Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 29 (1930)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE.

Artikel: SUR UNE CLASSE D'INTÉGRALES DÉFINIES QUI SE RAMÈNENT AUX INTÉGRALES EULÉRIENNES

Autor: Lainé, E.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-23263

SUR UNE CLASSE D'INTÉGRALES DÉFINIES QUI SE RAMÈNENT AUX INTÉGRALES EULÉRIENNES

PAR

E. Lainé (Angers).

---

1. — Rappelons d'abord que, p et q désignant deux nombres positifs quelconques, on appelle intégrale *eulérienne* de première espèce l'intégrale définie

$$B(p\,,\ q) = \int_0^1 x^{p-1}\,(1 - x)^{q-1}\,dx\ , \tag{1}$$

et intégrale eulérienne de seconde espèce l'intégrale définie

$$\Gamma p = \int_0^\infty e^{-x}\,x^{p-1}\,dx\ .$$

J'ai montré ailleurs [1] l'intérêt que présente, pour le calcul de certaines intégrales définies, la réduction systématique aux formes eulériennes. Je voudrais en donner ici un nouvel exemple relatif à toute une catégorie d'intégrales que l'on détermine habituellement par la méthode des résidus.

Faisons d'abord une remarque préliminaire. Dans la formule (1) l'intégrale définie est supposée prise le long du segment (0, 1) de l'axe réel; remplaçons ce segment par un arc continu (L) joignant les points 0 et 1, et, pour fixer les idées, supposons que cet arc

---

[1] *Précis d'Analyse mathématique*, t. I, n° 76.

ne coupe en aucun autre point l'axe réel Ox. Des points 0 et 1 comme centres avec un rayon très petit décrivons des arcs de cercle $\alpha\beta$ et $\gamma\delta$ limités à l'axe Ox et au chemin L. A l'intérieur

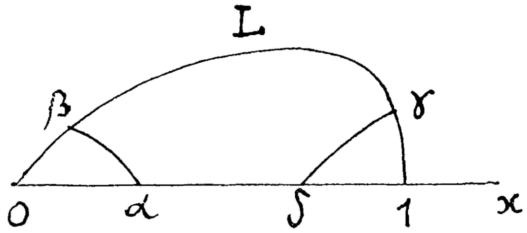

Fig. 1.

du contour fermé $\alpha\beta\gamma\delta$ la fonction $z^{p-1}(1 - z)^{q-1}$ est uniforme; choisissons celle de ses déterminations qui prend pour valeur $x^{p-1}(1 - x)^{q-1}$ sur le segment $\alpha\delta$. On aura alors

$$\int_{\widehat{\beta\gamma}} f(z)\, dz = \int_{\alpha}^{\delta} x^{p-1}(1 - x)^{q-1}\, dx + \int_{\widehat{\beta\alpha}} f(z)\, dz + \int_{\widehat{\delta\gamma}} f(z)\, dz \ .$$

Tenant compte des hypothèses faites sur p et q, on s'assure, par un raisonnement classique, que les deux dernières intégrales ont un module infiniment petit en même temps que le rayon des arcs $\beta\alpha$ et $\gamma\delta$; on aura donc à la limite

$$\int_{\Gamma} z^{p-1}(1 - z)^{q-1}\, dz = \int_{0}^{1} x^{p-1}(1 - x)^{q-1}\, dx = \mathrm{B}(p\,,\ q) \ .$$

2. — Considérons en premier lieu l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_{0}^{1} x^{p-1}(1 - x)^{-p} \frac{dx}{x + \alpha}\,, \qquad (0 < p < 1)$$

où α est un nombre *réel* extérieur à l'intervalle $(-1,\ 0)$. Effectuons sur x la substitution homographique

$$x = \frac{\alpha t}{1 + \alpha - t}\ ;$$

on aura

$$1 - x = \frac{(1 + \alpha)(1 - t)}{1 + \alpha - t}\,, \qquad x + \alpha = \frac{\alpha(1 + \alpha)}{1 + \alpha - t}\,,$$

$$\frac{dx}{x + \alpha} = \frac{dt}{1 + \alpha - t}\,,$$

et par suite, t variant de 0 à 1 en même temps que x,

$$I = \int_0^1 \alpha^{p-1} t^{p-1} (1 + \alpha)^{-p} (1 - t)^{-p} dt = \alpha^{p-1} (1 + \alpha)^{-p} \mathrm{B}(p, 1 - p),$$

ou enfin, compte tenu de la *relation* classique *des compléments*,

$$I = \alpha^{p-1} (1 + \alpha)^{-p} \frac{\pi}{\sin p\pi}.$$

Pour éviter toute difficulté d'application de cette formule au cas où α est un nombre négatif, il suffit de l'écrire sous la forme

$$I = \left(\frac{\alpha}{1 + \alpha}\right)^p \frac{\pi}{\alpha \sin p\pi}. \tag{2}$$

Il est clair que, par des dérivations successives portant sur la variable α, on déduira de cette formule les valeurs des intégrales définies de la forme

$$\int_0^1 x^{p-1} (1 - x)^{-p} \frac{dx}{(x + \alpha)^n},$$

n désignant un entier positif quelconque.

Enfin on établirait de la même façon la formule plus générale

$$\int_0^1 x^{p-1} (1 - x)^{q-1} \frac{dx}{(|x + \alpha|)^{p+q}} = |\alpha|^{-q} (|1 + \alpha|)^{-p} \mathrm{B}(p, q),$$

où p et q désignent deux nombres positifs et α un nombre réel extérieur à l'intervalle (— 1, o), d'où l'on pourrait encore déduire de nouvelles intégrales définies au moyen de dérivations successives portant sur la variable α.

3. — Considérons maintenant l'intégrale

$$J = \int_0^1 x^{p-1} (1 - x)^{-p} \frac{dx}{x + a} \qquad (0 < p < 1)$$

où a est un nombre complexe

$$a = \alpha + i\beta \qquad \beta \neq 0.$$

D'après la remarque préliminaire nous avons le droit d'appliquer à l'intégrale J la formule (2) à la condition d'y remplacer α par a et de choisir convenablement la détermination de

$$\left(\frac{a}{1+a}\right)^p .$$

La relation homographique

$$x = \frac{at}{1 + a - t}$$

transforme, comme on sait, les cercles du plan (x) en cercles du plan (t). En particulier quand x décrit le segment rectiligne (0, 1), le point $t = \xi + i\eta$ décrit entre les mêmes extrémités un arc du cercle

$$\beta(\xi^2 + \eta^2) - \beta\xi - \eta[\alpha(1 + \alpha) + \beta^2] = 0 .$$

Le centre C de ce cercle a pour coordonnées

$$\xi_0 = \frac{1}{2} \qquad \eta_0 = \frac{\alpha(1 + \alpha) + \beta^2}{2\beta} ,$$

et il est facile de voir que l'arc décrit par le point (t) est situé au-dessus de l'axe réel si $\beta < 0$ et au-dessous si $\beta > 0$. Si nous désignons par φ l'angle, compris entre $-\pi$ et $+\pi$, que fait avec

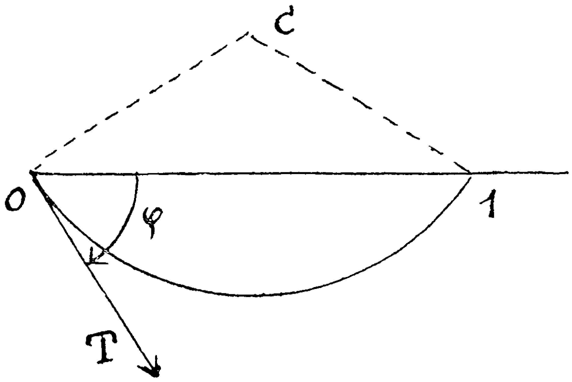

Fig. 2.

Ox la demi-tangente au cercle en O dans le sens du chemin suivi par (t), nous aurons donc

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-\beta}{\alpha(1 + \alpha) + \beta^2}$$

avec

$$\sin \varphi = \frac{-\beta}{\sqrt{[\alpha(1 + \alpha) + \beta^2]^2 + \beta^2}} , \qquad \cos \varphi = \frac{\alpha(1 + \alpha) + \beta^2}{\sqrt{[\alpha(1 + \alpha) + \beta^2]^2 + \beta^2}} ;$$

l'angle φ est ainsi déterminé sans ambiguïté.

Désignons maintenant par θ l'argument de a, compris entre $-\pi$ et $+\pi$, et plaçons-nous à l'origine. L'argument de l'élément

$$\frac{x^{p-1}(1-x)^{-p}\,dx}{x+a}$$

est égal à $-\theta$, et ce doit être aussi la valeur de l'argument de l'élément

$$\left(\frac{a}{1+a}\right)^p \frac{1}{a} t^{p-1}(1-t)^{-p}\,dt\,.$$

Or, l'argument de t et celui de dt sont égaux à φ, et celui de $1-t$ est nul; on a donc

$$-\theta = p \arg \frac{a}{1+a} - \theta + p\varphi \qquad \text{d'où} \qquad \arg \frac{a}{1+a} = -\varphi\,.$$

On peut observer que la relation

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{\beta}{\alpha} - \operatorname{arc\,tg} \frac{\beta'}{1+\alpha} = \operatorname{arc\,tg} \frac{\beta}{\alpha(1+\alpha)+\beta^2}$$

établit directement que l'argument de $\dfrac{a}{1+a}$ est égal à $-\varphi + k\pi$, k désignant un entier quelconque. Mais le résultat auquel nous aboutissons précédemment permet justement de déterminer la valeur unique de k fixant la détermination à prendre pour l'argument de $\dfrac{a}{1+a}$. En définitive nous obtenons donc la formule identique à (2)

$$\mathrm{J} = \left(\frac{a}{1+a}\right)^p \frac{\pi}{a \sin p\pi}\,, \tag{3}$$

l'argument de $\dfrac{a}{1+a}$ *étant compris entre* $-\pi$ et $+\pi$.

Par dérivations successives on déduirait encore de la formule (3) les valeurs des intégrales de la forme

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{-p} \frac{dx}{(x+a)^n}\,,$$

n désignant un entier positif quelconque.

4. — Conservons les notations précédentes, et posons en outre

$$\alpha + i\beta = re^{i\theta} \qquad \frac{\alpha + i\beta}{1 + \alpha + i\beta} = \rho e^{i\varphi} \ ,$$

les arguments θ et φ étant compris entre $-\pi$ et $+\pi$. La formule (3) s'écrira

$$J = \int_0^1 x^{p-1}(1 - x)^{-p} \frac{dx}{x + \alpha + i\beta} = \rho^p e^{i(p\varphi - \theta)} \frac{\pi}{r \sin p\pi} \ ,$$

et l'on aurait de même

$$J_1 = \int_0^1 x^{p-1}(1 - x)^{-p} \frac{dx}{x + \alpha - i\beta} = \rho^p e^{i(\theta - p\varphi)} \frac{\pi}{r \sin p\pi} \ .$$

Considérons alors la fraction rationnelle

$$\frac{\lambda x + \mu}{(x + \alpha)^2 + \beta^2} \ ,$$

où α, β, λ et μ sont des quantités réelles; on peut écrire, en supposant $\beta \neq 0$,

$$\frac{\lambda x + \mu}{(x + \alpha)^2 + \beta^2} =$$

$$\left(\frac{\lambda\alpha - \mu}{2i\beta} + \frac{\lambda}{2}\right)\frac{1}{x + \alpha + i\beta} - \left(\frac{\lambda\alpha - \beta}{2i\beta} - \frac{\lambda}{2}\right)\frac{1}{x + \alpha - i\beta} \ .$$

On en déduit

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}(1 - x)^{-p}(\lambda x + \mu)}{(x + \alpha)^2 + \beta^2} dx = \left(\frac{\lambda\alpha - \mu}{2i\beta} + \frac{\lambda}{2}\right) J - \left(\frac{\lambda\alpha - \mu}{2i\beta} - \frac{\lambda}{2}\right) J_1 \ ,$$

et par suite, compte tenu des relations évidentes

$$\frac{J - J_1}{2i} = \frac{\rho^p}{r} \frac{\pi \sin(p\varphi - \theta)}{\sin p\pi} \qquad \frac{J + J_1}{2} = \frac{\rho^p}{r} \frac{\pi \cos(p\varphi - \theta)}{\sin p\pi} \ ;$$

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}(1 - x)^{-p}(\lambda x + \mu)}{(x + \alpha)^2 + \beta^2} dx =$$

$$\frac{\pi\rho^p}{r \sin p\pi}\left[\frac{\lambda\alpha - \mu}{\beta} \sin(p\varphi - \theta) + \lambda \cos(p\varphi - \theta)\right] \ . \qquad (4)$$

Ceci montre comment la formule (3) peut-être utilisée pour le calcul des intégrales réelles; et, puisque toute fraction rationnelle $\frac{P(x)}{Q(x)}$ peut être décomposée en éléments simples de la forme $\frac{1}{(x+a)^n}$, a étant réel ou complexe, on voit que la méthode exposée ci-dessus permet de calculer, par réduction aux formes eulériennes, toutes les intégrales

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{-p}\frac{P(x)}{Q(x)}dx\,,$$

$P(x)$ et $Q(x)$ désignant deux polynomes arbitraires premiers entre eux, dont le dernier n'admet pas de racines dans l'intervalle (0, 1) limites comprises.

Considérons, pour donner au moins un exemple, l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{x^{-\frac{3}{5}}(1-x)^{\frac{3}{5}}}{x^2+1}dx\,.$$

On peut écrire

$$\frac{x^{-\frac{3}{5}}(1-x)^{\frac{3}{5}}}{x^2+1} = x^{-\frac{3}{5}}(1-x)^{-\frac{2}{5}}\frac{1-x}{x^2+1}\,;$$

on appliquera donc la formule (4) en prenant

$$\lambda = -1 \qquad \mu = 1 \qquad \alpha = 0 \qquad \beta = 1 \qquad r = 1$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \qquad \rho = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \varphi = \frac{\pi}{4} \qquad p = \frac{2}{5}\,,$$

ce qui donne immédiatement

$$\int_0^1 \frac{x^{-\frac{3}{5}}(1-x)^{\frac{3}{5}}}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{\sqrt[5]{2}}\left(1-\operatorname{cotg}\frac{2\pi}{5}\right)\,.$$