Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 29 (1930)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE.

Artikel: REMARQUE SUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES, LINÉAIRES ET A COEFFICIENTS CONSTANTS

Autor: Nicolesco, Miron

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-23264

REMARQUE SUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES, LINÉAIRES ET A COEFFICIENTS CONSTANTS

PAR

Miron NICOLESCO (Cernauti, Roumanie)

---

1. — Pour un grand nombre d'équations linéaires, à coefficients constants, aux dérivées partielles (nous n'avons qu'à citer l'équation de Laplace, l'équation de la chaleur, l'équation des cordes vibrantes, etc.), la recherche des intégrales satisfaisant à certaines conditions aux limites se fait de la manière suivante: On cherche une intégrale particulière, on y introduit un paramètre variable et, par effectuation d'opérations fonctionnelles (dérivation, intégration) sur ce paramètre, on déduit de cette première intégrale autant d'intégrales nouvelles que l'on veut.

Dans cette petite Note je vais indiquer un autre procédé pour déduire d'une intégrale donnée d'une équation du type indiqué, une autre intégrale.

2. — Soit

$$\mathcal{F}(u) = 0 \tag{1}$$

une équation linéaire, à coefficients constants, aux dérivées partielles, portant sur une fonction $u(x, y)$ des deux variables réelles x, y.

Soit, d'autre part, $C_R(x, y)$ un cercle de rayon fixe R, ayant le centre au point variable (x, y). Je dis que *si* u (x, y) *est une intégrale de l'équation* (1), *la fonction suivante*

$$\mathrm{U}(x, y) = \iint_{\mathrm{C_R}(x, y)} u(x', y')\, dx'\, dy' \tag{2}$$

en est une autre.

En effet, par suite d'un calcul effectué déjà par M. E.-E. Levi [1], on a

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} = \mathrm{R} \int_0^{2\pi} u(x + \mathrm{R}\cos\theta,\ y + \mathrm{R}\sin\theta) \cos\theta\, d\theta$$

ce qu'on peut écrire aussi

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} = \iint_{\mathrm{C_R}(x, y)} \frac{\partial u(x', y')}{\partial x'}\, dx'\, dy' .$$

On a, de même,

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y} = \iint_{\mathrm{C_R}(x, y)} \frac{\partial u(x', y')}{\partial y'}\, dx'\, dy' .$$

Cela suffit pour pouvoir écrire tout de suite l'identité

$$\mathcal{F}[\mathrm{U}(x, y)] = \iint_{\mathrm{C_R}(x, y)} \mathcal{F}[u(x', y')]\, dx'\, dy' , \tag{3}$$

qui démontre notre proposition.

3. — Ce qui me paraît digne à signaler — et c'est surtout le but de cette Note — c'est que, moyennant une hypothèse assez large, on peut *inverser* le théorème précédent:

Si

$$\mathrm{U}(x, y) = \iint_{\mathrm{C_R}(x, y)} u(x', y')\, dx'\, dy'$$

est une intégrale de l'équation aux dérivées partielles (1), $u(x, y)$ *en est une autre.*

---

[1] E. E. Levi, Sopra una proprietà caratteristica delle funzioni armoniche *(Rendiconti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei,* 1909, pp. 10-15).

C'est une conséquence immédiate d'une importante proposition récemment trouvée par M. D. Pompéiu [1] et dont nous rappellerons l'énoncé: soit $f(x, y)$ une fonction continue dans tout le plan et $F(x, y)$ la fonction définie par l'équation

$$F(x, y) = \iint_{C_R(y; x)} f(x', y')\, dx'\, dy' .$$

Si $F(x, y)$ *est constante,* $f(x, y)$ *l'est aussi.*

Les deux constantes sont liées par la relation $F = \pi R^2 f$, donc si $F = 0$, on a aussi $f = 0$.

L'application du théorème de M. Pompéiu à l'égalité (3) nous fournit la proposition énoncée. L'hypothèse que l'on doit introduire, pour que cette application soit valable, est la continuité partout de tous les termes de $\mathcal{F}(u)$.

En particulier, si $U(x, y)$ est harmonique, biharmonique, etc., $u(x, y)$ l'est aussi. C'est un résultat que nous avons trouvé par une voie plus difficile et moyennant des hypothèses beaucoup plus restrictives [2] ».

Bucarest, 3 juin 1930.

---

[1] D. Pompéiu, Sur certains systèmes d'équations linéaires et sur une propriété intégrale des fonctions de plusieurs variables (*Comptes Rendus*, t. 188, p. 1138, avril 1929) et aussi: Sur une propriété intégrale des fonctions de deux variables réelles (*Académie Royale de Belgique*, Bulletin de la Classe des Sciences, 5e série, t. XV, 1929, pp. 265-269).

[2] *Comptes Rendus*, t. 188, p. 1370.