**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
**Band:** 29 (1930)
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE.

**Artikel:** SUR LES ÉLÉMENTS DE L'ANALYSE COMBINATOIRE
**Autor:** Brun, Viggo
**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-23262

**Nutzungsbedingungen**
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 19.08.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

# SUR LES ÉLÉMENTS DE L'ANALYSE COMBINATOIRE

PAR

Viggo BRUN (Trondhjem, Norvège).

---

1. — Comment présenter les éléments de l'analyse combinatoire dans l'enseignement élémentaire ? La question est à la fois délicate et très importante. En effet, la connaissance des premiers éléments du calcul des probabilités devient de plus en plus indispensable. Elle exige la possession des notions fondamentales de l'analyse combinatoire. Mais j'estime que la manière dont on traite d'ordinaire cette analyse n'est pas satisfaisante. Bien qu'elle soit tout à fait élémentaire, elle est assez difficile pour le débutant. La distinction entre permutations, combinaisons et arrangements n'est pas facile à retenir, et des mots comme *éléments*, *groupes* et *systèmes* sont trop abstraits pour éveiller l'intérêt et pour fixer les idées.

Lors de la publication de la réédition du traité de NETTO: *Lehrbuch der Combinatorik*, 2. Aufl. 1927, j'ai introduit (voir chapitre 14) une fonction combinatoire nouvelle, la « *fonction de distribution* » (Verteilungsfunktion). Dans sa forme générale cette fonction est plus compliquée, qu'il serait nécessaire, s'il s'agit seulement d'introduire dans l'enseignement les permutations, les combinaisons et les arrangements. On peut dans ce cas se borner à traiter la fonction de distribution sous une forme particulière. Je me permets donc de proposer, dans ce qui va suivre, une nouvelle manière de traiter l'analyse combinatoire pour l'enseignement élémentaire.

2. — *Définition de la fonction de distribution :* Soit $D(n, b, \dots r; \alpha, \beta, \dots \rho)$ = nombre de manières de distribuer $n$ boules noires,

$b$ boules blanches ... et $r$ boules rouges dans des urnes pouvant renfermer respectivement $\nu$ boules, $\beta$ boules ... et $\rho$ boules.

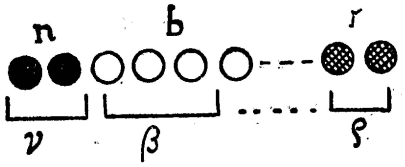


Fig. 1.

La distribution de boules à l'intérieur de chaque urne est indifférente. On ne fait pas de distinctions entre les boules de même couleur. Si cette distribution est possible, il faut que

$$n + b + \ldots + r = \nu + \beta + \ldots + \rho \, .$$

Sinon, nous avons

$$D(n, b, \ldots r ; \nu, \beta, \ldots \rho) = 0 \, .$$

*Exemple* 1. — Déterminons D (3, 2; 1, 4), c'est-à-dire le nombre de manières de distribuer 3 boules noires et 2 boules blanches dans deux urnes pouvant renfermer respectivement 1 boule et 4 boules.

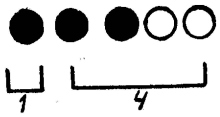


Fig. 2.

La distribution peut s'effectuer des deux manières suivantes :

Fig. 3.

Fig. 4.

On a par conséquent

$$D(3, 2; 1, 4) = 2 \, .$$

*Exemple* 2. — Déterminons D (1, 4; 3, 2), c'est-à-dire le nombre de manières de distribuer 1 boule noire et 4 boules blanches dans deux urnes pouvant renfermer respectivement 3 boules et 2 boules.

La distribution peut s'effectuer des deux manières suivantes:

Fig. 5.

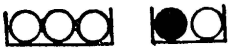

Fig. 6.

On a par conséquent

$$D(1, 4; 3, 2) = 2 .$$

3. — *Dualisme.* Ces deux exemples montrent que

$$D(3, 2; 1, 4) = D(1, 4; 3, 2) .$$

Ce résultat n'est pas un fait fortuit. Nous pouvons démontrer que les nombres se rapportant aux boules et les nombres se rapportant aux urnes peuvent changer de place:

$$D(n, b, \ldots r; \nu, \beta, \ldots \rho) = D(\nu, \beta, \ldots \rho; n, b, \ldots r) . \quad (1)$$

Je me borne, pour fixer les idées, à démontrer ce dualisme à notre exemple

$$D(3, 2; 1, 4) = D(1, 4; 3, 2) .$$

Pour rendre cet énoncé immédiatement évident, il faut modifier légèrement les règles de distribution.

En premier lieu je change les couleurs noir et blanc dans la seconde fonction en vert ( ) (fig. 7) et en rouge ( ) (fig. 8).

Puis je m'imagine que les deux urnes dont il est question dans la première fonction soient remplies d'un fluide vert et d'un fluide rouge. De même je m'imagine que les deux urnes de la

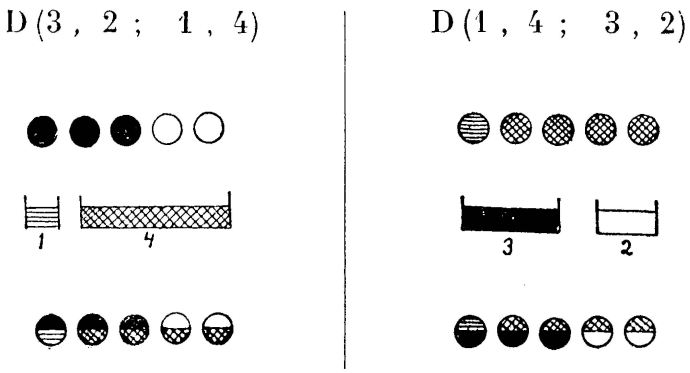


Fig. 9.

seconde fonction sont remplis d'un fluide noir et d'un fluide blanc. Je suppose que les fluides teignent la moitié inférieure des boules quand elles sont placées dans les urnes. Si nous relevons les boules elles sont alors toutes teintées de deux couleurs.

Nous pouvons donc donner à la règle de distribution D (3, 2; 1, 4) la forme suivante: Teindre 5 boules de bois de manière que 3 boules soient noires et 2 blanches sur la moitié supérieure, et que 1 boule soit verte et 4 boules rouges sur la moitié inférieure.

De même nous pouvons donner à la règle de distribution D (1, 4; 3, 2) la forme suivante: Teindre 5 boules de bois telles que 3 boules soient noires et 2 blanches sur la moitié inférieure, et que 1 boule soit verte et 4 boules rouges sur la moitié supérieure.

Ces deux énoncés ne diffèrent que par la place des deux mots « inférieur » et « supérieur ». Le dualisme est alors évident.

4. — *La fonction de distribution* $D(\underbrace{1, \ldots 1}_{m}; \nu, \beta, \ldots \rho)$. Cette fonction, et la fonction dualiste $D(n, b, \ldots r; \underbrace{1, \ldots 1}_{m})$, sont assez générales pour renfermer les permutations, les combinaisons et les arrangements. C'est donc le seul cas de la fonction de distribution qu'il faut étudier ici.

Commençons par étudier $D(\underbrace{1, 1 \ldots 1}_{m}; \underbrace{1, 1, \ldots 1}_{m})$.

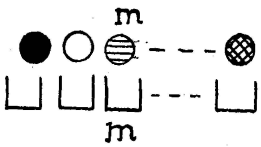


Fig. 10.

On voit immédiatement que

$$D(1; 1) = 1 \quad \text{et} \quad D(1, 1; 1, 1) = 2.$$

On en conclut par induction

$$D(\underbrace{1, 1, \ldots 1}_{m}; \underbrace{1, 1, \ldots 1}_{m}) = m! = \begin{array}{c}\text{nombre de permutations}\\ \text{de } m \text{ objets différents.}\end{array} \tag{2}$$

Cela posé nous pouvons étudier

$$D(\underbrace{1, 1, \ldots 1}_{m}; \nu, \beta, \ldots \rho) .$$

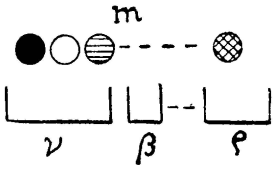


Fig. 11.

Nous supposons que la distribution soit possible:

$$\nu + \beta + \ldots + \rho = m .$$

Le problème peut être résolu indirectement en nous appuyant sur la connaissance de D (1, ... 1; 1, ... 1). Nous commençons par étudier l'effet d'une substitution de la première urne ($\nu$) par $\nu$ urnes pouvant renfermer respectivement 1 boule. Supposons pour cela, qu'ayant distribué les boules dans les urnes, nous relevons les $\nu$ boules de la première urne pour les distribuer dans $\nu$ urnes simples. Cela peut se faire de $\nu$ ! manières.

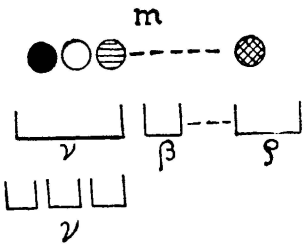


Fig. 12.

Nous obtenons donc

$$D(\underbrace{1, \ldots 1}_{m}; \underbrace{1, \ldots 1}_{\nu}, \beta, \ldots \rho) = \nu ! \, D(\underbrace{1, \ldots 1}_{m}; \nu, \beta, \ldots \rho) .$$

Il s'ensuit, en continuant de la même manière, que

$$D(\underbrace{1, \ldots 1}_{m}; \nu, \beta, \ldots \rho) = \frac{1}{\nu !} D(\underbrace{1, \ldots 1}_{m}; \underbrace{1 \ldots 1}_{\nu}, \beta, \ldots \rho)$$

$$= \frac{1}{\nu !} \frac{1}{\beta !} D(\underbrace{1, \ldots 1}_{m}; \underbrace{1 \ldots 1}_{\nu}, \underbrace{1 \ldots 1}_{\beta}, \ldots \rho)$$

$$= \frac{1}{\nu ! \, \beta ! \ldots \rho !} D(\underbrace{1, \ldots 1}_{m}; \underbrace{1 \ldots 1}_{m}) = \frac{m !}{\nu ! \, \beta ! \ldots \rho !} . \qquad (3)$$

Or le théorème dualiste s'ensuit immédiatement

$$D(n, b, \ldots r; \underbrace{1, 1, \ldots 1}_{m}) = \frac{m!}{n!\, b! \ldots r!} \tag{4}$$

où

$$n + b + \ldots + r = m .$$

C'est ce qu'on a appelé *permutations avec répétition.*

5. — *Combinaisons simples.* Un cas particulier de la formule (3) nous donne

$$D(\underbrace{1, \ldots 1}_{m}; \nu, n - \nu) = \frac{m!}{\nu!\,(m-\nu)!} = \binom{m}{\nu} . \tag{5}$$

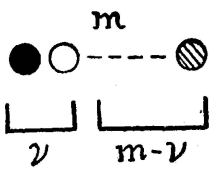


Fig. 13.

Nous observons qu'on peut omettre de remplir la deuxième urne. La première étant remplie, il ne reste qu'une seule manière de remplir la deuxième. Il s'ensuit qu'il y a $\binom{m}{\nu}$ manières de choisir $\nu$ objets entre $m$ objets différents.

6. — *Arrangements simples.* Etudions enfin un autre cas particulier de la formule (3) :

$$D(\underbrace{1, \ldots 1}_{m}; \underbrace{1, \ldots 1}_{\nu}, m - \nu) = \frac{m!}{1!\,1! \ldots 1!\,(m-\nu)!}$$

$$= m(m-1) \ldots (m - \nu + 1) . \tag{6}$$

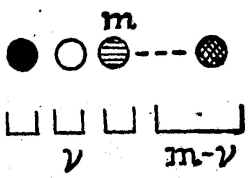


Fig. 14.

Remarquons qu'on peut encore omettre de remplir la dernière urne. Il s'ensuit qu'il y a $m(m-1)\ldots(m-\nu+1)$ manières de choisir $\nu$ objets entre $m$ objets différents quand on tient compte de l'ordre.

7. — *Formule d'addition.* En regardant une figure on voit immédiatement que

$$\mathrm{D}(n, b, \ldots r; \underbrace{1, \ldots 1}_{m}) = \mathrm{D}(n-1, b, \ldots r; \underbrace{1 \ldots 1}_{m-1})$$

$$+ \mathrm{D}(n, b-1, \ldots r; \underbrace{1 \ldots 1}_{m-1}) + \ldots + \mathrm{D}(n, b, \ldots r-1; \underbrace{1 \ldots 1}_{m-1}). \quad (7)$$

On peut d'ailleurs vérifier (7) au moyen de la formule (4). Comme cas particulier on obtient

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}.$$

8. — Pour traiter des problèmes plus compliqués il faut introduire la fonction générale de distribution. (Voir NETTO, Chap. 14.)

Il me semble que cette manière de traiter l'analyse combinatoire a certains avantages. La notion « fonction de distribution » est naturelle et conforme à l'idée de dualisme, qui est d'une grande importance dans l'analyse combinatoire. Ce dualisme a été étudié par MM. MAC MAHON et Th. SKOLEM.

(Novembre 1929.)