Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 29 (1930)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE.

Artikel: SUR LA TRISECTION APPROCHÉE D'UN ANGLE QUELCONQUE

Autor: d'Ocagne

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-23267

SUR LA TRISECTION APPROCHÉE D'UN ANGLE QUELCONQUE

PAR

M. D'OCAGNE, de l'Académie des Sciences (Paris).

J'ai naguère été conduit par une voie indirecte à une solution approchée de ce problème [1]. Je vais faire voir ici comment elle peut-être retrouvée par une méthode directe tout à fait analogue à celle que j'ai suivie pour le problème de la rectification approchée d'un arc de cercle [2].

Soit, sur le cercle de centre O et de rayon égal à 1, l'arc AB mesurant l'angle 3α qu'il s'agit de trisecter par le point M tel que l'arc AM mesure α. Abaissons de B sur OA la perpendiculaire BH égale à $\sin 3\alpha$ et prenons sur HB le point C tel que $HC = \lambda HB$. De C comme centre, avec un rayon r égal à μHB, décrivons un cercle et tâchons de déterminer λ et μ de façon que ce cercle passe aussi près que possible du point M. On a, en posant $CM = l$,

$$l^2 = (\cos\alpha - \cos 3\alpha)^2 + (\sin\alpha - \lambda \sin 3\alpha)^2 .$$

Par suite, l'écart entre l^2 et r^2 est donné par

$$\Delta = (\cos\alpha - \cos 3\alpha)^2 + (\sin\alpha - \lambda \sin 3\alpha)^2 - \mu^2 \sin^2 3\alpha .$$

Remplaçant dans cette expression $\cos 3\alpha$ et $\sin 3\alpha$ par leurs valeurs

$$\cos 3\alpha = \cos\alpha(1 - 4\sin^2\alpha) , \qquad \sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

---

1 *Génie civil*, t. LXII, 1912, p. 79.
2 *Nouv. Ann. de math.*, 4[me] série, t. VII, 1907, p. 1.

et réduisant, on trouve, en posant $\lambda^2 - \mu^2 = \nu$,

$$\Delta = (1 - 6\lambda + 9\nu)\sin^2\alpha + 8(2 + \lambda - 3\nu)\sin^4\alpha + 16(\nu - 1)\sin^6\alpha\ .$$

Si nous annulons les deux premiers termes en prenant

$$1 - 6\lambda + 9\nu = 0\ , \qquad 2 + \lambda - 3\nu = 0\ ,$$

d'où nous tirons $\lambda = \frac{7}{3}$, $\nu = \frac{13}{9}$, et, par suite $\mu = 2$, nous avons

$$\Delta = \frac{64}{9}\sin^6\alpha\ .$$

Mais, de

$$l^2 - r^2 = \Delta\ ,$$

nous tirons

$$l = (r^2 + \Delta)^{\frac{1}{2}} = r + \frac{\Delta}{2r} + \ldots$$

ou, en négligeant les termes en Δ^2, Δ^3, ...

$$l - r = \frac{\Delta}{2r} = \frac{16}{9}\frac{\sin^6\alpha}{\sin 3\alpha}\ .$$

Cela fixe l'ordre de petitesse de l'écart entre l et r, qui, pour α très petit, et regardé comme de premier ordre, est le cinquième (le même, par conséquent, que celui qui se rapporte à notre rectification du cercle rappelée plus haut).

Au surplus on peut remarquer que l'angle de 15° pouvant être rigoureusement construit, il suffit, dans tous les cas d'appliquer la construction approchée à un angle au plus égal à 45°. Or, pour $\alpha = 15°$, on trouve

$$\frac{16}{8}\frac{\sin^6\alpha}{\sin 3\alpha} = 0{,}00075\ ,$$

quantité strictement négligeable.

La construction ici retrouvée est donc, en pratique, largement suffisante; on voit qu'elle peut se formuler comme suit:

Ayant marqué, sur HB, *le point* D *tel que* $\mathrm{HD} = \frac{\mathrm{HB}}{3}$ *et le point* C *tel que* DC = 2HB, *on décrit de* C *comme centre, avec* CD *pour rayon un arc de cercle qui coupe l'arc* AB *au point* M *cherché.*