

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 29 (1930)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE.

**Artikel:** REMARQUE SUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS AUX  
DÉRIVÉES PARTIELLES, LINÉAIRES ET A COEFFICIENTS  
CONSTANTS  
**Autor:** Nicolesco, Miron  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-23264>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 14.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# REMARQUE SUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES, LINÉAIRES ET A COEFFICIENTS CONSTANTS

P A R

Miron NICOLESCO (Cernauti, Roumanie)

1. — Pour un grand nombre d'équations linéaires, à coefficients constants, aux dérivées partielles (nous n'avons qu'à citer l'équation de Laplace, l'équation de la chaleur, l'équation des cordes vibrantes, etc.), la recherche des intégrales satisfaisant à certaines conditions aux limites se fait de la manière suivante: On cherche une intégrale particulière, on y introduit un paramètre variable et, par effectuation d'opérations fonctionnelles (dérivation, intégration) sur ce paramètre, on déduit de cette première intégrale autant d'intégrales nouvelles que l'on veut.

Dans cette petite Note je vais indiquer un autre procédé pour déduire d'une intégrale donnée d'une équation du type indiqué, une autre intégrale.

2. — Soit

$$\mathcal{F}(u) = 0 \quad (1)$$

une équation linéaire, à coefficients constants, aux dérivées partielles, portant sur une fonction  $u(x, y)$  des deux variables réelles  $x, y$ .

Soit, d'autre part,  $C_R(x, y)$  un cercle de rayon fixe  $R$ , ayant

le centre au point variable  $(x, y)$ . Je dis que si  $u(x, y)$  est une intégrale de l'équation (1), la fonction suivante

$$U(x, y) = \iint_{C_R(x, y)} u(x', y') dx' dy' \quad (2)$$

en est une autre.

En effet, par suite d'un calcul effectué déjà par M. E.-E. Levi<sup>1</sup>, on a

$$\frac{\partial U}{\partial x} = R \int_0^{2\pi} u(x + R \cos \theta, y + R \sin \theta) \cos \theta d\theta$$

ce qu'on peut écrire aussi

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \iint_{C_R(x, y)} \frac{\partial u(x', y')}{\partial x'} dx' dy' .$$

On a, de même,

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \iint_{C_R(x, y)} \frac{\partial u(x', y')}{\partial y'} dx' dy' .$$

Cela suffit pour pouvoir écrire tout de suite l'identité

$$\mathcal{F}[U(x, y)] = \iint_{C_R(x, y)} \mathcal{F}[u(x', y')] dx' dy' , \quad (3)$$

qui démontre notre proposition.

3. — Ce qui me paraît digne à signaler — et c'est surtout le but de cette Note — c'est que, moyennant une hypothèse assez large, on peut inverser le théorème précédent:

Si

$$U(x, y) = \iint_{C_R(x, y)} u(x', y') dx' dy'$$

est une intégrale de l'équation aux dérivées partielles (1),  $u(x, y)$  en est une autre.

<sup>1</sup> E. E. LEVI, Sopra una proprietà caratteristica delle funzioni armoniche (*Rendiconti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei*, 1909, pp. 10-15).

C'est une conséquence immédiate d'une importante proposition récemment trouvée par M. D. Pompéiu<sup>1</sup> et dont nous rappellerons l'énoncé: soit  $f(x, y)$  une fonction continue dans tout le plan et  $F(x, y)$  la fonction définie par l'équation

$$F(x, y) = \iint_{C_R(y, x)} f(x', y') dx' dy' .$$

*Si  $F(x, y)$  est constante,  $f(x, y)$  l'est aussi.*

Les deux constantes sont liées par la relation  $F = \pi R^2 f$ , donc si  $F = 0$ , on a aussi  $f = 0$ .

L'application du théorème de M. Pompéiu à l'égalité (3) nous fournit la proposition énoncée. L'hypothèse que l'on doit introduire, pour que cette application soit valable, est la continuité partout de tous les termes de  $\mathcal{F}(u)$ .

En particulier, si  $U(x, y)$  est harmonique, biharmonique, etc.,  $u(x, y)$  l'est aussi. C'est un résultat que nous avons trouvé par une voie plus difficile et moyennant des hypothèses beaucoup plus restrictives<sup>2</sup>.

Bucarest, 3 juin 1930.

<sup>1</sup> D. POMPÉIU, Sur certains systèmes d'équations linéaires et sur une propriété intégrale des fonctions de plusieurs variables (*Comptes Rendus*, t. 188, p. 1138, avril 1929) et aussi: Sur une propriété intégrale des fonctions de deux variables réelles (*Académie Royale de Belgique, Bulletin de la Classe des Sciences*, 5<sup>e</sup> série, t. XV, 1929, pp. 265-269).

<sup>2</sup> *Comptes Rendus*, t. 188, p. 1370.