, et cette dernière propriété détermine la caractéristique dans son plan (à une rotation près) [1].

Le plan tangent à la surface (S) le long de (C) enveloppe un cylindre, qui coupe à angle droit le plan P de la caractéristique (C).

III. — L'axe OZ étant normal au plan P, nous prendrons:

$$A = \cos\alpha\cos\beta\ , \qquad B = \cos\alpha\sin\beta\ , \qquad C = \sin\alpha\ .$$

Tableau des cosinus directeurs des axes OXYZ:

	Ox	Oy	Oz
OX	$\sin\alpha\cos\beta$	$\sin\alpha\sin\beta$	$-\cos\alpha$
OY	$-\sin\beta$	$\cos\beta$	0
OZ	$\cos\alpha\cos\beta$	$\cos\alpha\sin\beta$	$\sin\alpha$

Soit un vecteur de mesure algébrique r, porté par une droite D orientée, située dans le plan XOY, et dont la direction est définie par:

$$(OX, D) = \varphi\ .$$

Les projections xyz du vecteur sur les anciens axes sont données par les formules:

$$\left\{\begin{aligned} x &= r(\cos\varphi\cos\beta\sin\alpha - \sin\varphi\sin\beta)\ , \\ y &= r(\cos\varphi\sin\beta\sin\alpha + \sin\varphi\cos\beta)\ , \\ z &= r(-\cos\varphi\cos\alpha)\ . \end{aligned}\right. \qquad (F)$$

Elles sont applicables aux anciennes coordonnées d'un point M du plan XOY, défini dans ce plan par ses coordonnées polaires r et φ.

[1] La normale à la surface (S) le long de (C) engendre une surface développable (plan). Les caractéristiques, sur (S), sont donc des lignes de courbure. La famille de courbes orthogonales aux caractéristiques sont orthogonales aux plans des caractéristiques, en vertu de la position particulière de la normale à (S). Ce sont donc les courbes sphériques Γ, qui constituent la deuxième famille de lignes de courbure sur (S). Ce résultat est aussi une conséquence du théorème de Joachimsthal: Γ est une ligne de courbure de la sphère Σ, donc de la surface S, ces deux surfaces se coupant sous le même angle le long de Γ.

Soit MN la normale à la surface. Elle est aussi normale à la caractéristique. Orientons-la dans le sens habituel (sens de la concavité de la caractéristique) et désignons par ψ l'angle:

$$\psi = (\mathrm{OX}, \mathrm{MN}) .$$

Les cosinus directeurs de MN sont alors (application des formules F):

$$\begin{cases} \lambda = \cos\psi \cos\beta \sin\alpha - \sin\psi \sin\beta , \\ \mu = \cos\psi \sin\beta \sin\alpha + \sin\psi \cos\beta , \\ \nu = -\cos\psi \cos\alpha . \end{cases}$$

Précisons la définition de l'énoncé, de l'angle V, en la donnant sous la forme algébrique:

$$(\mathrm{OM}, \mathrm{MN}) = \mathrm{V} .$$

On a alors la relation:

$$\psi = \varphi + \mathrm{V} + 2k\pi .$$

Le long de (C), on a la relation bien connue:

$$\operatorname{cotg} \mathrm{V} = r\frac{d\varphi}{dr} ,$$

d'où:

$$\varphi = \int_{r_0}^{r} \frac{\operatorname{cotg} \mathrm{V}}{r} dr + \gamma = \omega + \gamma .$$

Dans cette formule, γ est une constante arbitraire. Rappelons que cos V est égal à $f(r)$.

On constate à nouveau que toutes les courbes (C) sont congruentes entre elles.

IV. — Les caractéristiques (C) dépendent des trois constantes arbitraires α, β, γ. Si l'on fixe une dépendance entre un paramètre, et chacune de ces trois constantes, les courbes (C) engendrent une surface. Cette surface est une surface intégrale si un déplacement élémentaire quelconque, en un point M d'une courbe (C), est normal à la droite MN.

Donnons à $\alpha\beta\gamma$ des accroissements $d\alpha\, d\beta\, d\gamma$ et à r un accroissement dr. xyz subissent des accroissements δx, δy, δz. L'équation:

$$\lambda\delta x + \mu\delta y + \nu\delta z = 0$$

donne, après simplification, la relation différentielle:

$$\sin\alpha\, d\beta + d\gamma = 0 . \qquad (f_1)$$

Les *courbes intégrales* peuvent s'obtenir en recherchant, sur une surface intégrale (S) quelconque, l'enveloppe des caractéristiques.

En désignant par $dx\,dy\,dz$ les projections d'un déplacement élémentaire sur une courbe intégrale, on a donc les relations:

$$\frac{dx}{\frac{\partial x}{\partial r}} = \frac{dy}{\frac{\partial y}{\partial r}} = \frac{dz}{\frac{\partial z}{\partial r}} \,.^{1}$$

D'ailleurs:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial r}\,dr + \frac{\partial x}{\partial \alpha}\,d\alpha + \frac{\partial x}{\partial \beta}\,d\beta + \frac{\partial x}{\partial \gamma}\,d\gamma$$

$$= \frac{\partial x}{\partial r}\,dr + r\,(\cos\varphi\,d\alpha - \sin\varphi\,\cos\alpha\,d\beta)\cos\alpha\,\cos\beta$$

en vertu de la relation f_1. De même:

$$dy = \frac{\partial y}{\partial r}\,dr + r\,(\cos\varphi\,d\alpha - \sin\varphi\,\cos\alpha\,d\beta)\cos\alpha\,\sin\beta\,,$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial r}\,dr + r\,(\cos\varphi\,d\alpha - \sin\varphi\,\cos\alpha\,d\beta)\sin\alpha$$

et toute courbe intégrale satisfait à la relation:

$$\cos\varphi\,d\alpha - \sin\varphi\,\cos\alpha\,d\beta = 0 \qquad (f_2)$$

de même qu'aux relations F, f_1 et à la formule définissant φ en fonction de r.

Remarque. — L'enveloppe des caractéristiques se trouve nécessairement sur le cône (π) enveloppe des plans des caractéristiques. La relation f_2 s'obtient aussi en utilisant cette remarque.

En tout point M de l'espace passent une infinité de surfaces intégrales, dont les plans tangents enveloppent un cône C (M); dans le cas de l'équation (E), ce cône est évidemment le cône de révolution autour de OM, le demi-angle au sommet étant $\frac{\pi}{2} - V$. Rappelons que les courbes intégrales sont les courbes les plus générales tangentes en chacun de leurs points M au cône C (M). Les caractéristiques sont ici les courbes *planes* satisfaisant à cette condition, et les courbes intégrales sont les courbes *gauches*. On peut donc les définir aussi comme les courbes gauches les plus générales faisant l'angle $\frac{\pi}{2} - V$ avec le

---

[1] Il est entendu que xyz sont fonctions de r directement et par l'intermédiaire de φ. Il serait plus correct d'écrire ici aux dénominateurs: $\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial x}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial r}$, ...

rayon vecteur. L'équation différentielle à laquelle elles satisfont est une conséquence immédiate de cette propriété.

En chaque point d'une courbe intégrale passe une caractéristique, et une seule, tangente à cette courbe. On peut considérer une surface intégrale S comme engendrée par la famille de caractéristiques correspondant à une courbe intégrale quelconque.

Autre mode de génération des surfaces S. — Les caractéristiques étant des courbes planes congruentes entre elles, il est possible d'engendrer la surface S par simple déplacement du plan d'une caractéristique. Le point O est invariablement lié à la caractéristique, dans ce déplacement; d'où suite de rotations instantanées, les axes de ces rotations passant par O. Le lieu d'un point M de la caractéristique, dans le déplacement, est une courbe sphérique; c'est donc une courbe Γ, normale en chacun de ses points au plan de la caractéristique qui y passe; le lieu des axes de rotations instantanées est donc le cône (π) enveloppe des plans des caractéristiques, et on obtient la surface S en traçant une caractéristique dans un plan tangent à ce cône, et enroulant le plan autour du cône.

Surfaces de révolution. — Pour qu'une surface S soit de révolution, il faut et il suffit que le cône (π) se réduise à une droite, et l'axe de la surface passe nécessairement par l'origine [1]. La normale au plan P étant orthogonale à une droite fixe, on a la relation:

$$m_1 \cos\alpha \cos\beta + m_2 \cos\alpha \sin\beta + m_3 \sin\alpha = 0 .$$

La réciproque est évidente.

L'élimination des constantes $m_1\, m_2\, m_3$ conduit à l'équation différentielle:

$$\frac{d^2(\operatorname{tg}\alpha)}{d\beta^2} = -\operatorname{tg}\alpha$$

ou:

$$\cos\alpha \,.\, \frac{d^2\alpha}{d\beta^2} + 2\sin\alpha\left(\frac{d\alpha}{d\beta}\right)^2 + \sin\alpha\cos^2\alpha = 0 .$$

Nous conserverons sous cette forme l'équation différentielle des surfaces de révolution.

V. — L'élément linéaire est:

$$ds^2 = r^2\left[\frac{d\omega^2}{\cos^2 V} + \left(\cos\varphi\frac{d\alpha}{d\beta} - \sin\varphi\cos\alpha\right)^2 d\beta^2\right] .$$

---

[1] Ce fait résulte aussi des propriétés établies dans la note 2: les courbes sphériques Γ sont des lignes de courbure, donc les parallèles de la surface de révolution.

Pour qu'il soit de la forme $f_1(\omega)\,d\omega^2 + f_2(\omega)\,f_3(\beta)\,d\beta^2$, il faut et il suffit que l'expression:

$$U = \cos\varphi \frac{d\alpha}{d\beta} - \sin\varphi\cos\alpha$$

soit de la forme $g_1(\omega)\,g_2(\beta)$, et, par suite, satisfasse à l'équation aux dérivées partielles

$$U\frac{\partial^2 U}{\partial\alpha\,\partial\beta} - \frac{\partial U}{\partial\alpha}\frac{\partial U}{\partial\beta} = 0\,.$$

Toutes réductions faites, on retombe sur l'équation différentielle caractéristique des surfaces de révolution.

VI. — *Seconde forme différentielle quadratique.* — Il est commode de partir des formules suivantes:

$$\left\{\begin{aligned} D &= S\frac{\partial\lambda}{\partial\omega}\frac{\partial x}{\partial\omega}\,,\\ 2D' &= S\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\omega}\frac{\partial x}{\partial\beta} + \frac{\partial\lambda}{\partial\beta}\frac{\partial x}{\partial\omega}\right),\\ D'' &= S\frac{\partial\lambda}{\partial\beta}\frac{\partial x}{\partial\beta}\,. \end{aligned}\right.$$

Rappelons que $\lambda\mu\nu$ sont les cosinus directeurs de la normale à la surface S. Leurs expressions ont été données au paragraphe III. Toutes réductions faites, il vient:

$$\left\{\begin{aligned} D &= \frac{r}{\cos V}\left(1 - \frac{dV}{d\omega}\right),\\ D' &= 0\,,\\ D'' &= r\left[-\cos\alpha\sin(\varphi - V) + \frac{d\alpha}{d\beta}\cos(\varphi - V)\right]\left[\cos\varphi\frac{d\alpha}{d\beta} - \sin\varphi\cos\alpha\right]. \end{aligned}\right.$$

Les lignes de courbure sont les courbes (C) ($d\beta = 0$) et Γ ($d\omega = dr = 0$), résultat déjà obtenu géométriquement (note 2). Donnons les valeurs des rayons de courbure principaux:

$$R_1 = \frac{E}{D} = \frac{r}{\cos V\left(1 - \dfrac{dV}{d\omega}\right)}\,,$$

$$R_2 = \frac{G}{D''} = \frac{r\left[\cos\varphi\dfrac{d\alpha}{d\beta} - \sin\varphi\cos\alpha\right]}{-\cos\alpha\sin(\varphi - V) + \dfrac{d\alpha}{d\beta}\cos(\varphi - V)}\,.$$

R_1 est fonction de ω seul ; R_2 est fonction de R_1 lorsque $\frac{\partial R_2}{\partial \beta}$ est nul.

Toutes réductions faites, on retombe, dans ce cas, sur l'équation différentielle des surfaces de révolution.

Quelques caractéristiques des courbes Γ. — Le calcul par les formules de Frenet donne:

Courbure:

$$\frac{\sqrt{\cos^2\alpha + \left(\frac{d\alpha}{d\beta}\right)^2}}{r\left|\cos\varphi\frac{d\alpha}{d\beta} - \sin\varphi\cos\alpha\right|}.$$

Torsion:

$$\frac{\cos\alpha\frac{d^2\alpha}{d\beta^2} + 2\sin\alpha\,.\left(\frac{d\alpha}{d\beta}\right)^2 + \sin\alpha\cos^2\alpha}{r\left[\cos\varphi\frac{d\alpha}{d\beta} - \sin\varphi\cos\alpha\right]\left[\cos^2\alpha + \left(\frac{d\alpha}{d\beta}\right)^2\right]}.$$

Courbure géodésique:

$$\frac{\left|\cos\alpha\cos(\varphi - V) + \frac{d\alpha}{d\beta}\sin(\varphi - V)\right|}{r\left|\cos\varphi\frac{d\alpha}{d\beta} - \sin\varphi\cos\alpha\right|}.$$

On remarquera que la torsion est nulle dans le cas des surfaces de révolution, et dans ce cas seulement: les courbes Γ ne sont planes (cercles) que dans ce cas.

Les deux courbures de la courbe Γ au point M sont susceptibles d'une interprétation géométrique très simple.

Soit (P) le plan de la caractéristique (C) passant en M, Δ la génératrice du cône π située dans P, MN la normale en M à la surface S, normale située dans le plan de la caractéristique, MT la tangente en M à la caractéristique, MQ la perpendiculaire menée de M sur la droite Δ. Les points N, T, Q sont situés sur Δ (le lecteur est prié de faire la figure).

La normale à la surface S est tangente au cône (π), qui constitue l'une des nappes de la surface focale de S. L'autre nappe est la surface engendrée par la développée de la caractéristique C, quand on enroule le plan de cette caractéristique autour du cône π. L'un des rayons de courbure principaux (R_2) est donc MN. Le centre de courbure de la courbe Γ en M est la projection de N sur la normale principale à la courbe Γ en M (théorème de Meusnier appliqué à la surface S); mais la courbe Γ est aussi située sur la sphère de centre O et de rayon OM. Le même centre de courbure est donc aussi la projection de O sur la

même droite. La comparaison de ces deux propriétés montre que le centre de courbure de Γ en M n'est autre que le point Q.

La position du centre de courbure géodésique est déterminée par la définition de ce point: c'est le point T.

VII. — On suppose cos V égal à r. On en déduit:

$$d\omega = \frac{\operatorname{cotg} V}{r} dr = - dV .$$

ω n'étant défini qu'à une constante additive près, nous prendrons :

$$\omega = - V ,$$

d'où

$$r = \cos \omega .$$

A l'intersection de la surface S et du plan xOy correspond, d'après la troisième formule F, la relation:

$$\cos \varphi \cos \alpha = 0 ,$$

qui se décompose:

1° — $\cos \alpha = 0$. — $\cos \alpha$ ne peut être nul sur toute la surface (z serait constamment nul). — $\cos \alpha$ n'étant nul que sur l'intersection, celle-ci est une caractéristique.

2° — $\cos \varphi = 0$.

Lorsque l'intersection est la courbe:

$$x^2 - 4 (x^2 + y^2)^2 + 4 (x^2 + y^2)^3 = 0 ,$$

courbe distincte d'une caractéristique, on se trouve nécessairement dans le deuxième cas. La comparaison de l'équation précédente et de la première formule F (où l'on a fait $\cos \varphi = 0$) montre que, le long de l'intersection, on a la relation:

$$\sin^2 \beta = 4 \sin^2 \omega \cos^2 \omega$$

ou:

$$\beta = 2 \varepsilon \omega + k\pi . \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

Or:

$$\cos \varphi = \cos (\omega + \gamma) = 0 .$$

L'élimination de ω entre ces deux dernières équations conduit à la relation qui lie β et γ, relation vraie non seulement sur l'intersection mais sur toute la surface S:

$$\beta = - 2 \varepsilon \gamma + k' \pi .$$

α est déterminé par la relation f_1, qui s'écrit ici:

$$\sin \alpha = \frac{\varepsilon}{2} ,$$

d'où les solutions:

$$\alpha = \frac{\varepsilon\pi}{6} + 2k''\pi \ , \qquad (S_1)$$

$$\alpha = -\frac{\varepsilon\pi}{6} + 2k''\pi + \pi \ . \qquad (S_2)$$

Apparemment, il existe 8 surfaces (S): 4 (S_1) et 4 (S_2). Nous allons réduire à 2 au plus le nombre de ces surfaces.

Nous prenons ω et γ comme paramètres sur une surface (S). Une surface (S) quelconque est symétrique par rapport à l'origine (changement de γ en $\gamma + \pi$) et par rapport au plan xOz (changement de signe simultané de ω et γ).

Laissant ε et k' fixes, les surfaces S_1 et S_2 sont symétriques par rapport au plan xOy, et aussi par rapport à l'axe Oz.

Le changement de signe de ε transforme une S_1 en sa symétrique par rapport à l'axe Oz, c'est-à-dire en une S_2. Le changement de parité de k' produit la même transformation.

En résumé, il n'existe que deux surfaces distinctes au plus, symétriques l'une de l'autre par rapport au plan xOy.

Nous choisirons pour surface S la surface S_2 déterminée par le choix: $\varepsilon = +1$, $k' = k'' = 0$.

Asymptotiques de S. — Elles sont déterminées, toutes réductions faites, par l'équation différentielle:

$$\frac{d\omega}{d\gamma} = \pm\sqrt{-\frac{3}{2}\cos\omega\sin(2\omega+\gamma)\sin(\omega+\gamma)} \ . \qquad (5)$$

Cette équation reste invariante après les transformations suivantes:

$$(\omega, \omega+\pi) \ , \qquad (\gamma, \gamma+\pi) \ , \qquad (\omega, -\omega) \ ; \qquad (\gamma, -\gamma)$$

(les deux dernières transformations étant simultanées), ce qui permet de se borner à l'étude des courbes intégrales situées dans le rectangle:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \omega \leq 0 \ , \qquad 0 \leq \gamma \leq \pi$$

et, d'une façon plus précise, dans la portion de ce rectangle où le second membre de l'équation (5) est réel; cette portion est le triangle OAB dont les sommets ont pour coordonnées:

$$O(0, 0) \ , \qquad A\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \ , \qquad B\left(-\frac{\pi}{2}, \pi\right) \ .$$

Un calcul simple montre que le maximum de la valeur absolue du deuxième membre de l'équation (5) est $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Soit M un point intérieur au triangle OAB. En M passent deux

courbes intégrales. Considérons, pour fixer les idées, celle dont le coefficient angulaire $\frac{d\gamma}{d\omega}$ est, en M, positif, et étudions en premier lieu la partie de cette courbe correspondant à ω croissant.

Le coefficient angulaire reste positif jusqu'à ce que la courbe rencontre le côté OB en un point M_1. En M_1, le coefficient angulaire est infini; les deux déterminations du radical de l'équation (5) se permutent, et γ devient une fonction décroissante de ω, jusqu'à ce que la courbe coupe le côté OA, ce qui arrive nécessairement, le coefficient angulaire de la courbe étant, en valeur absolue, supérieur à $\frac{4}{\sqrt{3}}$. A partir de ce deuxième point d'intersection, γ redevient une fonction croissante de ω, et ainsi de suite: la courbe admet une infinité de points singuliers $M_1 M_2 \ldots M_n \ldots$ situés alternativement sur OA et OB, et dont les abcisses ω croissent avec n.

Ceci posé, deux hypothèses peuvent être prévues *a priori.*

A. — Les points M_n tendent vers O, seul point limite.

B. — Les abscisses des points M_n tendent vers une quantité négative $-\varepsilon$. Dans cette hypothèse, traçons un cercle (C) complètement intérieur (c'est-à-dire frontière comprise) au triangle OAB, et dont le centre a pour abscisse $-\varepsilon$. Les deux faits suivants sont en contradiction manifeste:

1° — Dans le cercle (C), le coefficient angulaire d'une portion quelconque de courbe intégrale est inférieur, en valeur absolue, à une constante positive dépendant uniquement de la position du cercle (cette constante est l'inverse du minimum, en valeur absolue, du deuxième membre de l'équation (5) dans le cercle).

2° — Il existe, à l'intérieur du cercle (C), une portion PQ de courbe intégrale, les points P et Q pouvant être pris aussi proches que l'on veut des deux extrémités du diamètre du cercle (C), parallèle à l'axe $O\gamma$ (le lecteur est prié de faire la figure).

L'hypothèse B est donc à rejeter.

Etudions maintenant la portion de courbe intégrale correspondant à ω décroissant à partir de M. Plusieurs hypothèses peuvent être prévues *a priori:*

A′. — Après un nombre fini d'intersections avec les côtés OA et OB, la courbe intégrale *touche* le côté AB en un point situé entre A et B. En ce point, les deux déterminations du radical se permutent, et on se retrouve dans le cas A.

A″. — Après un nombre fini de points d'intersection, la courbe intégrale touche le côté AB en A ou B. Elle se complète alors par sa symétrique par rapport à A ou B.

B′. — La courbe intégrale coupe les côtés OA et OB en une infinité de points $P_1 P_2 \ldots P_n \ldots$ d'abscisses décroissantes, tendant vers une quantité supérieure à $-\frac{\pi}{2}$. Un raisonnement identique à celui de l'hypothèse B permet de rejeter cette hypothèse.

C'. — L'abscisse de P_n tend vers $-\frac{\pi}{2}$. Etudions l'allure de la courbe aux environs du côté AB. Bornons-nous à une portion $A_1 B_1$ de ce côté, de longueur suffisamment petite pour que la demi-circonférence (C_1) de diamètre $A_1 B_1$, intérieure au triangle OAB, n'ait pas de point commun aux côtés OA ou OB.

Dans cette demi-circonférence, le coefficient angulaire $\frac{d\gamma}{d\omega}$ n'est plus limité supérieurement en valeur absolue, à cause du terme cos ω, nul sur $A_1 B_1$. Mais on peut écrire l'inégalité:

$$\left|\frac{d\gamma}{d\omega}\right| < \frac{k}{\sqrt{\omega + \frac{\pi}{2}}} \tag{6}$$

pour toute portion de courbe intégrale intérieure à la demi-circonférence. k est une constante positive dépendant uniquement de la position de cette demi-circonférence.

Considérons, pour fixer les idées, une portion $P_1 Q_1$ de courbe intégrale à coefficient angulaire positif, et soit Q_1 le point, le plus haut de cette portion, situé sur la demi-circonférence. Traçons la courbe intégrale, issue de Q_1, de *l'équation différentielle:*

$$\frac{d\gamma}{d\omega} = \frac{k}{\sqrt{\omega + \frac{\pi}{2}}} \tag{6'}$$

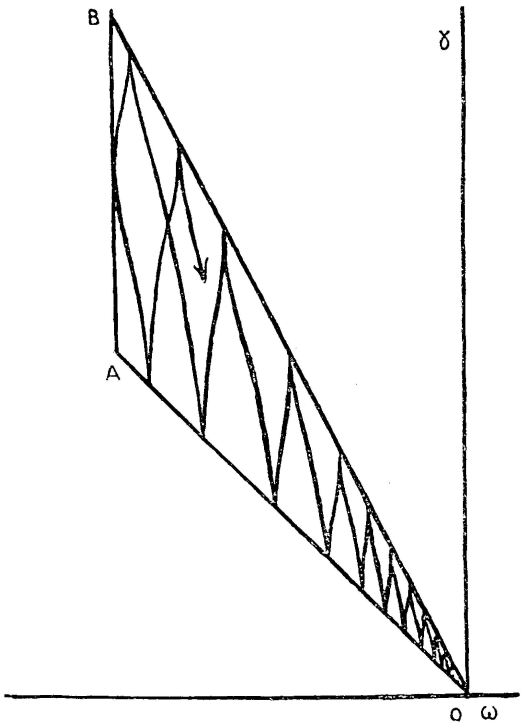
et soit $P'_1 Q_1$ la portion de cette courbe située dans la demi-circonférence. D'après l'inégalité (6), $P'_1 Q_1$ est situé nécessairement *au-dessous* de $P_1 Q_1$.

Or, d'après l'hypothèse C', on peut prendre le point Q_1 aussi rapproché que l'on veut du côté AB. Il suffit d'intégrer l'équation (6') pour s'apercevoir que, lorsque Q_1 est suffisamment proche de AB, la portion $P'_1 Q_1$ *touche* nécessairement le segment $A_1 B_1$, d'où la contradiction.

L'hypothèse C' est donc aussi à rejeter.

L'ensemble des hypothèses (AA'A) et (AA") représente les seuls cas possibles.

La figure ci-contre représente le cas (AA'A) qui est le cas général. Pour ne pas nuire à la clarté du dessin, une partie de la courbe intégrale a été supprimée.



Remarque. — L'étude précédente peut être complétée par celle de la disposition des points singuliers M_n aux environs de l'origine. Donnons de brèves indications sur une méthode conduisant à des résultats assez précis:

Soit M_n et M_{n+1} deux points singuliers consécutifs; pour fixer les idées, supposons M_n situé sur OA et M_{n+1} sur OB.

Il résulte de l'équation (5) que l'on a, sur la portion $M_n M_{n+1}$ de la courbe intégrale:

$$\frac{d\omega}{d\gamma} < A\gamma ,$$

A étant une constante numérique positive.

Cette inégalité entraîne l'inégalité:

$$\omega_{n+1} - \omega_n < \frac{A}{2}(\gamma_{n+1}^2 + \gamma_n^2) , \qquad (7)$$

qui montre que le segment $M_n M_{n+1}$ tend à devenir parallèle à l'axe $O\gamma$ [(déjà évident sur l'équation différentielle (5)].

Faisons maintenant varier γ de $\gamma_n(1+\varepsilon)$ à $\gamma_{n+1}(1-\varepsilon)$, ε étant une constante positive suffisamment petite pour que la seconde quantité soit supérieure à la première (par exemple on peut prendre $\varepsilon = \frac{1}{10}$). Il résulte de l'équation (5) que sur la nouvelle portion de courbe intégrale (incluse dans la précédente), on a:

$$\frac{d\omega}{d\gamma} > A'\gamma ,$$

A′ désigne une constante positive s'annulant avec ε. ε étant choisi une fois pour toutes, on en déduit l'inégalité

$$\omega_{n+1} - \omega_n > A''(\gamma_{n+1}^2 - \gamma_n^2) , \qquad (7')$$

A″ étant une constante *numérique.*

On obtient des inégalités analogues en étudiant la portion $M_{n+1} M_{n+2}$.

Ces inégalités peuvent être transformées de façon à ne contenir que la lettre ω. Elles indiquent alors que le rapport $\frac{\omega_{n+1} - \omega_n}{\omega_n^2}$ est compris entre deux constantes positives, ce qui permet de comparer la décroissance de $|\omega_n|$ à celle de $\frac{1}{n}$.