

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 29 (1930)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE.

**Artikel:** GÉNÉRATIONS PROJECTIVES DES QUINTIQUES GAUCHES  
RATIONNELLES  
**Autor:** Deaux, R.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-23268>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 21.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# GÉNÉRATIONS PROJECTIVES DES QUINTIQUES GAUCHES RATIONNELLES <sup>1</sup>

PAR

R. DEAUX (Mons).

Une quintique gauche rationnelle sera dite de première ou de seconde espèce, et sera désignée par  $C_5^1$  ou  $C_5^2$ , suivant qu'elle admet une seule quadrisécante ou une infinité de telles droites; celles-ci constituent un système réglé d'une quadrique <sup>2</sup>.

D'après M. HJELMANN <sup>3</sup>, M. E. BERTINI, à qui on doit la distinction de deux espèces de quintiques gauches rationnelles, caractérise celle de seconde espèce par la condition de se trouver sur une quadrique <sup>4</sup>. Cette définition n'est pas équivalente à celle que nous avons posée, car une quintique binodale admet pour seule quadrisécante la droite de jonction des nœuds, et se trouve toujours sur une quadrique dont un système réglé est formé de trisécantes <sup>5</sup>.

---

<sup>1</sup> Une petite partie des résultats obtenus a été présentée au Congrès national des Sciences qui a eu lieu à Bruxelles du 29 juin au 2 juillet 1930.

<sup>2</sup> Voir G. LORIA, *Curve sghembe*, I, pp. 322, 324. La démonstration: « Siano infatti,  $a, b, c$  tre quadrisecanti...; due qualunque di esse non appartengono allo stesso piano, perchè altrimenti questo taglierebbe la curva in otto punti » doit être complétée, car les quadrisécantes d'une  $C_5^2$  à point triple sont les génératrices d'un cône quadratique.

<sup>3</sup> *Sur la quintique gauche rationnelle de seconde espèce*, *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ*, série A, t. VII, 1916.

<sup>4</sup> *Sulle curve gobbe razionali del quint'ordine*, *Collectanea Mathematica in mem.* D. CHELINI, Milano, 1881, mémoire que nous n'avons pas pu consulter.

<sup>5</sup> M. LORIA (*loc. cit.*, p. 330), bien qu'il ait posé la première définition, écrit à propos d'une quintique: « questa curva appartiene all' iperboloide  $x_0x_3 - x_1x_2 = 0$ , onde è di II specie; ha due cuspidi...; *idem*, p. 329. Et M. HJELMANN, bien qu'il ait choisi la seconde définition, écrit que l'un des systèmes réglés de la quadrique support est formé de quadrisécantes.



Nous choisissons la définition que nous avons énoncée parce que les générations qui vont suivre sont réglées par le nombre de quadrisécantes.

1. — Dans le présent travail, la recherche de générations projectives caractérisant une  $C_5^1$  ou une  $C_5^2$  est basée sur le fait que seules les  $C_5^1$  ont des trisécantes. Il est vrai qu'une  $C_5^2$  à point triple en possède une gerbe, mais on pourra vérifier que de telles trisécantes ne sont pas utilisables dans le raisonnement qui sera produit.

*Toute  $C_5^1$  est, d'une infinité de manières, l'intersection partielle de deux surfaces cubiques réglées ayant même directrice double.*

Soient  $q, t', t''$  la quadrisécante et deux trisécantes quelconques ne se coupant pas en un point double éventuel de  $C_5^1$ . Par projection des points de la courbe, les faisceaux de plans  $(q), (t')$ , de même que  $(q), (t'')$  sont en correspondance (2, 1) et engendrent deux surfaces cubiques  $\Sigma_3', \Sigma_3''$  qui, ayant même directrice double  $q$ , n'ont en outre en commun que la  $C_5^1$ .

*Une  $C_5^2$  ne se trouve sur aucune surface cubique réglée car celle-ci devrait avoir pour génératrices toutes les quadrisécantes.*

2. — Si deux surfaces cubiques réglées  $\Sigma_3', \Sigma_3''$ , ayant même directrice double  $q$  ont en commun une  $C_5^1$ , elles sont tangentes en tout point de  $C_5^1$  situé sur  $q$  et réciproquement. La nature de ces points se détermine comme suit. Les involutions  $(i'), (i'')$  engendrées par les couples de plans tangents  $\alpha_1', \alpha_2'$  et  $\alpha_1'', \alpha_2''$  menés à  $\Sigma_3', \Sigma_3''$  en un point  $A$  variable sur  $q$  étant projectives à la ponctuelle  $(A)$  sont projectives entre elles. Si  $(i'), (i'')$  constituent une seule involution, c'est-à-dire si, représentés sur une conique, les couples homologues sont fournis par les rayons homologues de deux faisceaux concentriques et projectifs, les rayons doubles de ceux-ci donnent les coïncidences dans  $(i'), (i'')$ : la  $C_5^1$  est binodale, en comprenant dans ce vocable la possibilité pour la courbe d'être cuspidale-nodale, bicuspidale ou tacnodale.

Lorsque  $(i'), (i'')$  sont distinctes, l'examen des cas de coïncidences prouve que la quadrisécante  $q$  peut contenir quatre points distincts ou un point double avec deux points distincts ou

coïncidents, ou bien être soit tangente-bisécante, soit bitangente, soit unisécante-tangente d'inflexion, soit tangente d'ondulation.

3. — Une  $C_5^1$  binodale est caractérisée par l'identité des involutions  $(i')$ ,  $(i'')$  (2). Si un couple variable  $\alpha_1, \alpha_2$  de cette involution  $(i)$  est tangent à  $\Sigma'_3, \Sigma''_3$  aux points  $A', A''$  de  $q$  et rencontre  $C_5^1$  en  $A_1, A_2$ , les plans  $A'A_1A_2, A''A_1A_2$  contiennent respectivement les trisécantes  $t', t''$  (1) et engendrent donc deux faisceaux qui, étant perspectifs aux ponctuelles  $(A'), (A'')$ , sont projectifs à l'involution  $(i)$ . La droite  $A_1A_2$  engendre par suite un système réglé d'une quadrique; celle-ci a un point double si  $t', t''$  se coupent en un point simple de  $C_5^1$ . Dès lors, toute  $C_5^1$  binodale est située sur une quadrique  $\Sigma_2$  et est le lieu des points communs à un rayon variable d'un système réglé de  $\Sigma_2$  et au couple de plans homologues d'une involution projective à ce système, portée par la quadrisécante. Si  $\Sigma_2$  n'a pas de point double, l'un de ses systèmes réglés est composé de trisécantes, l'autre de bisécantes de  $C_5^1$ ; si  $\Sigma_2$  a un point double, celui-ci est sur  $C_5^1$  et les génératrices du cône ou du cylindre sont trisécantes.

COROLLAIRES. — 1° Le lieu des trisécantes d'une  $C_5^1$  binodale se compose d'une quadrique et des cônes cubiques projetant  $C_5^1$  de ses points doubles.

2° Si une  $C_5^1$  est sur une quadrique, elle est binodale.

4. — Si un système réglé  $(\Sigma_2)$  d'une quadrique est projectif à une involution de plans  $(i)$  dont le support rencontre la quadrique en deux points  $X, Y$  réels distincts ou confondus ou imaginaires conjugués, et si le rayon de  $(\Sigma_2)$  issu de  $X$  ou  $Y$  n'est pas situé dans l'un de ses plans homologues, un rayon variable de  $(\Sigma_2)$  rencontre ses plans homologues sur une  $C_5^1$  ayant  $X, Y$  pour points doubles. Si la quadrique a un point double  $S$ , celui-ci est simple sur  $C_5^1$ . Si  $i$  est un rayon de  $(\Sigma_2)$ , le lieu est une cubique gauche.

Il suffit de considérer la surface cubique engendrée par l'involution  $(i)$  et le faisceau projectif des plans projetant  $(\Sigma_2)$  de

<sup>1</sup> On ne peut donc pas, du fait qu'une quintique est projetée d'un point suivant un cône du second ordre, conclure, avec M. LORIA (op. cit., pp. 334, 337, 339), que ce point est triple. « Essendo questa (une quintique) proiettata dal punto M secondo un cono quadrico é chiaro che questo è triplo per la curva (p. 339).

l'une quelconque de ses directrices ou de l'un quelconque de ses rayons si la quadrique a un point double. Suivant que un ou deux des rayons de  $(\Sigma_2)$  issus de X ou Y se trouvent dans un plan homologue, le lieu se complète par une biquadratique ayant un point double ou par une cubique gauche.

*Remarque.* Une involution de plans étant un faisceau de quadriques, la génération caractéristique de la  $C_5^1$  binodale est un cas particulier du théorème suivant : Si trois faisceaux de surfaces d'ordres  $m, n, p$  sont projectifs, le lieu des points communs à trois surfaces homologues est une courbe d'ordre  $mn + np + pm$  (CHASLES, *Rapport sur les progrès de la Géométrie*, p. 249; CREMONA, *Theorie der Oberflächen*, p. 104).

5. — Voici trois exemples de  $C_5^1$  binodales :

1° Si les faces  $\alpha_1, \alpha_2$  d'un dièdre droit mobile autour de son arête  $q$  rencontrent en  $A_1, A_2$  une génératrice rectiligne d'une surface réglée, la normale  $a$  à celle-ci au milieu  $A$  du segment  $A_1 A_2$  rencontre  $\alpha_1, \alpha_2$  sur une  $C_5^1$  binodale, ou sur une cubique gauche si  $q$  est un axe focal du parabolôïde engendré par  $a$ .

L'involution orthogonale  $(\alpha_1 \alpha_2)$  étant en effet projective à la ponctuelle (A) l'est aussi au système réglé ( $a$ ). Le rayon  $a$  ne peut se trouver dans  $\alpha_1$  que si ce plan est isotrope et tangent au parabolôïde.

2° Etant donnés un faisceau tangentiel  $(\Sigma)$  de quadriques  $\Sigma$  et deux droites  $q, q'$ , la corde des contacts des plans tangents menés par  $q'$  et les plans tangents  $\alpha_1, \alpha_2$  menés par  $q$  à la même quadrique  $\Sigma$  se coupent en deux points qui décrivent en général une  $C_5^1$  binodale. On a un lieu analogue si,  $(\Sigma)$  étant ponctuel,  $q$  est une arête du tétraèdre conjugué commun. L'involution  $(\alpha_1 \alpha_2)$  et le système réglé engendré par la corde considérée, conjuguée de  $q'$  par rapport à  $\Sigma$  sont en effet projectifs à  $(\Sigma)$ .

Si  $q = q'$ , on conclut que le lieu des points de contact des plans tangents menés par  $q$  est en général une cubique gauche, car la conjuguée de  $q$  par rapport à chacune des quadriques tangentes à  $q$  se trouve dans ses plans homologues.

Soit  $(\varpi_1)$  la conique du faisceau tangentiel  $(\Sigma)$  située dans la face  $\varpi_1 = P_2 P_3 P_4$  du tétraèdre conjugué commun.

Le plan polaire  $\alpha$  d'un point fixe S par rapport à  $\Sigma$  et le support

$a$  de la ponctuelle des pôles de  $\alpha$  par rapport à toutes les quadriques  $\Sigma$  coupent  $\omega_1$  suivant une droite  $d$  et son pôle relativement à  $(\omega_1)$ .

Comme  $\alpha$  décrit un faisceau du troisième ordre projectif à  $(\Sigma)$  et coupé par  $\omega_1$  suivant un faisceau du second ordre  $(d)$ ,  $a$  engendre un système réglé conique de sommet  $S$  et projectif à l'involution  $(\alpha_1 \alpha_2)$ . Par suite, la perpendiculaire à abaissée d'un point fixe  $S$  sur le plan polaire  $\alpha$  de ce point par rapport à une quadrique variable  $\Sigma$  d'un faisceau homofocal rencontre les plans tangents à  $\Sigma$  menés par une droite fixe  $q$ , en deux points qui décrivent en général une  $C_5^1$  binodale située sur un cône du second ordre de sommet  $S$ . Ainsi, si on considère le point  $S(x_0, y_0, z_0)$  et la droite  $q$  à l'infini dans le plan de symétrie  $xOy$  de la quadrique d'équation

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 1.$$

les équations de  $\alpha$ ,  $a$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  sont

$$\begin{aligned} \frac{xx_0}{a^2 + \lambda} + \frac{yy_0}{b^2 + \lambda} + \frac{zz_0}{c^2 + \lambda} &= 1, \\ (x - x_0) \frac{a^2 + \lambda}{x_0} &= (y - y_0) \frac{b^2 + \lambda}{y_0} = (z - z_0) \frac{c^2 + \lambda}{z_0}, \\ z^2 &= c^2 + \lambda = t^2 \end{aligned}$$

et la  $C_5^1$  est représentée par

$$\begin{cases} x = \frac{x_0}{z_0} \frac{t^3 + (a^2 - c^2)z_0}{t^2 + a^2 - c^2} \\ y = \frac{y_0}{z_0} \frac{t^3 + (b^2 - c^2)z_0}{t^2 + b^2 - c^2} \\ z = t. \end{cases}$$

6. — Soient  $\Sigma'_3, \Sigma''_3$  deux surfaces cubiques réglées permettant d'obtenir une  $C_5^1$  quelconque (1);  $P'$  un point quelconque non situé sur  $q$ ,  $t'$ ;  $g', g''$  les génératrices de  $\Sigma'_3, \Sigma''_3$  situées dans un plan  $\gamma$  passant par  $q$ . Si  $\gamma$  varie, le plan  $P'g'$  enveloppe un cône du second ordre ou du quatrième ordre et de la troisième classe suivant que  $P'$  se trouve ou non sur  $\Sigma'_3$ , et le faisceau de plans  $(\gamma)$  est projectif au faisceau conique de plans  $(P'g')$ . Comme le

point  $g' g''$  décrit la  $C_5^1$ , le même raisonnement fait avec le faisceau  $(\gamma)$ , la surface  $\Sigma_3''$  et un point  $P''$  qui peut coïncider avec  $P'$ , prouve que toute  $C_5^1$  peut s'obtenir comme lieu du point commun aux plans homologues de trois faisceaux projectifs de plans, l'un porté par une droite  $q$ , les deux autres  $(P')$ ,  $(P'')$  non superposés et portés par des cônes concentriques ou non et qui peuvent être, un seul ou tous deux, soit du second ordre soit du quatrième ordre et de la troisième classe, mais dans ce dernier cas la droite  $q$  doit être tangente au cône et le plan tangent qui la contient doit être un élément uni du faisceau conique et du faisceau  $(q)$ .

La ligne de contact de  $\Sigma_3'$  et du cône  $P'$  est une cubique gauche ou une quartique gauche de seconde espèce admettant  $t'$  pour uni- ou bisécante, suivant que  $P'$  est ou non sur  $\Sigma_3'$  (E. WEYR, *Regelflächen dritter Ordnung*, pp. 94, 98); les génératrices  $g'$  de  $\Sigma_3'$  marquent sur cette courbe et sur  $t'$  deux ponctuelles projectives ayant un ou deux éléments unis. En utilisant la propriété corrélatrice et en limitant l'énoncé au cas de la cubique gauche, on conclut que toute  $C_5^1$  peut s'obtenir comme lieu du point commun aux plans homologues de trois faisceaux projectifs de plans, l'un  $(q)$  du premier ordre, les deux autres  $(\varpi')$ ,  $(\varpi'')$  du troisième ordre non superposés et tels que  $(q)$ ,  $(\varpi')$  de même que  $(q)$ ,  $(\varpi'')$  ont un élément uni<sup>1</sup>.

Nous n'examinons pas les propositions réciproques, nécessaires pour la discussion de lieux tels que le suivant: Si les plans tangents  $\alpha'$ ,  $\alpha''$  à deux cylindres de révolution roulent sur ceux-ci avec la vitesse angulaire constante  $\omega$ , et si un plan  $\alpha$  tourne autour d'une droite fixe avec la vitesse  $\frac{\omega}{2}$ , le point  $\alpha\alpha'\alpha''$  décrit en général une  $C_5^1$ .

7. — Soient  $q$  une quadrisécante d'une  $C_5^2$ ;  $b$  une bisécante ne rencontrant pas  $q$ :  $\Sigma_2$  la quadrique avec ou sans point double qui contient  $C_5^2$ . Par projection des points de la courbe, les faisceaux de plans  $(q)$ ,  $(b)$  sont en correspondance  $(3, 1)$  et engendrent une surface du quatrième ordre  $\Sigma_4$ , qui, ayant pour directrice triple

<sup>1</sup> On peut aussi, en considérant simultanément un cône et une développable circonscrits, engendrer une  $C_5^1$  à l'aide de trois faisceaux projectifs de plans, respectivement du premier, du second et du troisième ordre.

la génératrice  $q$  de  $\Sigma_2$ , n'a en outre en commun avec celle-ci que la  $C_5^2$ . Les génératrices  $g, a$  de  $\Sigma_4, \Sigma_2$  et situées dans un plan  $\alpha$  passant par  $q$  se coupent en un point de  $C_5^2$ . Si  $S$  est un point quelconque de  $\Sigma_4$  non situé sur  $q$  ou  $b$ , le plan  $Sg$  enveloppe, lorsque  $\alpha$  varie, un cône tricuspidal de la troisième classe bitangent au plan  $Sb$ , et le système réglé  $(a)$ , projectif au faisceau de plans  $(\alpha)$ , est projectif au système des plans  $Sg$ . Par suite, *toute  $C_5^2$  peut s'obtenir à l'aide d'un système réglé projectif à un faisceau conique de plans porté par un cône tricuspidal de la troisième classe.* Cette génération est l'analogue de celle qui fournit la cubique gauche ou la biquadratique de seconde espèce à l'aide d'un faisceau de plans du premier ou du second ordre rapporté projectivement à un système réglé.

On obtient des générations de la  $C_5^2$  avec des formes plus élevées en considérant les développables circonscrites à  $\Sigma_4$  le long des sections planes (6).

8. — Soient  $(\gamma)$  une conique inscrite au triangle que forment  $b$  et deux génératrices réelles ou imaginaires conjuguées  $g_1, g_2$  de  $\Sigma_4$  et issues d'un point quelconque de  $q$  (7). La développable de la huitième classe circonscrite à  $\Sigma_4$  et à  $(\gamma)$  comprend les faisceaux de plans d'axes  $g_1, g_2$  ainsi que trois fois le faisceau de plans d'axe  $b$ ; l'ensemble restant est donc formé par les plans osculateurs d'une cubique gauche. Chacun de ces plans contient une génératrice  $g$  de  $\Sigma_4$ , coupe l'axe  $b$  de la cubique sur le plan  $\alpha = qg$ , et la  $C_5^2$  sur la génératrice  $a$  de  $\Sigma_2$  située dans  $\alpha$ . Dès lors, *toute  $C_5^2$  est le lieu du point commun à deux éléments homologues d'un système réglé et d'un faisceau de plans du troisième ordre rapportés projectivement.* En vue des applications qui seront faites de cette génération, on va discuter sa réciproque.

9. — Si un faisceau de plans du troisième ordre  $(C_3) = (\alpha, \beta, \gamma, \dots)$  porté par une cubique gauche  $C_3$  est projectif à un faisceau de plans du premier ordre  $(q) = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \dots)$  de support  $q$ , la droite commune à deux plans homologues engendre une surface du quatrième ordre  $\Sigma_4$  ayant  $q$  pour droite triple.

En effet, soit  $i$  la droite commune à deux plans quelconques  $\lambda, \mu$  du faisceau  $(C_3)$ . Les seuls points du lieu situés sur  $i$  sont

$i\lambda_1$ ,  $i\mu_1$  et les deux coïncidences des ponctuelles projectives sections de  $(C_3)$ ,  $(q)$  par  $i$ . Comme un plan tel que  $\alpha_1$  ne renferme de  $\Sigma_4$  que les droites  $\alpha\alpha_1$ ,  $q$ , celle-ci est triple.

Lorsque  $q$  n'est ni un axe ni un semi-axe de  $C_3$ , cette droite est directrice triple de  $\Sigma_4$ , et la surface, en général de la neuvième espèce de STURM (*Liniengeometrie*, I, pp. 58-60) ne peut pas se décomposer car  $(C_3)$  et  $(q)$  n'ont pas de plan commun.  $\Sigma_4$  aura en outre une directrice simple, axe de  $C_3$ , et sera de la dixième espèce de STURM si les trois génératrices de  $\Sigma_4$  issues d'un point de  $q$  sont dans un même plan; car l'axe de  $C_3$  situé dans ce plan est coupé par  $(C_3)$ ,  $(q)$  suivant deux ponctuelles projectives qui, ayant trois coïncidences, sont identiques <sup>1</sup>.

Si  $q$  est un semi-axe de  $C_3$ , cette droite est directrice double et génératrice simple de  $\Sigma_4$  (onzième espèce de STURM). Lorsque  $(q)$  et  $(C_3)$  ont un plan uni,  $\Sigma_4$  comprend ce plan et une surface cubique qui a la directrice double  $q$  et une directrice simple, axe de  $C_3$  (E. WEYR, *op. cit.*, p. 76).

Si  $q$  est un axe de  $C_3$ ,  $\Sigma_4$  est de la douzième espèce de STURM; lorsque  $(q)$  et  $(C_3)$  ont un ou deux plans unis,  $\Sigma_4$  comprend un plan et une surface cubique de CAYLEY, ou deux plans et une quadrique.

10. — Si un faisceau de plans du troisième ordre  $(C_3) = (z, \beta, \gamma, \dots)$  est projectif à un système réglé  $(\Sigma_2) = (a, b, c, \dots)$  d'une quadrique  $\Sigma_2$ , le point commun à deux éléments homologues décrit en général une  $C_5^2$ . Si  $\Sigma_2$  a un point double  $S$ , ce point est triple sur  $C_5^2$  et les tangentes  $t'$ ,  $t''$ ,  $t'''$  en  $S$  sont dans  $(\Sigma_2)$  les homologues des plans  $\tau'$ ,  $\tau''$ ,  $\tau'''$  de  $(C_3)$  issus de  $S$ .

$\Sigma_2$  A UN POINT DOUBLE. Si  $q$  est un rayon de  $(\Sigma_2)$  autre que  $t'$ ,  $t''$ ,  $t'''$  les faisceaux projectifs  $q(\Sigma_2)$  et  $(C_3)$  engendrent une  $\Sigma_4$  indécomposable qui coupe  $\Sigma_2$  suivant  $q$  compté trois fois et une  $C_5^2$  lieu du point  $a\alpha(9)$ .

La  $C_5^2$  comprend une, deux, trois droites associées à une biquadratique de point double  $S$ , une cubique, une conique suivant que un, deux, trois des plans  $\tau'$ ,  $\tau''$ ,  $\tau'''$  contiennent leur rayon homologue.

<sup>1</sup> REYE examine le corrélatif (*Geometrie der Lage*, II, 1907, p. 303).



$\Sigma_2$  N'A PAS DE POINT DOUBLE. Le cas général se traite comme ci-dessus, avec une directrice  $q$  de  $(\Sigma_2)$ .

Lorsque  $\Sigma_2$  n'est pas inscrite à la développable osculatrice à  $C_3$ , on choisit  $q$  ni axe ni semi-axe de  $C_3$ ;  $\Sigma_4$  est indécomposable. Si  $\Sigma_4$  a une directrice simple  $s$  qui est directrice de  $(\Sigma_2)$ ,  $C_5^2$  se compose de  $s$  et de quatre rayons de  $(\Sigma_2)$ ; si  $s$  n'est pas directrice de  $(\Sigma_2)$ , la  $C_5^2$  se décompose en une biquadratique de seconde espèce et une droite, ou en une cubique gauche et deux droites suivant que un ou deux rayons de  $(\Sigma_2)$  issus des points  $s \Sigma_2$  se trouvent dans leur plan homologue. Si  $\Sigma_4$  n'a pas de directrice  $s$ , trois rayons au plus de  $(\Sigma_2)$  sont sur  $\Sigma_4$ ; la  $C_5^2$  peut se composer d'une biquadratique, d'une cubique ou d'une conique associées à un, deux ou trois rayons de  $(\Sigma_2)$ .

Lorsque  $(\Sigma_2)$  est composé de semi-axes de  $C_3$ ,  $q$  est un axe. Si on exclut le cas où  $(\Sigma_2)$  et  $(C_3)$  sont projectifs, il n'existe que deux rayons  $a, b$  de  $(\Sigma_2)$  situés dans leurs plans homologues  $\alpha, \beta$ ; on choisit  $q \neq \alpha\beta$ , et la  $C_5^2$  comprend  $a, b$  et une cubique gauche.

Lorsque  $(\Sigma_2)$  est composé d'axes de  $C_3$ , on choisit le semi-axe  $q$  tel que le plan osculateur qui le contient ne renferme pas le rayon homologue.  $(\Sigma_2)$  a trois rayons situés dans leurs plans homologues, car  $(C_3)$  est projectif à l'involution des plans osculateurs menés par les rayons de  $(\Sigma_2)$ ; la  $C_5^2$  se compose de ces trois rayons et d'une conique.

11. — Les plans osculateurs d'une cubique gauche formant un faisceau projectif à la ponctuelle des points de contact, la considération de formes projectives portées par la cubique  $C_3$  et de quadriques ou circonscrites à  $C_3$  ou inscrites dans la développable osculatrice conduit à des  $C_5^2$  telle la suivante : Soit  $S$  un point fixe quelconque sur une cubique gauche qui porte deux ponctuelles projectives  $(A), (A')$ ; la droite  $SA$  rencontre le plan osculateur en  $A'$  en un point qui décrit une  $C_5^2$  si  $S$  n'est pas un point double des ponctuelles.

Ainsi, on pourra vérifier que, étant donnée la courbe horoptère d'équations

$$x = \frac{a}{1 + \lambda^2}, \quad y = \frac{a\lambda}{1 + \lambda^2}, \quad z = b\lambda,$$



si les faces d'un dièdre droit mobile autour de l'asymptote Oz de la courbe rencontrent celle-ci en A, A' et si on prend le point S en  $(a, o, o)$ , la  $C_5^2$  est donnée par

$$x = a + \frac{a}{(1+t^2)(2+t^2)}, \quad y = \frac{a}{t(1+t^2)(2+t^2)}, \quad z = \frac{b}{t(2+t^2)},$$

$$(t = -\lambda).$$

12. — Une ponctuelle du premier ordre (A, B, C, ...) projective à un système réglé  $(\Sigma_2) = (a, b, c, \dots)$  l'est aussi au faisceau du second ordre  $(a', b', c', \dots)$  réciproque de la ponctuelle du second ordre section de  $(\Sigma_2)$  par un plan non tangent  $\sigma$ , relativement à une conique quelconque  $(\sigma)$  de ce plan. Les plans Aa', Bb' ... osculent une cubique gauche si les formes (A), (a') n'ont pas d'éléments homologues incidents, et enveloppent un cône du second ordre si deux tels éléments existent; le point  $(a, Aa')$  décrit donc en général une  $C_5^2$  (10) ou une biquadratique de seconde espèce (*Mathesis*, 1929-84). En supposant que  $(\sigma)$  est le cercle imaginaire à l'infini, on a le théorème: *Si une ponctuelle  $(p) = (A, B, C, \dots)$  est projective à un système réglé  $(\Sigma_2) = (a, b, c, \dots)$  d'un hyperboloïde, la projection orthogonale de A sur a décrit en général une  $C_5^2$  (NEUBERG et DEGUELDRE, *Sur quelques lieux géométriques dans l'espace*, supplément à *Mathesis*, juin 1909, p. 15). Le théorème est encore vrai pour un cône de sommet S, ce point est triple sur  $C_5^2$ . Si p et le rayon homologue de son point à l'infini sont orthogonaux, le lieu est en général une biquadratique gauche de seconde espèce  $C_4^2$ .*

La projection orthogonale A' d'un point A à distance finie sur une droite a à distance finie est à l'infini et unique si, a étant isotrope, A n'est pas dans le plan isotrope  $\alpha$  passant par a; A' est quelconque sur a si A est dans  $\alpha$ . Dès lors, quatre points du lieu sont cycliques. La  $C_5^2$  ou la  $C_4^2$  dégénèrent en deux rayons isotropes  $a_1, a_2$  de  $(\Sigma_2)$  associés à un cercle gauche ou à un cercle plan lorsque les points  $p_{\alpha_1}, p_{\alpha_2}$  de (p) sont les homologues des rayons  $a_1, a_2$ , en désignant par  $\alpha_1, \alpha_2$  les plans isotropes passant par  $a_1, a_2$ .

Le rapport anharmonique des quatre rayons isotropes  $a_i$  de  $(\Sigma_2)$  détermine un complexe tétraédral dont le tétraèdre de base est formé par les plans isotropes  $\alpha_i$  passant par les  $a_i$ . La  $C_5^2$

dégénère en les quatre rayons isotropes  $a_i$  et en une directrice  $q$  de  $(\Sigma_2)$  lorsque  $p$  est un rayon du complexe considéré et que les points  $p\alpha_i$  sont les homologues des  $a_i$ .

$\Sigma_2$  EST UN PARABOLOÏDE. Le plan à l'infini étant tangent, le faisceau  $(a')$  est du premier ordre et les plans  $Aa'$  enveloppent un cylindre parabolique ou engendrent un faisceau. Si  $p$  n'est pas orthogonale au rayon homologue de son point à l'infini et si celui-ci ne correspond pas au rayon à l'infini de  $(\Sigma_2)$ , le lieu est une  $C_4^2$  ayant deux points cycliques, ou se compose de deux rayons isotropes de  $(\Sigma_2)$  et d'une hyperbole ; si les éléments à l'infini de  $(p)$  et  $(\Sigma_2)$  sont homologues, le lieu comprend le rayon à l'infini et un cercle gauche qui peut dégénérer en les rayons isotropes et une directrice de  $(\Sigma_2)$ . Si  $p$  est orthogonale au rayon homologue de son point à l'infini, le lieu est un cercle gauche ou les rayons isotropes et une directrice de  $(\Sigma_2)$ .

13. — Soit  $S$  le pôle par rapport à une quadrique  $\Sigma$  d'un plan  $\sigma$  n'appartenant pas à un faisceau du troisième ordre  $(C_3) = (\alpha, \beta, \gamma, \dots)$ . La section de  $(C_3)$  par  $\sigma$  est, suivant que  $\sigma$  ne contient pas ou contient une tangente  $t$  à la cubique  $C_3$ , l'ensemble  $(a', b', c', \dots)$  des tangentes à une quartique tricuspidale bitangente à l'axe  $q'$  de  $C_3$  dans  $\sigma$ , ou à une cubique cuspidale ayant  $t'$  pour tangente inflexionnelle. Par l'intermédiaire de la ponctuelle section de  $(C_3)$  par  $t'$  ou  $q'$ , on a  $(a', b', c', \dots) \overline{\wedge} (C_3)$  et les réciproques  $a, b, \dots$  relativement à  $\Sigma$  de  $a', b', \dots$  décrivent une série réglée  $(\Sigma_3)$  située sur un cône cubique de sommet  $S$  qui a une génératrice double  $q$ , et projective à  $(C_3)$ . Les faisceaux  $q(\Sigma_3)$  et  $(C_3)$  étant projectifs, le point  $a\alpha$  décrit la sextique qui, avec  $q$  comptée six fois, constitue l'intersection du cône cubique  $\Sigma_3$  et d'une surface quartique ayant  $q$  pour droite triple (9). Par suite, étant donnés une quadrique  $\Sigma$  sans ou avec point double, une cubique gauche  $C_3$  et un plan  $\sigma$  non osculateur à  $C_3$  dont le pôle est  $S$ , le pôle de  $\sigma$  par rapport à la conique section de  $\Sigma$  par un plan osculateur variable à  $C_3$  décrit en général une sextique gauche rationnelle  $C_6$  ayant le point triple  $S$  et pour seule quintisécante la réciproque  $q$  par rapport à  $\Sigma$  de l'axe de  $C_3$  situé dans  $\sigma$  ; les tangentes  $t_1, t_2, t_3$  en  $S$  sont les réciproques des intersections de  $\sigma$  avec les plans osculateurs  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  à  $C_3$  issus de  $S$ .

La  $C_6$  dégénère en  $t_1$  et une  $C_5^1$  de point double  $S$  avec  $q$  pour quadrisécante, ou en  $t_1, t_2$  et une  $C_4^2$ , ou en  $t_1, t_2, t_3$  et une cubique gauche suivant que une, deux ou trois droites  $t_1, t_2, t_3$  se trouvent dans  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$ .

Lorsque  $\sigma$  est osculateur à  $C_3$ , la série réglée  $(a, b, c, \dots)$  est sur un cône du second ordre et le lieu considéré est en général une  $C_5^2$  de point triple  $S$  (10).

14. — On suppose que  $\Sigma$  est une sphère de centre  $S$  et que  $\sigma$  est le plan de l'infini (13).

Suivant qu'une cubique gauche  $C_3$  n'est pas ou est une parabole, la podaire de sa développable osculatrice par rapport à un point  $S$  est une sextique rationnelle ayant six points cycliques (12) et, passant par le point triple  $S$ , une quintisécante normale aux plans osculateurs parallèles de  $C_3$ , ou une  $C_5^2$  ayant quatre points cycliques et le point triple  $S$ . Si  $S$  est sur un axe focal de  $C_3$  la sextique se compose de deux droites isotropes et d'une  $C_4^2$ , et la  $C_5^2$  comprend deux telles droites et un cercle gauche (12).

Le corrélatif du théorème 13 concerne la développable engendrée par le plan polaire d'un point fixe  $S$  par rapport au cône circonscrit à une quadrique  $\Sigma$  et dont le sommet décrit une cubique gauche. Si  $\Sigma$  est le cercle imaginaire à l'infini, on obtient l'antipodaire d'une cubique gauche relativement à un point  $S$ ; on énoncera aisément les résultats qui, d'ailleurs, peuvent aussi s'obtenir en prenant l'inverse  $C_6$  de la cubique pour le pôle  $S$  et une puissance  $k^2$ , puis la réciproque de  $C_6$  par rapport à la sphère  $(S, k)$ .

15. — Le faisceau du troisième ordre engendré par le plan polaire  $\alpha$  d'un point fixe  $S$  par rapport à une quadrique variable  $\Sigma$  d'un faisceau tangentiel général est projectif au système réglé conique  $(\Sigma_2)$  de sommet  $S$  que décrit le support  $a$  de la ponctuelle des pôles de  $\alpha$  (5), et la droite  $a$  est le rayon polaire de  $\alpha$  pour les cônes de sommet  $A = a\alpha$  et circonscrits aux quadriques  $\Sigma$ . Donc (10), étant donnés un point fixe  $S$  et deux quadriques ayant un seul tétraèdre conjugué commun  $P_1 P_2 P_3 P_4$ , le lieu du sommet  $A$  des cônes circonscrits aux quadriques et tels qu'une arête de leur trièdre conjugué commun passe par  $S$ , est en général une  $C_5^2$  de

point triple  $S$  où les tangentes sont les arêtes du trièdre relatif à  $S$ ; le point  $(SP_1, P_2 P_3 P_4)$  est sur  $C_5^2$  (L. LIPKIN, *Ueber räumlichen Strophoiden, Dissertation*, Jena, 1870, pp. 7-16; LORIA, *op. cit.*, p. 337).

Il existe quatre génératrices  $b_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) du cône  $\Sigma_2$  qui sont tangentes en  $B_i$  à la quadrique  $\Sigma$  du faisceau pour laquelle  $S$  est le pôle de  $\alpha$ . Le plan  $\beta_i$  ayant  $b_i$  pour support de la ponctuelle de ses pôles coupe  $\alpha$  suivant la conjuguée de  $b_i$  par rapport à  $\Sigma$ ; la droite  $\alpha\beta_i$  passe donc par  $B_i$  et ce point est sur  $C_5^2$ . Dès lors, la  $C_5^2$  rencontre le plan polaire  $\alpha$  de  $S$  par rapport à une quadrique quelconque  $\Sigma$  du faisceau au point  $A$  et aux quatre points communs à  $\Sigma$  et au cône du second ordre  $\Sigma_2$  contenant  $C_5^2$  (LIPKIN, p. 22).

Si la droite  $a$  est dans  $\alpha$  elle fait partie de  $C_5^2$ . Donc, si  $S$  appartient à la développable de base du faisceau, la  $C_5^2$  comprend une génératrice de cette surface et une  $C_4^2$  de point double  $S$ .

COROLLAIRE. — Si les quadriques  $\Sigma$  sont homofocales,  $a$  est la normale en  $A$  à la quadrique tangente à  $\alpha$ . Les normales à des quadriques homofocales et issues d'un point  $S$  se trouvent sur un cône équilatère  $\Sigma_2$ . Leurs pieds décrivent une  $C_5^2$  de point triple  $S$ , les tangentes étant les normales aux quadriques qui passent par  $S$ .

La  $C_5^2$  contient les projections orthogonales de  $S$  sur les plans de symétrie, les douze intersections de  $\Sigma_2$  avec les coniques focales, quatre points cycliques et le point à l'infini du diamètre qui passe par  $S$  (LIPKIN, *passim*).

Ce lieu est évidemment:

1° Celui des sommets des cônes perspectifs à une conique et dont un axe passe par un point fixe  $S$ , car une conique focale et le cercle imaginaire à l'infini définissent le faisceau homofocal;

2° Celui des pieds des axes d'une quadrique quelconque du faisceau et concourant en  $S$ <sup>1</sup>.

16. — La cubique gauche osculée par  $\alpha$  (15) est une parabole si  $P_1 P_2 P_3 P_4$  a une face à l'infini ou si  $S$  est le centre d'une quadrique du faisceau. Donc, dans un faisceau tangentiel de quadriques dont le tétraèdre conjugué commun n'a pas de face à

<sup>1</sup> G. LORIA (*op. cit.*) traite séparément ces questions par des calculs qui ne mettent pas en évidence leur identité.

*l'infini, les pieds des axes relatifs au centre d'une quadrique fixe du faisceau se trouvent sur une  $C_5^2$  (14).*

17. — *Le centre de la conique, section d'une quadrique  $\Sigma_0$  d'un faisceau homofocal par le plan polaire  $\alpha$  d'un point fixe S relativement à une quadrique variable  $\Sigma$  du faisceau, décrit une  $C_5^2$  ayant le centre de  $\Sigma$  pour point triple et les axes de symétrie pour tangentes.*

La plan de l'infini étant en effet osculateur à la parabole gauche qu'oscule  $\alpha$ , il suffit d'appliquer le théorème 13.

Relativement à la quadrique  $\Sigma$  d'équation

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 1, \quad (1)$$

le plan polaire  $\alpha$  du point  $S(x_0, y_0, z_0)$  est donné par

$$\frac{xx_0}{a^2 + \lambda} + \frac{yy_0}{b^2 + \lambda} + \frac{zz_0}{c^2 + \lambda} = 1 \quad (2)$$

et coupe la quadrique  $\Sigma_0$  d'équation (1) où on fait  $\lambda = 0$ , suivant une conique dont le centre A est sur le diamètre conjugué à  $\alpha$  et d'équations

$$x \frac{a^2 + \lambda}{a^2 x_0} = y \frac{b^2 + \lambda}{b^2 y_0} = z \frac{c^2 + \lambda}{c^2 z_0}. \quad (3)$$

Les coordonnées de A, tirées de (2) et (3), sont donc, si on pose

$$\Delta = a^2 x_0^2 (b^2 + \lambda)^2 (c^2 + \lambda)^2 + b^2 y_0^2 (c^2 + \lambda)^2 (a^2 + \lambda)^2 + c^2 z_0^2 (a^2 + \lambda)^2 (b^2 + \lambda)^2,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{a^2 x_0}{\Delta} (a^2 + \lambda) (b^2 + \lambda)^2 (c^2 + \lambda)^2 \\ y = \frac{b^2 y_0}{\Delta} (b^2 + \lambda) (c^2 + \lambda)^2 (a^2 + \lambda)^2 \\ z = \frac{c^2 z_0}{\Delta} (c^2 + \lambda) (a^2 + \lambda)^2 (b^2 + \lambda)^2 \end{array} \right.$$

*La projection orthogonale A' d'un point fixe S' (x', y', z') sur  $\alpha$  décrit aussi en général une  $C_5^2$  à point triple S' (13).*

Les équations de S'A' étant

$$(x - x') \frac{a^2 + \lambda}{x_0} = (y - y') \frac{b^2 + \lambda}{y_0} = (z - z') \frac{c^2 + \lambda}{z_0},$$

les coordonnées de A' sont, si on pose

$$P = \frac{x_0 x'}{a^2 + \lambda} + \frac{y_0 y'}{b^2 + \lambda} + \frac{z_0 z'}{c^2 + \lambda},$$

$$Q = \left( \frac{x_0}{a^2 + \lambda} \right)^2 + \left( \frac{y_0}{b^2 + \lambda} \right)^2 + \left( \frac{z_0}{c^2 + \lambda} \right)^2,$$

$$x = x' + \frac{x_0}{a^2 + \lambda} \times \frac{1 - P}{Q}, \quad y = y' + \frac{y_0}{b^2 + \lambda} \cdot \frac{1 - P}{Q},$$

$$z = z' + \frac{z_0}{c^2 + \lambda} \frac{1 - P}{Q}. \quad (4)$$

En supposant  $x' = x_0, y' = y_0, z' = z_0$ , on obtient les équations du lieu des pieds des normales issues de S, aux quadriques homofocales (15). L' $x$  d'un point du lieu est

$$x = x_0(a^2 + \lambda) \frac{y_0^2(c^2 + \lambda)^2(a^2 - b^2) + z_0^2(b^2 + \lambda)^2(a^2 - c^2) + (b^2 + \lambda)^2(c^2 + \lambda)^2}{x_0^2(b^2 + \lambda)^2(c^2 + \lambda)^2 + y_0^2(c^2 + \lambda)^2(a^2 + \lambda)^2 + z_0^2(a^2 + \lambda)^2(b^2 + \lambda)^2},$$

$y$  et  $z$  s'obtiennent par permutation. C'est le résultat de M. LORIA.

Si  $x' = y' = z' = 0$ , les équations (4) sont

$$x = x_0 \frac{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)^2(c^2 + \lambda)^2}{x_0^2(b^2 + \lambda)^2(c^2 + \lambda)^2 + y_0^2(c^2 + \lambda)^2(a^2 + \lambda)^2 + z_0^2(a^2 + \lambda)^2(b^2 + \lambda)^2}$$

et ses analogues.

18. — Soient sur une quadrique  $\Sigma$  pouvant avoir un point double S,  $(\varpi')$ ,  $(\varpi'')$  deux coniques sans point double dont les plans se coupent suivant une droite s rencontrant  $\Sigma$  en X, Y; x, y les rayons, issus de X, Y, d'un système réglé  $(\Sigma) = (a, b, \dots)$  de  $\Sigma$ ;  $x', x''$  les tangentes en X à  $(\varpi')$ ,  $(\varpi'')$ ;  $C_n$  une courbe gauche d'ordre n ayant les rayons de  $(\Sigma)$  pour unisécantes, ou  $(n-1) - 1$  sécantes si le point  $(n-2)$ -uple S existe, et qui ne passe ni par X ni par Y; A', A'', A les points de a sur  $(\varpi')$ ,  $(\varpi'')$ ,  $C_n$ ; k un nombre donné différent de 0, de 1 et de  $\infty$ . Le lieu du point  $A_0$  tel que l'on ait

$(A' A'' A A_0) = k$  est une courbe  $C_{n+2}$  d'ordre  $n+2$  qui passe par  $x, y$ , par les  $2n$  points communs à  $C_n$  et  $(\varpi')$  ou  $(\varpi'')$ , et qui admet les rayons de  $(\Sigma)$  pour unisécantes.

$C_{n+2}$  peut être dite la transformée anharmonique de  $C_n$  pour les coniques  $(\varpi'), (\varpi'')$  et le coefficient  $k$ <sup>1</sup>.

Un plan  $\alpha$  mobile autour de  $s$  engendre un faisceau  $(\alpha)$  projectif à l'involution  $I_n$  du  $n^e$  ordre décrite par les  $n$  rayons  $a_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , de  $(\Sigma)$  issus des points  $\alpha C_n$ . Si  $q$  est une directrice de  $(\Sigma)$ , ou un rayon de  $(\Sigma)$  lorsque  $S$  existe, le plan  $\alpha_0$  passant par  $s$  et tel que  $s(x' x'' \alpha \alpha_0) = k$  engendre un faisceau qui, étant projectif à  $(\alpha)$ , l'est aussi à l'involution de plans du  $n^e$  ordre  $qI_n$ . Les droites  $\alpha_0 - (qa_i)$  décrivent une surface  $\Sigma_{n+1}$  d'ordre  $n+1$  qui admet  $q$  pour droite  $n$ -uple et qui ne contient ni  $x$  ni  $y$ ; elle recoupe donc  $\Sigma$  suivant une courbe  $C_{n+2}$ . Le point  $X$  de  $C_{n+2}$  provient du point de  $C_n$  sur  $x$ .

La tangente  $t_x$  à  $C_{n+2}$  en  $X$  est telle que

$$(x' x'' x t_x) = k,$$

car on a  $X(A' A'' A A_0) = k$  et lorsque  $a$  se rapproche indéfiniment de  $x$ , les positions limites des droites  $XA', XA'', XA, XA_0$  sont  $x', x'', x, t_x$ .

Lorsque  $C_n$  passe par  $X$  et  $y$  admet une tangente  $x_1$ , le lieu de  $A_0$  est une courbe  $C_{n+1}$  passant par  $X$  avec une tangente  $t_x$  telle que  $(x' x'' x_1 t_x) = k$ , pourvu que l'on ait  $(x' x'' x_1 x) \neq k$ ; mais si  $(x' x'' x_1 x) = k$ , le lieu de  $A_0$  est une courbe  $C_n$  qui rencontre  $x$  au point de contact de  $\Sigma$  avec le plan  $sx$ . En effet, l'involution  $I_n$  est remplacée par une involution d'ordre  $n-1$ ,  $\Sigma_{n+1}$  par une surface  $\Sigma_n$  d'ordre  $n$  qui ne contient  $x$  que si  $(x' x'' x_1 x) = k$ .

COROLLAIRE. — Si  $n=2$ , on obtient la construction de VIETORIS pour une biquadratique de seconde espèce à l'aide de trois coniques (*Sitzungsberichte der Wiener Akademie*, t. CXXV, 1916, p. 259; LORIA, *op. cit.*, p. 278; *Mathesis*, 1927-173, 1929-87).

Si  $n=3$ , on construit une  $C_5^2$  à l'aide de deux coniques et d'une

<sup>1</sup> On peut comparer cette transformation à celles que nous avons étudiées pour la géométrie plane dans deux notes insérées dans *Mathesis*: *Sur une courbe hyperharmonique de deux autres* (1929-146), *Sur la ligne anharmonique centrale de trois lignes données* (1929-368).

cubique gauche. M. HJELMANN (*loc. cit.*, pp. 9-11) l'établit pour  $k = -1$  et étudie, pour  $k = -1$ , la génération réciproque, déjà traitée par M. BERTINI pour  $k$  quelconque dans le cas de la biquadratique gauche, et que nous allons généraliser.

19. — Une courbe  $C_n$  d'ordre  $n$  admettant les rayons d'un système réglé pour  $(n-1)$ -sécantes peut être regardée de  $\infty^2$  manières comme la transformée anharmonique d'une courbe analogue  $C_{n-2}$  d'ordre  $n-2$ , relativement à deux coniques  $(\omega')$ ,  $(\omega'')$  et à un coefficient  $k$  donné, différent de 1, de 0 et de  $\infty$ .

Soient  $x, y$  et  $x_1, y_1$  les rayons unisécantes et les tangentes relatifs aux points d'appui  $X, Y$  de l'une quelconque  $s$  des  $\infty^2$  bisécantes de  $C_n$ . Si on choisit  $X, Y$  de manière que  $x_1, y_1$  ne se coupent pas, il existe un ou deux couples de plans  $\omega', \omega''$  passant par  $s$ , et tels que l'on ait

$$s(\omega' \omega'' x_1 x) = s(\omega' \omega'' y_1 y) = \frac{1}{k}.$$

La transformée anharmonique de  $C_n$  relativement à  $\frac{1}{k}$  et aux coniques  $(\omega'), (\omega'')$  est, en vertu de ces égalités, une courbe  $C_{n-2}$  ne passant ni par  $X$  ni par  $Y$  (18); celle de  $C_{n-2}$  pour le coefficient  $k$  est une courbe  $C'_n$  tangente en  $X$  à  $x_1$ , en  $Y$  à  $y_1$  et qui contient les  $2n-4$  points de  $C_{n-2}$  dans  $\omega', \omega''$ .  $C'_n$  ayant  $2n$  points communs avec  $C_n$  coïncide avec  $C_n$  car celle-ci, pouvant être engendrée à l'aide d'une correspondance  $(1, n-1)$  entre les deux systèmes de génératrices de la quadrique support, est déterminée par  $2n-1$  points.

REMARQUE. — A chacune des  $(n-2)(2n-5)$  bisécantes joignant deux des  $2(n-2)$  points où  $C_n$  est tangente à une directrice du système réglé sont attachées  $\infty'$  de telles transformations car  $x$  et  $y_1$  se coupent de même que  $y$  et  $x_1$ ; les couples de plans  $\omega', \omega''$  engendrent deux faisceaux projectifs, de plans doubles  $xs, ys$ .